Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας με διαγράμματα.

Βασίλης Ξανθόπουλος
Φυσικό Τμήμα Πανεπιστημίου Κρήτης.

Οι παρούσες φοιτητικές σημειώσεις αποτελούν συμπλήρωμα στο βιβλίο του A.P. French "Ειδική Θεωρία Σχετικότητας" και γράφτηκαν για τις ανάγκες του μαθήματος "Ειδικά Θέματα Φυσικής ΙΙ".

Απρίλης 1984.

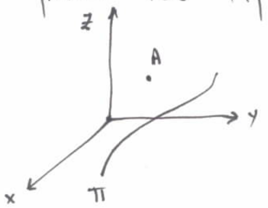
1. Μέτρηση μήκους.

Τι πρέπει να κάνουμε για να προσδιορίσουμε το μήκος μιάς ράβδου; Προφανώς, πρέπει να μετρήσουμε τις συντεταγμένες της αρχής και του τέλους της ράβδου (για ευκολία υποθέτουμε ότι η ράβδος κείται κατά μήκος του άξονα των x) και να τις αφαιρέσουμε, $l = x_2 - x_1$. Κι άν η ράβδος κινείται; Τότε προφανώς θα πρέπει να προσδιορίσουμε τη συντεταγμένη του τέλους της $x_2(t_0)$ κάποια χρονική στιγμή, τη συντεταγμένη της αρχής της $x_1(t_0)$ την ίδια χρονική στιγμή και να τις αφαιρέσουμε, $l = x_2(t_0) - x_1(t_0)$. Αν δεν είμαστε προσεκτικοί ώστε οι μετρήσεις των συντεταγμένων της αρχής και του τέλους της ράβδου να γίνουν ταυτόχρονα, το εξαγόμενο της μέτρησής μας δεν θα έχει καμμία σχέση με το μήκος της ράβδου.

Το συμπέρασμα από τα παραπάνω είναι ότι κάθε μέτρηση μήκους προϋποθέτει την έννοια του ταυτόχρονου, δηλαδή τη γνώση του συνόλου των γεγονότων που συμβαίνουν ταυτόχρονα με κάποιο συγκεκριμένο γεγονός. Φυσικά, η οποιαδήποτε έννοια του ταυτόχρονου — όπως και κάθε έννοια της φυσικής — θα πρέπει να μπορεί να ελεγχθεί με κάποιο, τουλάχιστον κατ' αρχήν πραγματοποιήσιμο, πείραμα. Η έννοια του ταυτόχρονου, όπως και οι περισσότερες έννοιες της θεωρίας της Σχετικότητας, περιγράφονται καλύτερα με διαγράμματα χωρόχρονου, που τα πραγματευόμαστε αμέσως παρακάτω.

2. Διαγράμματα χωρόχρονου.

Στη μηχανική οι κινήσεις περιγράφονται με διαγράμματα του (τρισδιάστατου) χώρου. Π.χ. ένα ακίνητο σώμα παριστάνεται μ' ένα σημείο, και ένας κινούμενος παρατηρητής με μιά γραμμή που απαρτίζεται από τις διαδοχικές θέσεις του παρατηρητή στο χώρο.



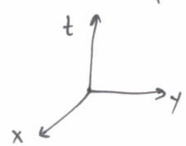
Η γραμμή όμως αυτή δεν περιγράφει τον ρυθμό με τον οποίο ο παρατηρητής Π διαγράφει τη γραμμή αυτή, δηλ. δεν λέει τίποτα για την ταχύτητα του παρατηρητή.

Στη σχετικότητα προτιμούμε τα διαγράμματα χωρόχρονου. Ο χωρόχρονος, ή χωρόχρονος Minkowski, είναι το σύνολο των γεγονότων που συμβαίνουν σ' όλο το σύμπαν, παντού και πάντοτε. (Το γεγονός είναι μιά πρωταρχική έννοια που δεν μπορεί να οριστή επακριβώς. Είναι κάτι που δεν έχει ούτε χωρική ούτε χρονική διάρκεια, κάτι που συμβαίνει κάπου κάποτε.) Παρόμοια, όταν μελετούμε ένα μοντέλο κάποιου συστήματος, ο χωρόχρονός του απαρτίζεται από το σύνολο όλων των γεγονότων που συμβαίνουν σ' όλη τη διάρκεια της ζωής του συστήματος.

Προφανώς για να προσδιοριστή ένα γεγονός χρειάζεται να δοθούν τέσσερις αριθμοί ή συντεταγ-

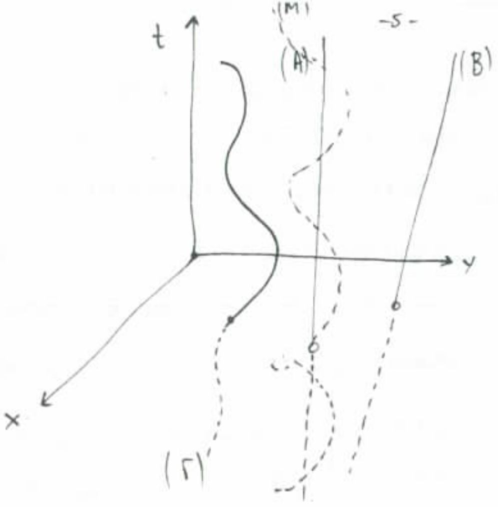
μένες: οι τρεις προσδιορίζουν το πού και ο τέταρτος το πότε συνέβη το εν λόγω γεγονός. Το σύνολο των γεγονότων του σύμπαντος, λοιπόν, αποτελεί μιά τετραδιάστατη δομή, τον χωρόχρονο. Ο Einstein δεν εισήγαγε κάποια μυστηριώδη τέταρτη διάσταση στο χώρο· απλώς μας έδειξε ότι θα πρέπει να χρησιμοποιούμε τον χώρο και τον χρόνο συγχρόνως και αλληλένδετα. Οι τέσσερις διαστάσεις του Einstein προκύπτουν από την απλή πρόσθεση 3+1!

Δυστυχώς δεν μπορούμε να παραστήσουμε σ' ένα σχήμα και τις τέσσερις διαστάσεις του χωρόχρονου. Γι' αυτό, παραλείπουμε μία ή δύο από τις χωρικές διαστάσεις και ο χωρόχρονος



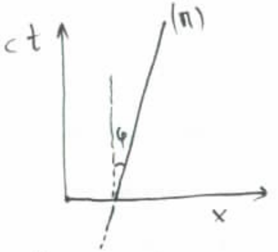
παρίσταται είτε σαν τρισδιάστατος είτε σαν δισδιάστατος. Μετά από σύμβαση, η χρονική διάσταση παριστάνεται κατακόρυφα, με το μέλλον προς τα πάνω.

Ένας ακίνητος παρατηρητής Α παρίσταται στο διάγραμμα χωρόχρονου με μιά ευθεία γραμμή παράλληλη προς τον άξονα του χρόνου. Κάποιος Β, που κινείται με σταθερή ταχύτητα



(Σχ. 1)

προς τη διεύθυνση του άξονα των y παρίσταται με την κεκλιμένη ευθεία (B) του διπλανού σχήματος.
Ένας παρατηρητής που κινείται μπρος και πίσω με μεταβαλόμενη ταχύτητα παρίσταται, π.χ., από την καμπύλη (Γ) ενώ μιά μύγα που στριφογυρίζει γύρω από το κεφάλι του ακίνητου A παρίσταται με την ελικοειδή (διακεκομένη) γραμμή (M). Οι καμπύλες που παριστάνουν σημειακούς παρατηρητές ή αντικείμενα σ' ένα διάγραμμα χωρόχρονου αναφέρονται σαν οι <u>κοσμικές τους γραμμές</u>.



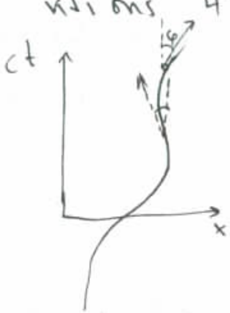
(Σχ. 2)

Η κλίση της κοσμικής γραμμής ενός παρατηρητή ως προς τον άξονα των t προσδιορίζει αμέσως την ταχύτητά του. Για έναν παρατηρητή που κινείται με σταθερή ταχύτητα (συνεπώς η κοσμική του γραμμή είναι ευθεία) διαλέγουμε

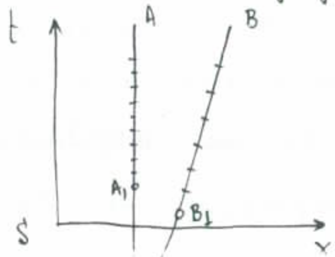
κατάλληλα τις μονάδες στους άξονες του χώρου και του χρόνου ώστε να ισχύει

$$\tan\varphi = \frac{v}{c}.$$

Αυτό μπορεί να εκφρασθεί και με τη χρήση στον άξονα των χρόνων ως μονάδας της μονάδας μήκους ct, όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός. Εφ' όσον $\tan 45^\circ = 1$, κίνηση με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός εκφράζεται με κοσμική γραμμή κλίσης 45°. Για παρατηρητή μεταβλητής ταχύτητας, η στιγμιαία του ταχύτητα μπορεί να προσδιορισθεί στο διάγραμμα χωρόχρονου από την κλίση της εφαπτόμενης της κοσμικής του γραμμής ως προς τον άξονα των χρόνων.

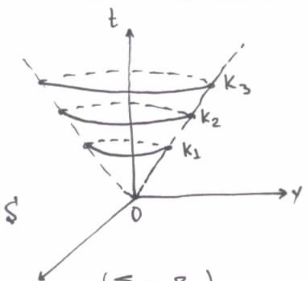


Η κοσμική γραμμή ενός παρατηρητή εκφράζει την κίνησή του μέσα στο χρόνο. Έτσι, το μήκος της κοσμικής του γραμμής από κάποιο σημείο της και πέρα εκφράζει και μετρά το χρόνο που αισθάνεται ο παρατηρητής αυτός ότι πέρασε από το γεγονός αυτό της ζωής του και πέρα. Θα κάνουμε δύο παρατηρήσεις σ' αυτό το σημείο. Πρώτον, όπως



θα δούμε παρακάτω, η μονάδα του χρόνου διαφέρει από παρατηρητή σε παρατηρητή, και εξαρτάται από την κινητική του κατάσταση. Και δεύτερον, ο παρατηρητής Β, που κινείται ως προς τον Α και το σύστημα S', δεν αισθάνεται και δεν έχει καμμιά επίγνωση του ότι κινείται, εφ'όσον κινείται κι αυτός με σταθερή ταχύτητα (είναι κι αυτός ένας αδρανειακός παρατηρητής). Ο Β λοιπόν το μόνο που αισθάνεται είναι το πέρασμα του χρόνου, και το μετρά με το μήκος που διανύει πάνω στην κοσμική του γραμμή.

3. Κώνοι φωτός.



(Σχ. 3.)

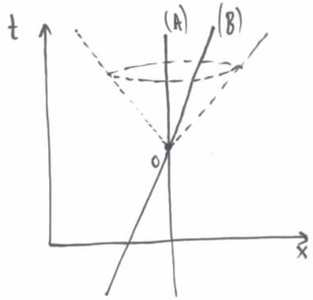
Μιά λάμπα ανάβει στιγμιαία στο γεγονός O (αρχή συστήματος συντεταγμένων του S'). Πώς παριστάνεται η διάδοση του φωτός στον χωρόχρονο;

Στον τρισδιάστατο χώρο το μέτωπο του φωτεινού κύματος διάφορες διαδοχικές στιγμές μετά το γεγονός O θα απαρτίζεται από επιφάνειες ομόκεντρων σφαιρών, που όλο και μεγαλώνουν. Στο τρισδιάστατο διάγραμμα χωρόχρονου του Σχ.3

(όπου μία χωρική διάσταση δεν εμφανίζεται), οι κοσμικές γραμμές όλων των φωτονίων που εκπέμπονται από το O προς όλες τις διευθύνσεις σχηματίζουν την αντεστραμμένη κωνική επιφάνεια του Σχ.3 με κορυφή το O. Η επιφάνεια αυτή θα αναφέρεται ως ο κώνος φωτός του γεγονότος O. Διαδοχικά μέτωπα του φωτεινού κύματος παρίστανται με τους οριζόντιους κύκλους $K_1, K_2, \ldots$, διαδοχικές τομές του κώνου φωτός με ένα "οριζόντιο επίπεδο".

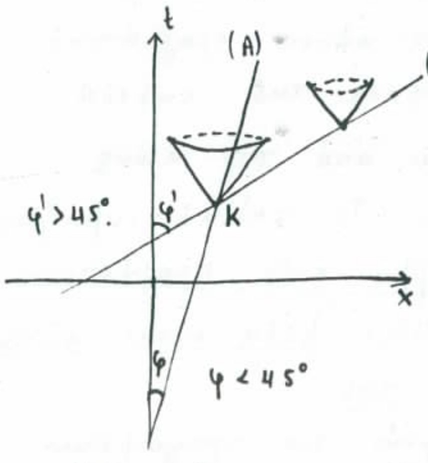
Επαναλαμβάνοντας το προηγούμενο νοητό πείραμα (άναμμα της λάμπας) σε κάθε σημείο (γεγονός) του χωρόχρονου μπορούμε να φανταστούμε τον χωρόχρονο γεμάτο από κώνους φωτός, έναν για κάθε γεγονός. Υπενθυμίζουμε ότι πάντοτε διαλέγουμε τις μονάδες μήκους και χρόνου κατάλληλα ώστε οι κοσμικές γραμμές των φωτονίων να περιγράφονται από ευθείες που σχηματίζουν κλίση 45° ως προς τον άξονα του χρόνου.

Θεωρούμε δύο παρατηρητές, τους Α και Β, σε σχετική κίνηση μεταξύ τους, που συναντιώνται στο γεγονός O, στο οποίο και οι δύο ανάβουν στιγμιαία από μία λάμπα. Προκύπτουν ο ίδιος ή διαφορετικοί



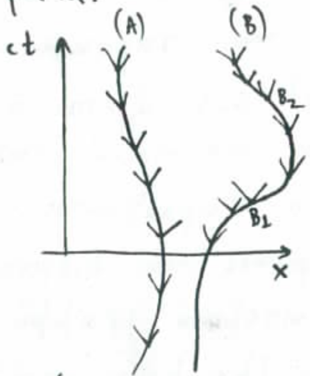
κώνοι φωτός; Εφ' όσον η μετέπειτα διάδοση του φωτός είναι ανεξάρτητη από την κινητική κατάσταση της πηγής, και στους δύο παρατηρητές αντιστοιχεί ο ίδιος κώνος φωτός για το γεγονός Ο. Καταλήγουμε λοιπόν στο πολύ σημαντικό συμπέρασμα ότι οι κώνοι φωτός σε κάθε σημείο του χωρόχρονου είναι κοινοί για όλους τους παρατηρητές που περνούν από το σημείο αυτό, ότι δηλαδή αντιστοιχεί ακριβώς ένας κώνος φωτός σε κάθε σημείο του χωρόχρονου, που χαρακτηρίζει τον χωρόχρονο και όχι τους διάφορους παρατηρητές που πιθανόν περνούν από το γεγονός αυτό. Μ' αυτόν τον πολύ απλό γεωμετρικό τρόπο – την αντιστοιχία ενός κώνου φωτός σε κάθε σημείο του χωρόχρονου – εκφράζουμε την βασική αρχή της φυσικής – που τίθεται σαν αξίωμα στη σχετικότητα – ότι η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερή και ανεξάρτητη από την κινητική κατάσταση της πηγής που το εξέπεμψε.

Θα εκφράσουμε τώρα παραστατικά την άλλη θεμελιώδη αρχή της σχετικότητας, το ότι δηλαδή τίποτα δεν μπορεί να κινηθεί πιό γρήγορα από το φώς. Προφανώς, από τους αδρανειακούς παρατηρητές Α και Β που περνούν



(Σχ. 4)

από το Κ, ο Α κινείται με ταχύτητα μικρότερη και ο Β με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός, εφόσον οι κοσμικές τους γραμμές έχουν κλίσεις ως προς τον άξονα του χρόνου μικρότερη και μεγαλύτερη από 45° αντίστοιχα. Έτσι η κοσμική γραμμή του Α βρίσκεται μέσα στον κώνο φωτός κάθε γεγονότος του παρατηρητή ενώ η κοσμική γραμμή του Β είναι πάντοτε έξω από τον κώνο φωτός. Αμέσως λοιπόν μπορούμε να πούμε, κοιτάζοντας το σχήμα 4, ότι ο Β δεν μπορεί να παριστάνει κάποιο πραγματικό παρατηρητή, εφόσον η κοσμική του γραμμή βρίσκεται έξω από τον κώνο φωτός σε κάποιο γεγονός του παρατηρητή.

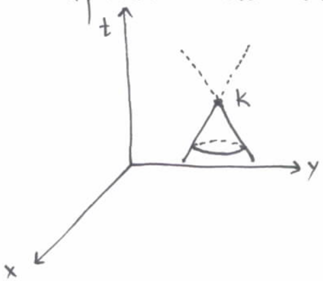


(Σχ. 5)

Πιό γενικά, εφόσον η στιγμιαία ταχύτητα ενός παρατηρητή δίνεται από την κλίση της εφαπτομένης της κοσμικής του γραμμής ως προς τον άξονα του χρόνου, διαπιστώνουμε αμέσως από το σχήμα 5 ότι η κοσμική γραμμή

(B) δεν μπορεί να παριστάνει κάποιο πραγματικό παρατηρητή εφόσον σε ορισμένα της σημεία (π.χ. B_1, B_2) βρίσκεται έξω από τον κώνο φωτός των σημείων αυτών. Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι η κοσμική γραμμή ενός πραγματικού παρατηρητή βρίσκεται πάντοτε μέσα στους κώνους φωτός όλων των σημείων της.

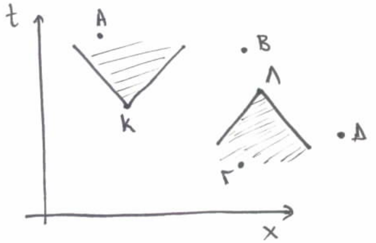
Συνεχίζοντας τους συλλογισμούς των προηγουμένων παραγράφων θεωρούμε σε κάθε σημείο του χωρόχρονου όλες τις κοσμικές γραμμές των φωτονίων



που φτάνουν στο γεγονός αυτό. Οι γραμμές αυτές σχηματίζουν τον κώνο φωτός του παρελθόντος του γεγονότος K, που είναι ο κατακορυφήν του κώνου φωτός των προηγούμενων παραγράφων και που πιό πλήρως αναφέρεται σαν ο κώνος φωτός του μέλλοντος. Η αρχή της σχετικότητας ότι η ταχύτητα του φωτός είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα του παρατηρητή (που παρατηρεί τη λήψη του φωτός) συνεπάγεται ότι σε κάθε σημείο του χωρόχρονου αντιστοιχεί ένας και μοναδικός κώνος φωτός του παρελθόντος, ανεξάρτητος από τους παρατηρητές που διέρχονται από το γεγονός αυτό. Και η κοσμική γραμμή κάθε πραγματικού παρατηρητή (με μάζα ηρεμίας

διάφορη του μηδενός) θα πρέπει να βρίσκεται πάντοτε μέσα στον κώνο φωτός του παρελθόντος και του μέλλοντος σε κάθε της σημείο.

Οι κώνοι φωτός σχετίζονται άμεσα με την έννοια της αιτιότητας, που είναι θεμελιώδης στη



(Σχ. 6)

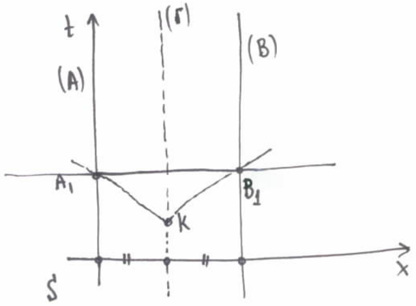
φυσική. Ας μελετήσουμε το διάγραμμα του σχήματος 6. Το γεγονός A βρίσκεται μέσα στον κώνο φωτός του K ενώ το B βρίσκεται έξω απ' αυτόν. Αυτό σημαίνει ότι το K μπορεί να επηρεάσει το A ενώ δεν μπορεί να επηρεάσει με τίποτε το B, γιατί κάτι τέτοιο θα απαιτούσε τη μετάδοση κάποιου σήματος, κάποιας πληροφορίας, με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός. Γεγονότα σαν τα K και A λέμε ότι έχουν χρονοειδή συσχέτιση (timelike related) ενώ σαν τα K και B έχουν χωροειδή συσχέτιση (spacelike related). Γεγονότα με χωροειδή συσχέτιση απέχουν τόσο λίγο χρονικά και τόσο πολύ (σχετικά) χωρικά έτσι ώστε να μην είναι δυνατόν να υπάρχει κάποια σχέση αιτιοκρατικής εξάρτησης μεταξύ τους. Π.χ., αν κάποτε γίνει μιά έκρηξη στο Γαλαξία μας και πέντε χρόνια αργότερα γίνει (όχι δούμε) μιά έκρηξη στο γαλαξία της Ανδρομέδας (η απόσταση μεταξύ των δύο γαλαξιών είναι 2 εκατομμύρια έτη φωτός) είμαστε σίγουροι ότι οι δύο εκρήξεις είναι ανεξάρτητες και ασυσχέτιστες μεταξύ τους, γιατί κανένα από τα αποτελέσματα της έκρηξης του δικού μας Γαλαξία (ούτε και το ότι συνέβη) δεν έγιναν γνωστά στο Γαλαξία της Ανδρομέδας πριν περάσουν δύο εκατομμύρια χρόνια.

Παρόμοια, το γεγονός Γ στο σχήμα 6 μπορεί να έχει επηρεάσει το Λ ενώ το Δ δεν μπορεί με κανένα τρόπο να το έχει επηρεάσει. Τα Λ και Γ έχουν χρονοειδή συσχέτιση και τα Λ και Δ χωροειδή συσχέτιση. Στο σχήμα 6 οι δύο γραμμοσκιασμένες περιοχές (κατάλληλα επεκτεταμένες) παριστάνουν την περιοχή επηρεασμού (domain of influence) του γεγονότος Κ και την περιοχή εξάρτησης (domain of dependence) του γεγονότος Λ.

4. Ο χώρος

Από την κατασκευή του διαγράμματος Minkowski είναι φανερό ότι ο χώρος θα πρέπει να είναι κάποιο υποσύνολο του χωρόχρονου. Ποιό όμως; Και είναι μόνον ένα, ή πολλά; Ας σκεφτούμε πιό προσεκτικά. Ο χωρόχρονος απαρτίζεται απ' όλα τα γεγονότα που συμβαίνουν οποτεδήποτε, σ' όλα τα σημεία του σύμπαντος. Περιμένουμε λοιπόν ότι ο χωρόχρονος θα είναι η ένωση ενός άπειρου πλήθους τρισδιάστατων υποσυνόλων του, ομοίων μεταξύ τους, που το καθένα θα είναι ένα αντίτυπο του χώρου. Φανταστείτε, για μιά παρομοίωση, ένα χοντρό βιβλίο που παρομοιάζεται με τον χωρόχρονο, με τον χρόνο να μεταβάλλεται κατά τη διεύθυνση του πάχους του βιβλίου. Τα διάφορα φύλλα του βιβλίου μπορούν τότε να παρομοιαστούν με τα διαδοχικά αντίτυπα του χώρου, ένα για κάθε χρονική στιγμή, που καθορίζεται από τον αριθμό του φύλλου.

Το συμπέρασμα από τους παραπάνω συλλογισμούς είναι ότι για να προσδιορίσουμε τον χώρο μέσα στον χωρόχρονο θα πρέπει να διαλέξουμε ένα γεγονός Α, που συμβαίνει κάποια χρονική στιγμή t_0, και κατόπιν να βρούμε το σύνολο των γεγονότων του χωρόχρονου που συμβαίνουν ταυτόχρονα με το Α: όλα αυτά τα γεγονότα αποτελούν τον χώρο τη χρονική στιγμή t_0. Ο χωρόχρονος, σαν σύνολο, απαρτίζεται απ' όλους τους τρισδιάστατους χώρους, για όλες τις δυνατές χρονικές στιγμές.



(Σx. 7)

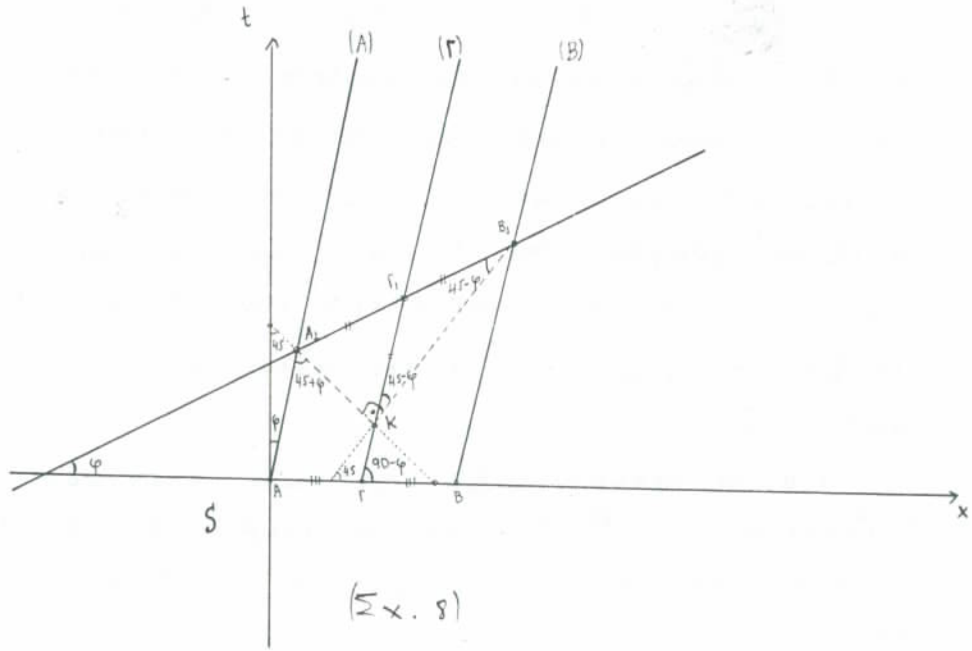
Στο σχήμα 7 θεωρούμε δύο ακίνητους παρατηρητές με κοσμικές γραμμές (A) και (B). Η κοσμική γραμμή του (A) συμπίπτει με τον άξονα t του χρόνου του συστήματος S. Οι ρυθμοί με τους οποίους προχωρούν τα ωρολόγια των (A) και (B) καθορίζονται από το μήκος των κοσμικών τους γραμμών. Για να συμφωνούν όμως πλήρως οι δύο παρατηρητές, είναι απαραίτητο να συγχρονίσουν τα ωρολόγια τους, δηλαδή να ορίσουν και μιά κοινή αρχή των χρόνων, ας πούμε να ορίσουν κάποιο κοινό μεσημέρι. Για το σκοπό αυτό διαλέγουν έναν τρίτο παρατηρητή (Γ), ακίνητο ως προς τους (A) και (B), μεταξύ των (A) και (B) και σε ίση απόσταση απ' αυτούς. Αποφασίζεται ο (Γ) να στείλει κάποια χρονική στιγμή K (όποια αυτός θέλει) ένα φωτεινό σήμα που οι (A) και (B) παίρνουν στα γεγονότα A_1 και B_1. Εφόσον ο (Γ) ισαπέχει από τους (A) και (B), και εφόσον

η ταχύτητα του φωτός είναι ανεξάρτητη από την κινητική κατάσταση της πηγής και του παρατηρητή, τα γεγονότα λήψεως των φωτεινών σημάτων από τους δύο παρατηρητές A_1 και B_1 είναι ταυτόχρονα.

Ας σημειωθεί ότι έπρεπε απαραίτητα να χρησιμοποιηθούν κάποια σήματα γιατί κάθε τι που ορίζουμε στη φυσική θα πρέπει να μπορούμε και να το ελέγξουμε πειραματικά, τουλάχιστον με κάποιο ιδεατό πείραμα. Αν υπήρχε η δυνατότητα μετάδοσης πληροφορίας με άπειρη ταχύτητα, δεν θα υπήρχε κανένα πρόβλημα: θα ορίζαμε κάπου (αυθαίρετα) την αρχή του χρόνου και θα στέλναμε ένα σήμα με άπειρη ταχύτητα προς όλους τους δυνατούς παρατηρητές, δηλ. ένα σήμα που θα παριστάνετο στο Σx.7 με μια γραμμή παράλληλη προς τον άξονα των x. Επειδή όμως κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό στη σχετικότητα ούτε και "κατ' αρχήν", χρησιμοποιούμε φωτεινά σήματα. Ευτυχώς που η διάδοση των φωτεινών σημάτων μένει ανεπηρέαστη από τις κινήσεις της πηγής και των παρατηρητών, και έτσι προσδιορίζουμε τα σωστά ταυτόχρονα γεγονότα A_1 και B_1. Το βασικό είναι να φροντίσουμε ώστε ο (Γ) να βρίσκεται σε ίση απόσταση από τους (A) και (B).

Επαναλαμβάνουμε την κατασκευή του σχήματος 7 και για άλλους παρατηρητές, προσδιορίζουμε το σύνολο των γεγονότων που είναι ταυτόχρονα με το γεγονός A_1, όπως το αισθάνεται ο παρατηρητής (A). Το σύνολο αυτό αποτελεί τον χώρο του παρατηρητή (A) τη χρονική στιγμή A_1. Στο διδιάστατο χωρόχρονο του σχήματος 7 ο χώρος αυτός παριστάνεται από την ευθεία A_1B_1, που είναι παράλληλη προς τον άξονα των x. Διαπιστώνουμε ότι η διαδικασία της σελίδας 15 (με τη βοήθεια των φωτεινών σημάτων) δίνει το αποτέλεσμα που περιμένουμε για το τι είναι ο χώρος μέσα στον χωρόχρονο.

Επαναλαμβάνουμε τώρα την προηγούμενη κατασκευή για τους δύο παρατηρητές (A) και (B) του σχήματος 8. Οι (A) και (B) είναι ακίνητοι ο ένας ως προς τον άλλον αλλά περιγράφονται σ' ένα σύστημα συντεταγμένων S ως προς το οποίο κινούνται με ταχύτητα v, που προσδιορίζεται από τη γωνία φ του σχήματος, $\tan\varphi = v/c$. Οι (A) και (B) είναι αδρανειακοί παρατηρητές. Συνεπώς δεν αισθάνονται ότι κινούνται, ούτε και είναι διατεθειμένοι να το αναγνωρίσουν. Είναι λογικό λοιπόν να επαναλάβουν τη διαδικασία του σχήματος 7 για να συγχρονίσουν τα ωρολόγια τους. Βρίσκουν τον (Γ), ακίνητο ως προς αυτούς, μεταξύ τους, και σε ίση απόσταση από τους (A) και (B), ο

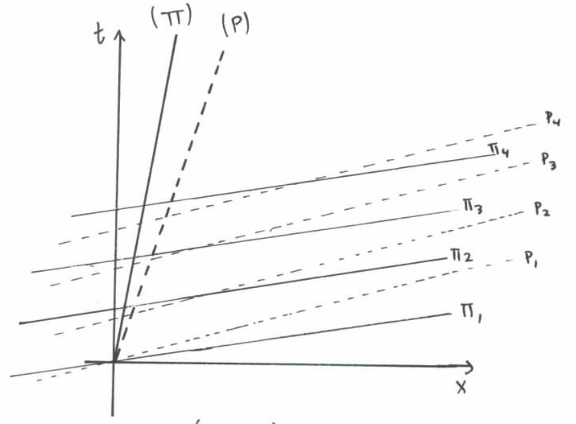


(Σχ. 8)

οποίος και στέλνει στο γεγονός K τα φωτεινά σήματα KA_1 και KB_1. Συνεπώς, ο (A) βρίσκει ότι τα γεγονότα A_1 και B_1 είναι ταυτόχρονα.

Θα μελετήσουμε τώρα τη γεωμετρία του σχήματος 8. Το ότι οι (A), (B) και (Γ) δεν κινούνται προς αλλήλους σημαίνει ότι οι AA_1, $\Gamma\Gamma_1$ και BB_1 είναι παράλληλες, ενώ το ότι ο (Γ) ισαπέχει από τους (A) και (B) σημαίνει ότι $A\Gamma = \Gamma B$, άρα και $A_1\Gamma_1 = \Gamma_1 B_1$. Τέλος το ότι η επικοινωνία έγινε με φωτεινά σήματα σημαίνει ότι οι KA_1 και KB_1 σχηματίζουν γωνίες 45° ως προς τους άξονες των x και t και συνεπώς το τρίγωνο $A_1 K B_1$ είναι ορθογώνιο. Άρα $K\Gamma_1 = \Gamma_1 A_1 = \Gamma_1 B_1$. Παίζοντας με τις διάφορες γωνίες του σχήματος είναι εύκολο να βρούμε ότι όλες τους εκφράζονται συναρτήσει της φ, της κλίσης της κοσμικής γραμμής του (A) ως προς τον άξονα των t. Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι η $A_1\Gamma_1 B_1$ σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα x του συστήματος S'.

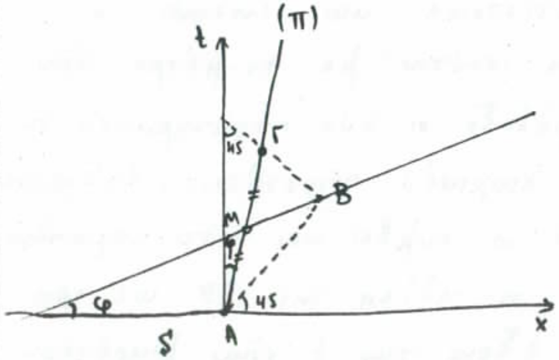
Για να προσδιορίσουμε τον χώρο όπως τον αισθάνεται ο (A) τη χρονική στιγμή A_1 θα πρέπει να επαναλάβουμε την προηγούμενη κατασκευή για διάφορους άλλους παρατηρητές ακίνητους ως προς τον (A) που βρίσκονται κοντύτερα ή μακρύτερα απ' ότι ο (B) από τον (A) και φυσικά να διαλέγουμε και κατάλληλους παρατηρητές "(Γ)", που να ισαπέχουν από τους δύο προηγούμενους. Εφόσον η κλίση του (A) ως προς τον άξονα των t διατηρείται σταθερή – που αυτή και μόνον προσδιορίζει τη διεύθυνση όλων των γεγονότων – θα βρούμε κι άλλα γεγονότα του χωρόχρονου, όλα πάνω στην ευθεία $A_1\Gamma_1 B_1$, που ο παρατηρητής (A) προσδιορίζει ότι συμβαίνουν ταυτόχρονα με το γεγονός του A_1. Ο (A) λοιπόν διακηρύσσει ότι ο χώρος του τη χρονική στιγμή A_1 είναι το σύνολο των γεγονότων της ευθείας $A_1\Gamma_1 B_1$ του χωρόχρονου, που σχηματίζει γωνία φ ως προς τον άξονα x.



(Σx. 9)

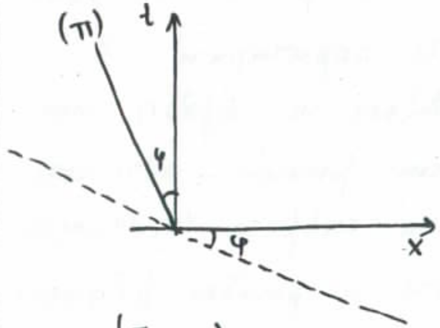
Το τελικό και σημαντικότατο συμπέρασμα είναι ότι ο αδρανειακός παρατηρητής (Π) που κινείται ως προς το σύστημα S' με ταχύτητα που καθορίζει την γωνία φ ($\tan\varphi = v/c$) βρίσκει ότι ο χώρος του απαρτίζεται από τα υποσύνολα του χωρόχρονου (ευθείες στον δισδιάστατο χωρόχρονο του Σx. 9) που σχηματίζουν ίση γωνία φ ως προς τον άξονα του χώρου. Είναι φανερό λοιπόν ότι ένας άλλος παρατηρητής (P), που κινείται ως προς το S' πιό γρήγορα από τον (Π), θα αισθάνεται διαφορετικά γεγονότα ως ταυτόχρονα και θα καθορίζει άλλα υποσύνολα του χωρόχρονου σαν τον χώρο του. Αντίθετα, ο παρατηρητής που είναι ακίνητος ως προς το S' θα αισθάνεται σαν χώρο του υποσύνολα παράλληλα προς τον άξονα των x, δηλαδή τον παλιό, καλό, και απλό χώρο της Νευτώνειας μηχανικής.

Το συμπέρασμα ότι διαφορετικοί παρατηρητές προσδιορίζουν διαφορετικούς χώρους σημαίνει ότι ο χώρος δεν είναι απόλυτος αλλά σχετικός, εξαρτώμενος από τον συγκεκριμένο παρατηρητή.



(Σχ. 10)

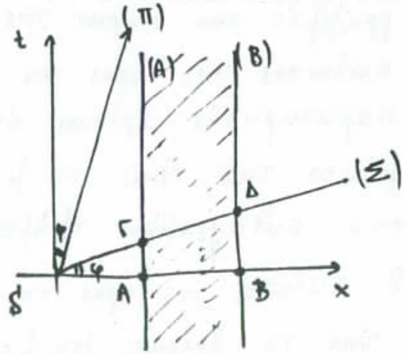
Το σχήμα 10 περιγράφει ένα λίγο διαφορετικό συλλογισμό για τον προσδιορισμό του χώρου του κινούμενου ως προς το S παρατηρητή (Π). Στο γεγονός Α στέλνει ένα φωτεινό σήμα που ανακλάται στο Β και γυρίζει στον (Π) στο Γ. Εάν Μ είναι το μέσον της ΑΓ, ο (Π) θεωρεί ότι τα Μ και Β είναι ταυτόχρονα. Εύκολα πάλι προσδιορίζεται ότι η κλίση της ΜΒ (τον χώρου του (Π) τη χρονική στιγμή Μ) ως προς τον άξονα των x είναι πάλι φ.



(Σχ. 11)

Τέλος σημειώνουμε ότι ο παρατηρητής (Π) του σχήματος 11, που κινείται προς τα αρνητικά του x, αισθάνεται σαν χώρο τον διευθύνσεις που έχουν κλίση −φ ως προς τον άξονα των x.

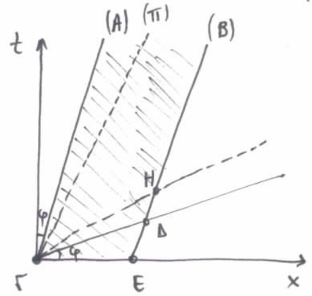
5. Το μήκος δεν είναι απόλυτο.



(Σχ. 12)

Θεωρούμε μιά ράβδο που στο διάγραμμα του σχήματος 12 παριστάνεται από τη δισδιάστατη γραμμοσκιασμένη επιφάνεια. (Α) και (Β) είναι οι κοσμικές γραμμές της αρχής και του τέλους της αντίστοιχα. Η ράβδος είναι ακίνητη στο σύστημα S. Ένας παρατηρητής επί της ράβδου (συνεπώς ακίνητος ως προς το S) έχει κοσμική γραμμή παράλληλη προς τις (Α) και (Β), αισθάνεται ως χώρο διευθύνσεις παράλληλες προς τον άξονα των x, και βρίσκει ότι το μήκος της ράβδου είναι ίσο με το μέτρο του διαστήματος ΑΒ. Απεναντίας, ένας κινούμενος ως προς το S (και τη ράβδο) παρατηρητής (Π) αισθάνεται σαν χώρο κατά τη διεύθυνση (Σ), βρίσκει ότι τα Γ και Δ είναι δύο ταυτόχρονα γεγονότα στα δύο άκρα της ράβδου, και διακηρύσσει ότι το μήκος της ράβδου είναι το μέτρο του διαστήματος ΓΔ. Προφανώς, οι δύο παρατηρητές, που βρίσκονται σε σχετική κίνηση, βρίσκουν το μήκος της ράβδου διαφορετικό.

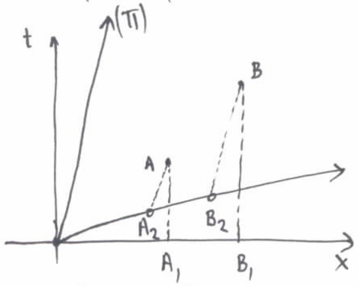
Ας υποθέσουμε τώρα ότι η ράβδος κινείται ως προς το S (Σχήμα 13). (Α) και (Β)



(Σχ. 13)

είναι πάλι οι κοσμικές γραμμές των άκρων της. Ο ακίνητος ως προς τη ράβδο παρατηρητής βρίσκει ότι το μήκος της είναι το μέτρο του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ. Ο ακίνητος ως προς το σύστημα παρατηρητής το μήκος της το βρίσκει ίσο με το μέτρο του ΓΕ και ο παρατηρητής (Π), που κινείται ακόμη πιό γρήγορα κι από τη ράβδο ως προς το Σ το βρίσκει ίσο προς το μέτρο του ΓΗ. Δεν είναι καθόλου παράδοξο ότι τα μήκη διαφέρουν. Θα ήταν παράδοξο αν και οι τρείς παρατηρητές έβρισκαν το ίδιο μήκος!

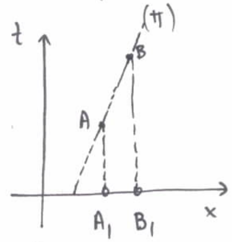
Θα καταπιαστούμε τώρα μ' ένα λίγο διαφορετικό πρόβλημα. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε τη χωρική απόσταση μεταξύ των γεγονότων Α και Β του σχήματος 14.



(Σχ. 14)

Ο ακίνητος ως προς το σύστημα παρατηρητής διαπιστώνει ότι τα Α και Β συνέβησαν στα ίδια σημεία του χώρου με τα A_1 και B_1 αντίστοιχα. Συνεπώς, η χωρική απόσταση μεταξύ των Α και Β ισούται με το μέτρο του τμήματος A_1B_1. Ο κινούμενος παρατηρητής (Π) από την άλλη μεριά βρίσκει ότι τα Α και Β

συνέβησαν στα ίδια σημεία του χώρου με τα γεγονότα A_2 και B_2 αντίστοιχα και συνεπώς η χωρική τους απόσταση ισούται με το μέτρο του A_2B_2. Θα ήταν παράδοξο οι δύο παρατηρητές να έβρισκαν τις ίδιες χωρικές αποστάσεις. Απ' εναντίας,



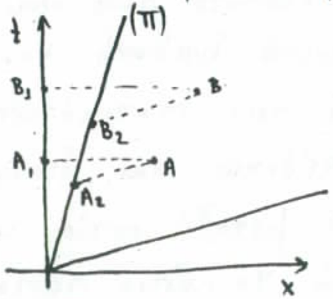
(Σχ. 15)

μπορεί να συμβεί και κάτι παραπάνω. Όταν η κλίση της ΑΒ ως προς τον άξονα των t είναι μικρότερη των 45° (δηλαδή όταν τα Α και Β έχουν χρονοειδή συσχέτιση), μπορούμε να βρούμε έναν αδρανειακό παρατηρητή, τον (Π) του Σχήματος 15, ο οποίος επιμένει (και έχει και δίκαιο!) ότι τα Α και Β συμβαίνουν στο ίδιο σημείο του χώρου!

Θα τελειώσουμε με μία παρατήρηση. Στη παράγραφο αυτή θέλουμε μόνο να πείσουμε ότι τα μήκη διαφέρουν από παρατηρητή σε παρατηρητή. Ο αναγνώστης να μην προσπαθήσει να βγάλει και ποσοτικές σχέσεις μεταξύ των μηκών — ούτε καν σχέσεις ανισότητας — από τα σχήματα 12, 13 και 14. Απλώς εδώ θα αναφέρουμε ότι οι μονάδες μέτρησης στις διάφορες διευθύνσεις είναι διαφορετικές. Τις ποσοτικές αυτές σχέσεις θα τις αποδείξουμε αργότερα, στην ενότητα 9.

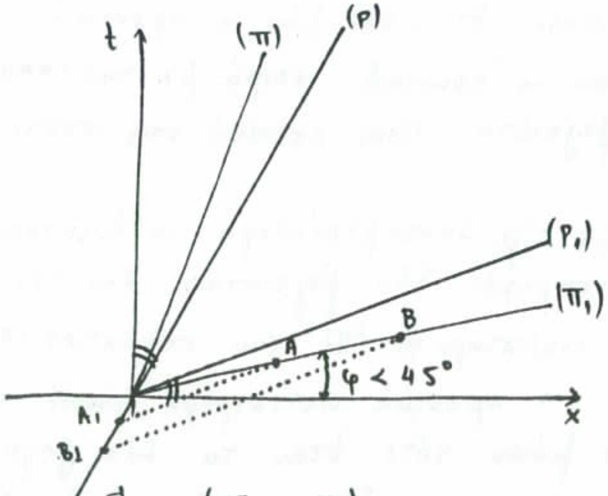
6. Ο χρόνος δεν είναι απόλυτος

Θεωρούμε τα γεγονότα Α και Β του σχήματος 16. Πόσο απέχουν χρονικά μεταξύ τους; Ο παρατηρητής του συστήματος S' θεωρεί ότι τα Α και Β είναι ταυτόχρονα με τα γεγονότα A_1 και B_1 αντίστοιχα και συνεπώς βρίσκει ότι η χρονική διάρκεια μεταξύ των Α και Β ισούται με το μέτρο του A_1B_1.



S' (Σχ. 16)

Ο παρατηρητής (Π) απεναντίας βρίσκει ότι τα Α και Β είναι ταυτόχρονα με τα γεγονότα A_2 και B_2 αντίστοιχα και κατ' αυτόν η χρονική διάρκεια μεταξύ των Α και Β ισούται με το μέτρο του A_2B_2. Δεν παραξενευόμαστε καθόλου που οι δύο παρατηρητές βρίσκουν διαφορετικά αποτελέσματα. Συνεπώς, η χρονική διάρκεια μεταξύ δύο γεγονότων εξαρτάται από τον παρατηρητή που κάνει τη μέτρηση, δηλαδή και ο χρόνος δεν είναι απόλυτος στη σχετικότητα. Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη ενότητα, αποφεύγουμε να συγκρίνουμε τις δύο χρονικές διάρκειες (A_1B_1) και (A_2B_2) γιατί η μονάδα μέτρησης του χρόνου δεν είναι η ίδια για τους δύο παρατηρητές.



S (Σχ. 17)

Θεωρούμε τώρα τα γεγονότα Α και Β του σχήματος 17, που βρίσκονται σε χωροειδή συσχέτιση (η γωνία φ μεταξύ της ΑΒ και του άξονα των x είναι μικρότερη των 45°). Προφανώς κάθε παρατηρητής ακίνητος ως προς το σύστημα S βλέπει ότι το Α προηγείται του Β χρονικά. Τι βλέπει ο παρατηρητής (Π) που κινείται με τέτοια ταχύτητα ως προς το S ώστε η κοσμική του γραμμή να σχηματίζει με τον άξονα των t γωνία ίση με τη γωνία φ που σχηματίζει η ΑΒ με τον άξονα των x; Προφανώς βλέπει ότι τα Α και Β συμβαίνουν ταυτόχρονα, σε διαφορετικά όμως σημεία του χώρου. Και τι αισθάνεται ο (Ρ) που κινείται πιό γρήγορα κι από τον (Π) ως προς το S; Αυτός βρίσκει ότι τα Α και Β συμβαίνουν ταυτόχρονα με τα γεγονότα A_1 και B_1 αντίστοιχα της κοσμικής του γραμμής και συνεπώς επιμένει ότι το γεγονός Β προηγείται χρονικά του γεγονότος Α!

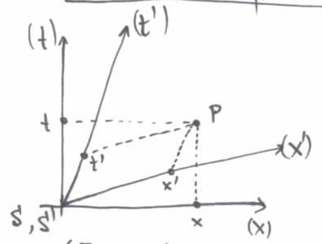
Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι, όχι μόνο η χρονική διάρκεια, αλλά και η χρονική σειρά με την οποία συμβαίνουν δύο γεγονότα είναι σχετική στη σχετικότητα!

Θα συζητήσουμε λίγο λεπτομερέστερα τη δυνατότητα χρονικής αντιστροφής δύο γεγονότων. Από τον προσδιορισμό του παρατηρητή (Π) του σχήματος 17 είναι φανερό ότι η χρονική αντιστροφή μπορεί να συμβεί τότε και μόνον τότε όταν τα δύο γεγονότα βρίσκονται σε χωροειδή συσχέτιση. Ακριβώς αυτή όμως είναι και η περίπτωση που εξετάσαμε στη σελίδα 12 (σχήμα 6) και διαπιστώσαμε ότι δεν μπορεί να υπάρχει καμμία σχέση αιτιοκρατικής εξάρτησης μεταξύ των γεγονότων Α και Β. Έτσι, π.χ., δεν είναι δυνατόν το Α να είναι το αίτιο που προκάλεσε το γεγονός Β. Αυτό θα ήταν πράγματι παράλογο γιατί τότε θα βρίσκαμε ότι για ορισμένους παρατηρητές το αποτέλεσμα προηγείται χρονολογικά και του αιτίου του. Ευτυχώς συμβαίνει το αντίθετο. Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι όταν δύο γεγονότα Α και Β βρίσκονται σε χρονοειδή συσχέτιση με το Β μέσα στην περιοχή επηρεασμού του Α (οπότε το Α έχει εν γένει επηρεάσει το γεγονός Β) τότε όλοι οι αδρανειακοί παρατηρητές (και σαν αδρανειακοί θεωρούνται μόνον όσοι κινούνται με

ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός) διαπιστώνουν ότι το Α προηγείται χρονολογικά του γεγονότος Β.

Το συμπέρασμα από την ενότητα αυτή είναι ότι αν και ο χρόνος και η χρονική διαδοχή δεν είναι απόλυτες έννοιες στη θεωρία της σχετικότητας, παρά ταύτα η σχετικότητα σέβεται και διατηρεί τη χρονολογική σχέση διαδοχής μεταξύ αιτίου και αποτελέσματος, ότι δηλαδή το αίτιο πάντοτε (και για όλους) προηγείται του αποτελέσματος.

7. Μετασχηματισμοί Lorentz.



(Σχ. 18).

Θεωρούμε το γεγονός P του σχήματος 18. Για να βρούμε τις συντεταγμένες του στο σύστημα S φέρνουμε από το P παράλληλες προς τους άξονες του χώρου και του χρόνου. Το γεγονός P προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες του (x,t).

Το ίδιο γεγονός P θέλουμε τώρα να το προσδιορίσουμε με συντεταγμένες στο αδρανειακό σύστημα S' ενός παρατηρητή που κινείται ως προς το S με ταχύτητα v ($\tan\varphi = v/c$). Φέρνουμε πάλι από το P παράλληλες προς τους άξονες του χώρου και του χρόνου και οι τομές τους με τους άξονες x', t' δίνουν τις συντεταγμένες (x', t') του P στο καινούργιο αδρανειακό σύστημα.

Οι μετασχηματισμοί Lorentz δίνουν τις σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων κάποιου γεγονότος σε δύο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα. Για κάθε γεγονός αρκεί να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες του σ' ένα μόνο σύστημα και κατόπιν, με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Lorentz, μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες του σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα. Το πρόγραμμα, ή ο κώδικας, που κάνει αυτή τη δουλειά είναι οι μετασχηματισμοί Lorentz.

Η μέθοδος εύρεσης των μετασχηματισμών Lorentz εκτίθεται σε κάθε βιβλίο ειδικής θεωρίας σχετικότητας. Εδώ απλώς θα τους αναφέρουμε. Είναι οι

$$(1)\left\{\begin{array}{l} x'=\gamma(x-vt)\\ y'=y\\ z'=z\\ t'=\gamma\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow (2)\left\{\begin{array}{l} x=\gamma(x'+vt')\\ y=y'\\ z=z'\\ t=\gamma\left(t'+\frac{vx'}{c^2}\right)\end{array}\right., \quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

όταν το S' κινείται ως προς το S με ταχύτητα v κατά τη διεύθυνση x. Σημειώστε ότι οι (2) προκύπτουν από τις (1) λύνοντάς τες ως προς x, y, z, t και ότι το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν θέσουμε στις σχέσεις (1) όπου v το −v. Αυτή η πράξη αποτελεί έναν έλεγχο αυτοσυμβιβαστότητας των μετασχηματισμών Lorentz.

8. Μονάδες μήκους και χρόνου.

Θεωρούμε δύο γεγονότα A και B με συντεταγμένες (x_i, y_i, z_i, t_i), $i=1,2$ στο σύστημα S. Σ' ένα άλλο σύστημα S', που κινείται ως προς το S με ταχύτητα v κατά τον άξονα των x, οι συντεταγμένες τους είναι (x_i', y_i', z_i', t_i'), όπου οι τονούμενες συντεταγμένες εκφράζονται συναρτήσει των άτονων με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Lorentz. Χρησιμοποιώντας τους βρίσκουμε ότι $x_2'-x_1'=\gamma\left[(x_2-x_1)-v(t_2-t_1)\right]$,

$y_2'-y_1'=y_2-y_1$, $z_2'-z_1'=z_2-z_1$ και

$t_2'-t_1'=\gamma\left[(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)\right]$, και μετά από πράξεις ότι

$$\left\{\begin{array}{l}(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2-c^2(t_2'-t_1')^2=\\ \quad=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2\end{array}\right\} \quad (3)$$

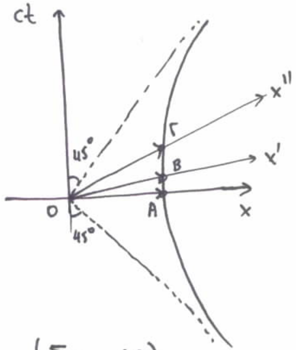
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, αν και δύο τυχαίοι αδρανειακοί παρατηρητές (ισοδύναμα, δύο τυχαία συστήματα συντεταγμένων) βρίσκουν διαφορετική τη χωρική $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ και τη χρονική t_2-t_1 απόσταση μεταξύ δύο τυχαίων γεγονότων, βρίσκουν την ίδια χωροχρονική (τετραδιάστατη) απόσταση

$$s^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=$$
$$=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2-c^2(\Delta t)^2 \quad (4)$$

μεταξύ των γεγονότων αυτών. Η ποσότητα (4) έχει διαστάσεις (μήκος)^2, αλλά δεν είναι πραγματική απόσταση, αφού το τετράγωνό της μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν. Η ποσότητα (4) είναι η θεμελιώδης αναλλοίωτη ποσότητα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας [Μιά απλή γενίκευση της (4) είναι η θεμελιώδης αναλλοίωτη της γενικής θεωρίας της σχετικότητας]. Όταν το ένα από τα δύο γεγονότα είναι η κοινή αρχή των συντεταγμένων των δύο συστημάτων η αναλλοίωτη γράφεται και

$$s^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = (x')^2+(y')^2+(z')^2-(ct')^2. \qquad (5)$$

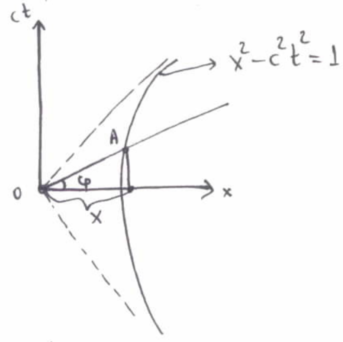
Θα χρησιμοποιήσουμε την αναλλοίωτη (4) για να προσδιορίσουμε τις μονάδες χώρου και χρόνου στα διαγράμματα χωρόχρονου διάφορων αδρανειακών παρατηρητών. Για απλότητα χρησιμοποιούμε διδιάστατους χωρόχρονους, οπότε $y = z = 0$.



(Σx. 19)

Στο σχήμα 19 θεωρούμε την υπερβολή $x^2-c^2t^2=1=(x')^2-(ct')^2=(x'')^2-(ct'')^2=\dots$ Για $t=t'=t''=0$ παίρνουμε $x=x'=x''=1$. Συνεπώς, τα σημεία τομής των αξόνων των χώρων των διάφορων

παρατηρητών με την υπερβολή προσδιορίζουν τις μονάδες μήκους των παρατηρητών αυτών: είναι οι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ για τους τρείς παρατηρητές του σχήματος 19. Βλέπουμε ότι η μονάδα μήκους αυξάνει όσο αυξάνει η ταχύτητα του παρατηρητή ($\tan\varphi = \frac{v}{c}$) και γίνεται άπειρη για κίνηση με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός. Για παράδειγμα, τα φωτόνια δεν αισθάνονται ότι κινούνται γιατί θα πρέπει να διανύσουν άπειρη απόσταση πρίν αντιληφθούν ότι μετακινήθηκαν κατά μία μονάδα μήκους.

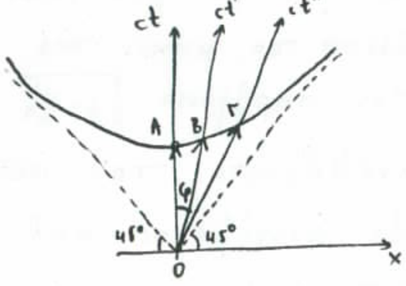


(Σx. 20)

Η εξίσωση της ευθείας ΟΑ στο σχήμα 20 είναι $ct = x\tan\varphi$. Αντικατάσταση στην εξίσωση της υπερβολής δίνει $x = \cos\phi/\sqrt{\cos 2\phi}$ και εφόσον $x=(OA)\cos\phi$ βρίσκουμε ότι

$$OA = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\phi}}. \qquad (6)$$

Η σχέση (6) δίνει τη μονάδα μήκους του τυχαίου παρατηρητή σαν συνάρτηση της γωνίας φ. Χρησιμοποιώντας την $\tan\varphi = v/c$, η προηγούμενη σχέση γράφεται και $OA = \sqrt{\frac{1+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}}$, που για $v \to c$ δίνει $OA \to \infty$, δηλαδή την άπειρη μονάδα μήκους των φωτονίων.



(Σχ. 21.)

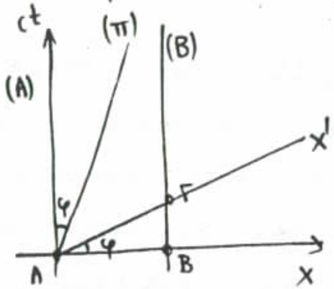
Για να προσδιορίσουμε τη μονάδα χρόνου των διάφορων παρατηρητών θεωρούμε την υπερβολή $x^2 - c^2t^2 = -1 = (x')^2 - (ct')^2 = (x'')^2 - (ct'')^2$, που για $x = x' = x'' = 0$ δίνει $ct = ct' = ct'' = 1$. Για τους διάφορους παρατηρητές του σχήματος 21 λοιπόν οι μονάδες χρόνου (που μπορούν να μετρηθούν ισοδύναμα και με μήκος μέσω της αντιστοιχίας $t \leftrightarrow ct$) είναι οι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ. Προφανώς, η μονάδα χρόνου για κίνηση με την ταχύτητα του φωτός (οπότε η κοσμική γραμμή είναι ασύμπτωτη της υπερβολής) είναι άπειρη και γι' αυτό τα φωτόνια δεν αισθάνονται το πέρασμα του χρόνου: Τα φωτόνια δεν γεράζουν! Όπως και προηγουμένως, εύκολα βρίσκουμε ότι

$$ct_1' = OB = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\phi}} = \sqrt{\frac{1+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}}.$$

9. Συστολή του μήκους

Στην ενότητα αυτή θα προσδιορίσουμε τις ποσοτικές σχέσεις μεταβολής του μήκους με την ταχύτητα.

Θεωρούμε μια ράβδο και παριστάνουμε με l_0 το μήκος της, όπως αυτό το μετρά ο παρατηρητής που είναι ακίνητος ως προς τη ράβδο: Ισοδύναμα, l_0 είναι το μήκος της ράβδου όπως αυτό μετριέται σ' ένα σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο η ράβδος είναι ακίνητη. Θα υπολογίσουμε το μήκος l' που βρίσκει για την ίδια ράβδο ένας παρατηρητής που κινείται ως προς αυτήν με ταχύτητα v.



(Σχ. 22)

Θεωρούμε πρώτα την ράβδο ακίνητη και τον παρατηρητή κινούμενο. Το l_0 είναι το μέτρο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και επειδή η μονάδα μήκους κατά τη διεύθυνση x είναι 1 έχουμε $(AB) = l_0$.

Ο παρατηρητής (Π) απεναντίας (Σχήμα 22) βρίσκει ότι το μήκος της ράβδου είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ (αφού τα Α και Γ είναι δύο ταυτόχρονα γεγονότα στα δύο άκρα της ράβδου) και επειδή η μονάδα μήκους κατά τον άξονα x' είναι $1/\sqrt{\cos 2\phi}$ βρίσκει ότι

$l' = (A\Gamma)\big/\tfrac{1}{\sqrt{\cos 2\phi}} = (A\Gamma)\sqrt{\cos 2\phi}$. Αλλά $AB = (A\Gamma)\cos\phi$.

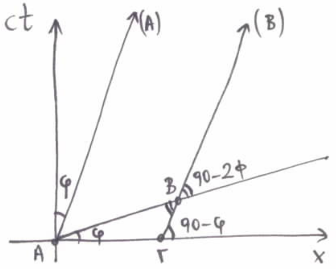
Συνδυασμός των παραπάνω σχέσεων δίνει ότι

$$l' = l_0 \frac{\sqrt{\cos 2\phi}}{\cos\phi}, \qquad (7)$$

ή, επειδή $\frac{\sqrt{\cos 2\phi}}{\cos\phi} = \sqrt{\frac{\cos^2\phi - \sin^2\phi}{\cos^2\phi}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, ότι

$$l' = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{l_0}{\gamma}. \qquad (8)$$

Αν και στο σχήμα 22 φαίνεται ότι $A\Gamma > AB$, στη σωστή γεωμετρία του χωρόχρονου το μέτρο του ΑΓ είναι πάντα μικρότερο από το μέτρο του ΑΒ.



(Σx. 23)

Θεωρούμε τώρα (σχήμα 23) τη ράβδο να κινείται και τον παρατηρητή ακίνητο. Το μήκος της l_0 είναι το μέτρο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, δηλαδή

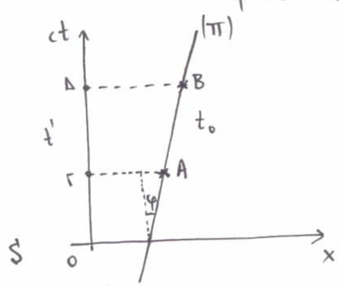
$$l_0 = (AB)\big/\tfrac{1}{\sqrt{\cos 2\phi}} = (AB)\sqrt{\cos 2\phi},$$

ενώ ο ακίνητος παρατηρητής βρίσκει γι' αυτήν ότι $l' = \frac{A\Gamma}{1} = (A\Gamma)$. Ο νόμος των ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΓΒ δίνει $\frac{A\Gamma}{\sin(90-2\phi)} = \frac{AB}{\eta\mu(90-\phi)}$, δηλαδή ότι $\frac{A\Gamma}{\cos 2\phi} = \frac{AB}{\cos\phi}$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε πάλι ότι $l' = l_0\frac{\sqrt{\cos 2\phi}}{\cos\phi}$, όπως και προηγουμένως.

Το συμπέρασμα είναι ότι κάθε παρατηρητής, που βρίσκεται σε σχετική κίνηση ως προς μία ράβδο (με σχετική ταχύτητα v) βλέπει το μήκος της να έχει ελαττωθεί κατά τον παράγοντα $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ανεξάρτητο του ποιος θεωρείται ακίνητος και ποιος κινούμενος από τη ράβδο και τον παρατηρητή.

10. Διαστολή του χρόνου.

Θεωρούμε δύο γεγονότα Α και Β σε χρονοειδή συσχέτιση. Υπάρχει τότε ένας μοναδικός προτιμητέος αδρανειακός παρατηρητής (Π) που βρίσκει ότι τα Α και Β συνέβησαν πάνω στην κοσμική του γραμμή (δηλαδή στην άμεση γειτονιά του) και συνεπώς στο ίδιο σημείο του χώρου.



(Σx. 24)

Συμβολίζουμε με t_0 τη χρονική διάρκεια των Α και Β, όπως την μετρά ο προτιμητέος παρατηρητής. Το t_0 ισούται με το μέτρο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, δηλαδή

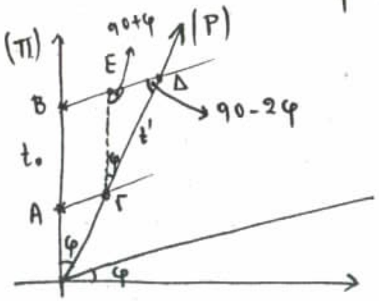
$$t_0 = (AB)\big/\tfrac{1}{\sqrt{\cos 2\phi}} = (AB)\sqrt{\cos 2\phi}.$$

Πόση βρίσκει τη χρονική διάρκεια των Α και Β ένας άλλος παρατηρητής που είναι ακίνητος ως προς το S (Σx. 24) (και συνεπώς κινείται ως προς τον Π); Ο δεύτερος παρατηρητής βρίσκει ότι τα γεγονότα Α και Β είναι ταυτόχρονα, αντίστοιχα, με τα γεγονότα Γ και Δ της κοσμικής του γραμμής και συνεπώς η χρονική τους διάρκεια είναι $t' =$ μέτρο του ΓΔ $=$ ΓΔ/1 $=$ (ΓΔ). Από τη σχέση (ΓΔ) = (ΑΒ) cos φ βρίσκουμε ότι

$$t' = t_0 \frac{\cos\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}} = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma t_0 , \quad (8)$$

δηλαδή ότι $t' > t_0$ (αν και στο σχήμα 24 φαίνεται ότι ΓΔ < ΑΒ).

Ο προτιμητέος αδρανειακός παρατηρητής (Π) του σχήματος 24 έχει κάθε δικαίωμα να θεωρήσει τον εαυτό του ακίνητο και να θεσπίσει το δικό του σύστημα συντεταγμένων. Στη διάταξη



(Σχ. 25)

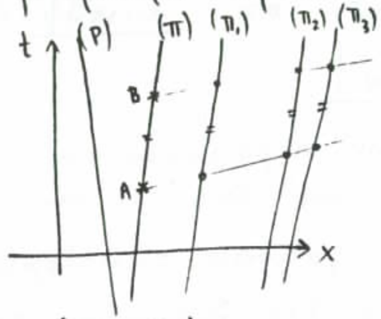
του σχήματος 25 έχουμε ότι $t_0 = (AB)/1 = (AB)$. Ο παρατηρητής (Ρ) που κινείται ως προς τον (Π) βλέπει ότι τα γεγονότα Α και Β είναι ταυτόχρονα με τα γεγονότα Γ και Δ, αντίστοιχα, της κοσμικής του γραμμής. Συνεπώς βρίσκει ότι $t' = (\Gamma\Delta) \big/ 1/\sqrt{\cos 2\phi} = (\Gamma\Delta)\sqrt{\cos 2\phi}$. Ο νόμος των ημιτόνων στο τρί-

γωνο ΓΕΔ δίνει $\frac{(\Gamma E)}{\sin(90-2\phi)} = \frac{(\Gamma\Delta)}{\sin(90+\phi)}$ ή $\frac{AB}{\cos 2\phi} = \frac{\Gamma\Delta}{\cos\phi}$, η οποία συνδυαζόμενη και με τις προηγούμενες σχέσεις δίνει ότι

$$t' = t_0 \frac{\cos\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}} = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma t_0 ,$$

δηλαδή την ίδια σχέση, όπως και προηγουμένως.

Συνεπώς, απ' όλους τους δυνατούς αδρανειακούς παρατηρητές, εκείνος που βλέπει ότι δύο γεγονότα έχουν στην άμεση γειτονιά του βρίσκει και τη μικρότερη χρονική απόσταση μεταξύ αυτών.



(Σχ. 26)

Ας υποθέσουμε ότι τα Α και Β είναι δύο διαδοχικά τικ και τακ ενός ωρολογιού που κουβαλά ο παρατηρητής (Π). Θεωρούμε και μερικούς άλλους αδρανειακούς παρατηρητές $(\Pi_1), (\Pi_2), (\Pi_3)$, όλους ακίνητους ως προς τον Π. Όλοι αυτοί βλέπουν το ωρολόγι να παραμένει ακίνητο και όλοι μετρούν την ίδια χρονική διάρκεια t_0 ανάμεσα στα Α και Β, που είναι η μία μονάδα χρόνου, $t_0 = 1$ (ας πούμε ένα δευτερόλεπτο).

Ο παρατηρητής (Ρ) του σχήματος 26 που κινείται ως προς τον (Π) βρίσκει ότι ανάμεσα στα δύο διαδοχικά τικ και τακ μεσολάβησε χρόνος μεγαλύτερος από τον $t_0=1$, δηλαδή περισσότερος από μία χρονική μονάδα. Φυσιολογικά λοιπόν θεωρεί ότι το ρολόι του (Π) πάει σιγά, ότι μένει πίσω. Φυσικά ο (Ρ) δεν έχει κανένα λόγο να δεχτεί ότι εκείνος κινείται. Απλώς θεωρεί τον εαυτό του ακίνητο και το ρολόι να κινείται ως προς αυτόν και διαπιστώνει ότι <u>κινούμενα ρολόγια μένουν πίσω!</u>

Θα τελειώσουμε με την παρατήρηση ότι όλα τα "παράδοξα" φαινόμενα της θεωρίας της σχετικότητας προκύπτουν και φαίνονται φυσιολογικότατα όταν τα παραστήσει κανείς στο διάγραμμα χωρόχρονου, τα μελετήσει και τα καταλάβει. Και όλα οφείλονται στο ότι η έννοια και η συναίσθηση του <u>ταυτόχρονου</u> δεν είναι απόλυτη στη σχετικότητα, αλλά διαφέρει από παρατηρητή σε παρατηρητή.