ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ *

Βασίλης Κ.Ξανθόπουλος
Φυσικό Τμήμα Πανεπιστημίου Κρήτης
Ηράκλειο Κρήτης .

Σκοπός της ομιλίας αυτής είναι να πείσει για την ύπαρξη μιάς πολύ στενής σχέσης μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής. Σ'ένα ακροατήριο κυρίως από Μαθηματικούς η ομιλία θα θεωρηθεί σαν προπαγάνδα για τη Φυσική. Η ίδια ομιλία όμως θα μπορούσε να γίνει και σ'ένα ακροατήριο Φυσικών,μόνο που τότε θα θεωρούνταν σαν προπαγάνδα για τα Μαθηματικά. Τέλος η ομιλία μπορεί να θεωρηθεί και σαν η απολογία κάποιου που ξεκίνησε από τα Μαθηματικά και κατέληξε στη Φυσική και που πιστεύει ότι δεν τα πρόδωσε και τόσο πολύ τα μαθηματικά,μιά που πολλές φορές αυτά δεν απέχουν πολύ από τη θεωρητική φυσική.

Είναι γνωστή η στενή σχέση της Φυσικής με το διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό και με τις διαφορικές εξισώσεις. Ο Newton ανέπτυξε το διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό, που του χρειαζόταν για την περιγραφή της κίνησης των σωμάτων.Π.χ. η παράγωγος συναρτήσεως εισήχθηκε από τον Newton για να περιγράψει την ταχύτητα ενός υλικού σημείου. Δεν θα ασχοληθούμε περισσότερο με την αναγκαιότητα της χρήσης του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού στη φυσική γιατί το θεωρούμε ένα αρκετά απλοϊκό παράδειγμα. Αντίθετα θα χρησιμοποιήσουμε παραδείγματα από διάφορους άλλους κλάδους των μαθηματικών-την Τοπολογία,τη διαφορική Γεωμετρία,την Άλγεβρα,την αλγεβρική τοπολογία και την Ανάλυση- για να καταδείξουμε ότι και τα "ανώτερα" ή "αφηρημένα" ή "καθαρά" μαθηματικά χρειάζονται και χρησιμοποιούνται πολύ στη θεωρητική Φυσική.

Το πρώτο παράδειγμα αναφέρεται στην Τοπολογία και συγκεκριμένα στους τοπολογικούς χώρους (που έχουν την ιδιότητα του) Hausdorff. Ένας τοπολογικός χώρος είναι χώρος Hausdorff εάν όταν δοθούν δύο οποιαδήποτε διαφορετικά του σημεία p και q υπάρχουν δύο περιο-

χές των p και q αντίστοιχα που δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
Η ιδιότητα του Hausdorff εκφράζει ότι η τοπολογία -που"χρησιμοποιεί τις ανοιχτές περιοχές των σημείων του χώρου για να τα διακρίνει" - έχει "αρκετά μεγάλη διακριτική ικανότητα" και "αρκετές και αρκετά μικρές ανοιχτές περιοχές" γύρω από κάθε σημείο, ώστε να μπορεί να ξεχωρίζει δύο οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία του τοπολογικού χώρου.

Η φυσική ιδέα που κρύβεται πίσω από την ιδιότητα Hausdorff είναι απλή. Στη φυσική τα σημεία ενός χώρου καθορίζονται από τις συντεταγμένες τους (συνήθως αποστάσεις,ταχύτητες, χρόνοι ,κ.λ.π.)που προσδιορίζονται με μετρήσεις.
Κάθε μέτρηση όμως συνοδεύεται κι από ορισμένα σφάλματα,που οφείλονται στην πεπερασμένη ακρίβεια των οργάνων μέτρησης.
Γι'αυτό, σε κάθε σημείο που προσδιορίζεται πειραματικά,σημειώνουμε και δυο κάθετα διαστήματα,τα διαστήματα λάθους (error bars) (Σχήμα 1). Η ιδέα είναι ότι η πραγματική τιμή της φυσικής ποσότητας που παρίσταται από το σημείο Γ είναι κάπου μέσα στην τετραγωνική περιοχή του σημείου με διαστάσεις τα διαστήματα λάθους στο σημείο αυτό (η γραμμοσκιασμένη περιοχή στο σχήμα 1).Π.χ.,μετά από μια μέτρηση που έδωσε τα σημεία Α,Β,Γ και Δ είμαστε σίγουροι ότι οι φυσικές ποσότητες που παρίστανται από τα σημεία Α,Β και Γ είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Απεναντίας, η παραπάνω μέτρηση δεν μπορεί να ξεχωρίσει τις ποσότητες που παρίστανται με τα σημεία Β και Δ μια πού, εφόσον οι αντίστοιχες περιοχές σφάλματός τους έχουν κοινά σημεία,τα σημεία Β και Δ μπορεί να παριστάνουν και την ίδια φυσική ποσότητα.

Στη θεωρητική φυσική θέλουμε τα μοντέλα μας να θεωρούν σαν ξεχωριστά σημεία μόνον εκείνα που κάποτε θα μπορούσαν να διακριθούν με τη βοήθεια μετρήσεων. Φυσικά,όσο προχωρεί η τεχνολογία και βελτιώνεται η ακρίβεια των οργάνων μέτρησης,οι περιοχές λάθους γύρω από κάθε σημείο μικραίνουν.Επειδή όμως τα λάθη των μετρήσεων ποτέ δεν θα είναι μηδέν, οι τοπολογικοί χώροι που χρησιμοποιούμε στη

../..

θεωρητική φυσική έχουν τοπολογία διάφορη από τη διακεκριμένη (discrete topology) και είναι πάντοτε χώροι του Hausdorff.

Το δεύτερο παράδειγμα πραγματεύεται την τοπολογική ιδιότητα της συνεκτικότητας. Θα αρχίσουμε με μια παραστατική περιγραφή της ιδιότητας αυτής, θα δώσουμε τις βασικές αρχικές ιδέες της αλγεβρικής τοπολογίας, και κατόπιν θα αναφέρουμε δύο εφαρμογές της συνεκτικότητας στη φυσική, στη μηχανική και στον ηλεκτρομαγνητισμό.

Η συνεκτικότητα εισήχθη στα μαθηματικά για να εκφράσει την ιδιότητα ότι ένας τοπολογικός χώρος "έχει τρύπες" ή "δεν έχει τρύπες". Π.χ. η κυλινδρική επιφάνεια $S^1 x R$ και η σαμπρέλλα (torus) $S^1 x S^1$ έχουν τρύπες ενώ το επίπεδο R^2 και η σφαίρα S^2 δεν έχουν. Μαθηματικά η τοπολογική διαφορά μεταξύ των δύο παραπάνω κατηγοριών τοπολογικών χώρων εκφράζεται ως εξής: Στο επίπεδο και στη σφαίρα S^2 κάθε κλειστή καμπύλη που είναι ομοιομορφική, δηλαδή τοπολογικά ισοδύναμη, με τη μονοδιάστατη σφαίρα S^1, μπορεί να συρρικνωθεί (μετασχηματιζόμενη συνεχώς) σ'ένα σημείο. Αντίθετα στους χώρους S^1 x R και $S^1 x S^1$ υπάρχουν κλειστές καμπύλες που δεν μπορούν να συρρικνωθούν σε σημείο. Οι χώροι χωρίς τρύπες αναφέρονται σαν απλά συνεκτικοί (simply connected) ενώ οι χώροι με τρύπες λέγονται πολλαπλά συνεκτικοί (multiply connected) τοπολογικοί χώροι.

Ας φαντασθούμε και τον χώρο R^3 από τον οποίο έχει αφαιρεθεί ένα σημείο ή ένα οποιοδήποτε συμπαγές σύνολο. Προφανώς ο χώρος αυτός "έχει τρύπα" , αν και κάθε κλειστή του καμπύλη είναι συρρικνώσιμη σε σημείο. Εκείνο που διαφοροποιεί τον χώρο αυτό από τον Ευκλείδειο χώρο R^3 (τον πλήρη) είναι το γεγονός ότι σ'αυτόν υπάρχουν διδιάστατες τοπολογικές σφαίρες S^2 που μπορούν και άλλες σφαίρες S^2 που δεν μπορούν να συρρικνωθούν σ'ένα σημείο· απεναντίας στον R^3 όλες οι σφαίρες S^2 είναι συρρικνώσιμες σε σημεία.
Για να εξακριβώσουμε λοιπόν αν ένας τοπολογικός χώρος έχει τρύπες ή όχι θα πρέπει να εξετάσουμε αν όλες οι τοπολογικές σφαίρες

S^n , n=1,2,3...., του χώρου αυτού είναι συρρικνώσιμες σε σημείο. Οι παραπάνω σκέψεις εκφράζουν παραστατικά τις βασικές ιδέες της έννοιας της συνεκτικότητας στην τοπολογία.

Πώς υπεισέρχεται η συνεκτικότητα των χώρων στη φυσική; Στη μηχανική και τον ηλεκτρομαγνητισμό μελετάμε διάφορα πεδία δυνάμεων που παρίστανται με διανυσματικά πεδία, ας πούμε $\vec{F}$. Όταν όμως ένα πεδίο δυνάμεων είναι συντηρούμενο (conservative) - όταν δηλαδή η στροφή του είναι μηδέν, $\nabla \times \vec{F} = 0$ – είναι συνηθισμένο να ορίζουμε τη συνάρτηση δυναμικού $\vec{F} = - \nabla V$.
Το δυναμικό V ,σαν βαθμωτό πεδίο, είναι προτιμητέο από το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$. Ο προσεκτικός φυσικός όμως γνωρίζει ότι ένα συντηρούμενο διανυσματικό πεδίο μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια μιας συνάρτησης δυναμικού μόνον όταν ο χώρος είναι απλά συνεκτικός. Εφόσον μάλιστα είναι αρκετά συνηθισμένο στη μηχανική ο χώρος μορφής ή ο χώρος των φάσεων ενός συστήματος να έχει μη τετριμένη τοπολογία (π.χ. όταν υπάρχουν δεσμοί (constaints) της κίνησης), οφείλει κανείς να εξετάσει αν χώρος είναι απλά ή πολλαπλά συνεκτικός πριν εισάγει δυναμικά.

Το τρίτο παράδειγμα αναφέρεται πάλι στην έννοια της συνεκτικότητας και συνδυάζει τις βασικές αρχές της αλγεβρικής τοπολογίας με τα ηλεκτρικά φορτία στον ηλεκτρομαγνητισμό.

Το θεμελιώδες πρόβλημα της αλγεβρικής τοπολογίας είναι να διαπιστώσει με αλγεβρικές μεθόδους αν ένας τοπολογικός χώρος έχει τρύπες ή όχι. Η αλγεβρική τοπολογία, και ειδικότερα ο κλάδος της που λέγεται ομοτοπία (homotopy), στηρίζεται στην ιδέα που περιγράφουμε αμέσως παρακάτω:

Σ'ένα τοπολογικό χώρο θεωρούμε σαν ισοδύναμες δύο κλειστές καμπύλες όταν η μια μπορεί να συρρικνωθεί στην άλλη (μετασχηματιζόμενη συνεχώς). Προφανώς, σ'έναν απλά συνεκτικό χώρο όλες οι κλειστές του καμπύλες είναι μεταξύ τους ισοδύναμες και συνεπώς ο χώρος έχει μια και μοναδική κλάση ισοδυναμίας κλειστών καμπυλών.

Ας μελετήσουμε όμως το επίπεδο R^2 από το οποίο έχει αφαιρεθεί ένα σημείο ,ή ένα οποιοδήποτε συμπαγές (= κλειστό και περατωμένο) σύνολο (και το οποίο τοπολογικά είναι ομοιομορφικό με την κυλινδρική επιφάνεια S x R).Στο χώρο αυτό υπάρχουν οι παρακάτω κλάσεις ισοδυναμίας κλειστών καμπυλών: Οι καμπύλες που μπορούν να συρρικνωθούν σε σημείο (0-καμπύλες), οι καμπύλες που δεν είναι συρρικνώσιμες αλλά κάνουν μία περιστροφή γύρω από την τρύπα κατά την αριστερόστροφη φορά (καμπύλες + 1), οι καμπύλες που κάνουν δύο περιστροφές γύρω από την τρύπα κατά την αριστερόστροφη φορά (καμπύλες+ 2), ..., οι καμπύλες που κάνουν n περιστροφές γύρω από την τρύπα κατά τη δεξιόστροφη φορά (καμπύλες - n), κ.λ.π. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι στο παραπάνω παράδειγμα υπάρχει μια ένα -προς ένα αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των κλάσεων ισοδυναμίας κλειστών καμπυλών και του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Επι πλέον παρατηρούμε ότι μπορούμε να δώσουμε μια αλγεβρική δομή στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας κλειστών καμπυλών: Ορίζουμε το γινόμενο δύο κλειστών καμπυλών γ_1και γ_2 την κλειστή καμπύλη που απαρτίζεται από τη σύνθεση των καμπυλών γ_1 και γ_2 (δηλαδή την καμπύλη με γραφική παράσταση την καμπύλη της γ_1 ακολουθούμενη από τη γραφική παράσταση της γ_2).

Η πράξη αυτή είναι καλά ορισμένη σαν πράξη στις κλάσεις ισοδυναμίας των κλειστών καμπυλών που μελετάμε και είναι αντιμεταθετική.

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας αποκτά λοιπόν τη δομή μιας ομάδας ισομορφικής προς την προσθετική ομάδα των ακεραίων αριθμών.

Οι καμπύλες -0 αποτελούν το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας, οι καμπύλες - n είναι οι αντίστροφες των καμπυλών +n , και το γινόμενο μιας καμπύλης +m επί μια καμπύλη + n είναι μια καμπύλη +(m+n).

Η αντιμεταθετική ομάδα που μόλις κατασκευάσαμε αναφέρεται σαν η πρώτη ομάδα ομοτοπίας (first homotopy group) της κυλινδρικής επι-

../..

φάνειας $S^1 \times \mathbb{R}$ (ή του επιπέδου R^2 από το οποίο αφαιρέθηκε ένα σημείο) και συμβολίζεται με Π_1 .

Η προηγούμενη ανάλυση δείχνει ότι

$$\Pi_1 (S^1 x \ R) = Z .$$

Είναι προφανές ότι επανάληψη της παραπάνω κατασκευής σ'ένα χώρο τοπολογικά πιο πολύπλοκο-π.χ. στο επίπεδο R^2 από το οποίο έχουν αφαιρεθεί δύο σημεία- οδηγεί σε μια πιο μεγάλη και αρκετά πιο πολύπλοκη πρώτη ομάδα ομοτοπίας. Απ'εναντίας αν ο χώρος είναι απλά συνεκτικός, η πρώτη ομάδα ομοτοπίας αποτελείται από ένα μόνον στοιχείο, το μοναδιαίο στοιχείο της ομάδας.

Η ομοτοπία λοιπόν περιγράφει,με καθαρά αλγεβρικά μέσα ,την τοπολογική πολυπλοκότητα ενός χώρου.

Το παράδειγμα της σελίδας 3 πείθει ότι σε χώρους με διάσταση μεγαλύτερη από δύο η πρώτη ομάδα ομοτοπίας δεν επαρκεί για να ανακαλύψει και περιγράψει την τοπολογική πολυπλοκότητα ενός χώρου.

Για τον λόγο αυτό ορίζονται και οι ομάδες ομοτοπίας ανωτέρων τάξεων. Συγκεκριμένα η n-στη ομάδα ομοτοπίας Π_n ενός τοπολογικού χώρου ορίζεται παρόμοια με την πρώτη ομάδα ομοτοπίας και με μόνη διαφορά ότι αντί για τις κλειστές καμπύλες (που είναι μονοδιάστατες σφαίρες S^1)χρησιμοποιούμε τώρα τις κλάσεις ισοδυναμίας των n -διαστάσεων σφαιρών S^n . Το θεμελιώδες θεώρημα της ομοτοπίας ουσιαστικά εξασφαλίζει ότι η γνώση όλων των ομάδων ομοτοπίας Π_n ενός τοπολογικού χώρου αρκεί για να προσδιορίσει την τοπολογική δομή του χώρου.

Μ'αυτά τελειώνουμε την περιγραφή των ιδεών της ομοτοπίας και της αλγεβρικής τοπολογίας.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε μια εφαρμογή της ομοτοπίας στον ηλεκτρομαγνητισμό: Η δεύτερη ομάδα ομοτοπίας ενός χώρου προσδιορίζει το ολικό ηλεκτρικό φορτίο που υπάρχει στο χώρο αυτό!

Θεωρούμε μια περιοχή του χώρου στην οποία εμφανίζεται μη μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$. Υπάρχει ένας όμορφος τρόπος να προσδιορίσουμε το ολικό ηλεκτρικό φορτίο μέσασ'ένα όγκο V του χώρου αυτού χωρίς να χρειάζεται να μπούμε μέσα στον όγκο αυτό: υπολογίζουμε τη ροή του ηλεκτρικού πεδίου στην κλειστή επιφάνεια S που περικλείει τον όγκο αυτό. Το θεώρημα του Stokes και οι εξισώσεις του Maxwell δίνουν ότι

$$\int_S \vec{E}.\vec{dS} = \int_V (\nabla.\vec{E})\, dV = \int_V 4\pi\rho\, dV = 4\pi Q ,$$

όπου ρ και Q παριστάνουν την πυκνότητα των φορτίων και το ολικό φορτίο στον όγκο V.

Η ολική ροή λοιπόν του ηλεκτρικού πεδίου από την κλειστή επιφάνεια S ισούται με 4π φορές το ολικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια αυτή. Το παραπάνω συμπέρασμα είναι γνωστό στον ηλεκτρομαγνητισμό σαν το θεώρημα του Gauss.

Το θεώρημα του Gauss μπορεί να κατανοηθεί και παραστατικά. Η ροή από μια κλειστή επιφάνεια μετρά τον αριθμό των δυναμικών γραμμών που τέμνουν την επιφάνεια,όπου μετρούνται σαν θετικές οι δυναμικές γραμμές που φεύγουν έξω και σαν αρνητικές οι δυναμικές γραμμές που μπαίνουν μέσα στην επιφάνεια, ανάλογα με το είδος των ηλεκτρικών φορτίων. Όταν υπάρχει μη μηδενικό ολικό φορτίο μέσα στον όγκο V , η ολική ροή είναι μη μηδενική γιατί ορισμένες δυναμικές γραμμές γεννιούνται ή τερματίζονται στα φορτία του όγκου. Απεναντίας όταν δεν υπάρχει καθόλου φορτίο (αν και υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο)κάθε δυναμική γραμμή που εισέρχεται στην επιφάνεια κάποτε εξέρχεται απ'αυτήν και η ολική ροή ισούται με μηδέν.

Ας θεωρήσουμε ένα ηλεκτρικό πεδίο σ'έναν χώρο με μη τετριμένη τοπολογία. Για παράδειγμα θεωρούμε ότι ο χώρος είναι το επίπεδο R^2 με μια λαβή (handle) (Σχήμα 2)· ακόμη πιο παραστατικά ο ίδιος χώρος θα μπορούσε να περιγραφεί σαν το διδιάστατο επίπεδο R^2 με μια σκουληκότρυπα. Υποθέτουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει τέτοια μορφή έτσι ώστε οι δυναμικές του γραμμές εισέρχονται από το άνοιγμα A και εξέρχονται από το B (Σχ. 2).Προφανώς η ροή του ηλεκτρικού πεδίου που περνά από την κλειστή καμπύλη A_1 ή B_1 είναι διάφορη του μηδενός. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι το ηλεκτρικό φορτίο ενός χώρου σχετίζεται άμεσα με την τοπολογική δομή του χώρου.

Στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου για παραστατικούς λόγους θεωρήσαμε το χώρο διδιάστατο και τις κλειστές επιφάνειες A_1 και B_1 μονοδιάστατες. Στην πραγματικότητα φυσικά ο χώρος είναι τρισδιάστατος και οι κλειστές επιφάνειες που περικλείουν τα φορτία διδιάστατες.Για τον λόγο αυτό το φορτίο που υπάρχει σε μια περιοχή M του τρισδιάστατου χώρου και προσδιορίζεται από τη ροή που περνά από μια διδιάστατη σφαιρική (τοπολογικά μόνο) επιφάνεια που περιβάλλει τη M προσδιορίζεται από τη δεύτερη ομάδα ομοτοπίας $\Pi_2(M)$ της M. Αν και πολύπλοκη, η παραπάνω περιγραφή των ηλεκτρικών φορτίων είναι προτιμητέα από τη συνήθη τους περιγραφή με τη βοήθεια των σημειακών φορτίων. Τα σημειακά φορτία μας υποχρεώνουν να δεχτούμε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου απειρίζεται σε ορισμένα σημεία του χώρου. Απεναντίας,άπειρα δεν εμφανίζονται και το ηλεκτρικό πεδίο είναι παντού καλά ορισμένο όταν τα φορτία παρίστανται με "σκουληκότρυπες" του χώρου.

Στο τέταρτο παράδειγμα θα περιγράψουμε τη στενή σχέση που υπάρχει μεταξύ της Διαφορικής Γεωμετρίας και της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Η Γενική θεωρία της Σχετικότητας,που είναι η καλύτερη θεωρία βαρύτητας που διαθέτουμε σήμερα,διαφέρει ριζικά ~~τη~~ από Νευτώνεια θεωρία στον τρόπο περιγραφής της βαρύτητας.

Στη Νευτώνεια θεωρία η βαρύτητα περιγράφεται με τον κλασικό τρόπο, δηλαδή με δυνάμεις και δυναμικά,ενώ στη Σχετικότητα περιγράφεται με τη καμπύλωση του (τετραδιάστατου) χωρόχρονου. Επιπλέον, οι κι-

νήσεις των ελευθέρων σωματιδίων κατά τη θεωρία της Σχετικότητας γίνονται στις πιο ευθείες γραμμές του χωρόχρονου,που δεν είναι άλλες από τις γεωδαισιακές καμπύλες της διαφορικής γεωμετρίας.
Θα μπορούσε να πει κανείς λοιπόν ότι στη θεωρία της Σχετικότητας η κατανομή των μαζών λέει στο χωρόχρονο πως να καμπυλωθεί (η μάζα προσδιορίζει τη γεωμετρία) ενώ συγχρόνως ο καμπύλος χωρόχρονος λέει στις στοιχειώδεις μάζες πως να κινηθούν (η γεωμετρία προσδιορίζει τις κινήσεις). Όλες οι παραπάνω ιδέες εκφράζονται με έννοιες της διαφορικής γεωμετρίας.Για παράδειγμα , η παντελής έλλειψη πεδίου βαρύτητας σημαίνει ότι ο χωρόχρονος είναι επίπεδος και εκφράζεται με τη συνθήκη ότι ο τανυστής του Riemann ισούται με μηδέν.
Η εύρεση της γενικής λύσης των εξισώσεων Einstein στις περιοχές όπου δεν υπάρχει καθόλου ύλη (πρόβλημα άλυτο μέχρι σήμερα) συνίσταται στον προσδιορισμό όλων των τετραδιάστατων πολλαπλοτήτων των οποίων ο τανυστής του Ricci (ο οποίος"μετρά τα 50% της καμπυλότητας του χωρόχρονου") ισούται με μηδέν.
Τέλος ο προσδιορισμός του τρόπου διάδοσης του φωτός γίνεται με τον προσδιορισμό των φωτοειδών (null) γεωδαισιακών του χωρόχρονου.

Ένα από τα θεμελιώδη αξιώματα της θεωρίας της Σχετικότητας είναι ότι η ταχύτητα του φωτός c είναι πεπερασμένη, ότι όλα τα δυναμικά πεδία διαδίδονται με την ταχύτητα αυτή,και ότι καμμία πληροφορία δεν μπορεί να μεταδοθεί με μεγαλύτερη ταχύτητα.
Γεωμετρικά το αξίωμα αυτό περιγράφεται με τη βοήθεια των κώνων φωτός. Σ'ένα διάγραμμα χωρόχρονου (Σχ. 3) (στο οποίο έχει παραληφθεί μια διάσταση χώρου για λόγους παραστατικής) οι διαστάσεις του χώρου περιγράφονται (κατά σύμβαση) με τις οριζόντιες διευθύνσεις και η διάσταση του χρόνου με την κατακόρυφη διεύθυνση.
Ένα ακίνητο υλικό σημείο περιγράφεται από μια κατακόρυφη γραμμή - τη κοσμική γραμμή του σωματιδίου- που είναι παράλληλη προς τον

άξονα του χρόνου,ενώ ένα υλικό σημείο που κινείται με σταθερή ταχύτητα παριστάνεται με μια κοσμική γραμμή που παρουσιάζει κάποια κλίση ως προς την κατακόρυφο.
Για ευκολία διαλέγουμε τις μονάδες του χώρου και του χρόνου κατάλληλα έτσι ώστε οι κοσμικές γραμμές των φωτεινών ακτίνων στις περιοχές που ο χωρόχρονος είναι ασθενώς καμπυλωμένος να είναι σχεδόν ευθείες γραμμές με κλίση περίπου 45^{o} ως προς τον άξονα του χρόνου (οι κοσμικές γραμμές του φωτός είναι ευθείες με κλίση 45^{o} στον επίπεδο χωρόχρονο του Minkowski· γενικά είναι φωτοειδείς γεωδαισιακές καμπύλες). Ο κώνος φωτός σε κάθε σημείο του χωρόχρονου προσδιορίζεται από τις φωτοειδείς γεωδαισιακές που περνούν από το σημείο αυτό (Σχ. 3). Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το αξίωμα πως τίποτε δεν μπορεί να κινηθεί γρηγορότερα από το φως εκφράζεται με τη συνθήκη ότι οι κοσμικές γραμμές όλων των υλικών σημείων που περνούν από κάποιο σημείο του χωρόχρονου πρέπει να βρίσκονται μέσα στο κώνο φωτός του σημείου αυτού.

Όπως σ'όλες τις φυσικές θεωρίες έτσι και στη Σχετικότητα τα φαινόμενα μπορούν να περιγραφούν με τις αρχικές τους συνθήκες κάποια χρονική στιγμή t=to ,δηλαδή με τη μορφή των πεδίων (της γεωμετρίας στη Σχετικότητα) για t=to · κατόπιν,οι εξισώσεις της θεωρίας προσδιορίζουν την εξέλιξη του φαινομένου για κάθε χρονική στιγμή. Από το διάγραμμα χωρόχρονου του σχήμ. 3 φαίνεται ότι οι αρχικές συνθήκες μπορούν να δοθούν σε κάθε επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο (χ,ψ) (επειδή δεν παριστάνουμε την τρίτη χωρική διάσταση). Πιο γενικά,οι αρχικές συνθήκες μπορούν να δοθούν σε οποιαδήποτε χωροειδή (spacelike) επιφάνεια του χωρόχρονου,δηλαδή κάθε επιφάνεια της οποίας το εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε της σημείο βρίσκεται έξω από τον κώνο φωτός του σημείου αυτού.

Μετά την παραπάνω εισαγωγή είμαστε έτοιμοι να περιγράψουμε το πέμπτο και τελευταίο παράδειγμα που συσχετίζει τη θεωρία της Σχετικότητας με την Ανάλυση και πιο συγκεκριμένα με τη διαφορισιμότητα των συναρτήσεων.

Μια συνάρτηση λέγεται διαφορίσιμη τάξης C^p σ'ένα σημείο εάν όλες οι παράγωγές της μέχρι τάξης p (συμπεριλαμβανομένης) υπάρχουν και είναι συνεχείς στο σημείο αυτό. Η συνάρτηση λέγεται λεία (smooth) ή C^∞ σ'ένα σημείο αν υπάρχουν οι παράγωγες κάθε τάξης στο σημείο αυτό. Τέλος η συνάρτηση λέγεται αναλυτική ή C^ω σ'ένα σημείο αν είναι C^∞ σε κάποια περιοχή του σημείου αυτού ή ισοδύναμα, αν υπάρχει το ανάπτυγμα της σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο αυτό. Για παράδειγμα αναφέρουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} , & x > 0 \\ 0 , & x \leq 0 , \end{cases}$$

η οποία είναι C^∞ ενώ δεν είναι αναλυτική στο σημείο $x=0$.

Μεταξύ των φυσικών συνήθως υπάρχει η αντίληψη ότι δεν πρέπει να χάνουν το χρόνο τους απασχολούμενοι με τη διαφορισιμότητα των συναρτήσεων γιατί στη φυσική οι συναρτήσεις έχουν όσες παραγώγους χρειάζονται όπως και αναπτύγματα σε σειρές δυνάμεων γύρω από κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους.

Στο τελευταίο παράδειγμα λοιπόν θα δείξουμε ότι ο θεμελιώδης νόμος της φυσικής ότι τίποτε δεν μπορεί να κινηθεί με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός απαιτεί ότι τα διάφορα πεδία που εμφανίζονται στη θεωρία της Σχετικότητας -που τα δεχόμαστε ότι είναι C^∞-δεν πρέπει να είναι αναλυτικά πεδία.

Στο διάγραμμα χωρόχρονου του σχήματος 4, S είναι μια χωροειδής επιφάνεια αρχικών συνθηκών στο υποσύνολο A της οποίας (το γραμμοσκιασμένο) έχει καταγραφεί μια διαταραχή του πεδίου βαρύτητας (δηλ.της καμπυλότητας). Εφ'όσον λοιπόν διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός, η διαταραχή αυτή μπορεί να επηρεάσει μόνον την περιοχή του χωρόχρονου που μοιάζει με αντεστραμμένο κόλουρο κώνο στο σχήμα 4, και που αποτελείται από την ένωση όλων των κώνων φωτός των σημείων της περιοχής Α. Σημεία του χωρόχρονου σαν το Ρ και Σ ,που βρίσκονται έξω από τον κόλουρο κώνο, δεν επηρεάζονται από τις διαταραχές που συμβαίνουν και καταγράφονται στο υποσύνολο Α,επειδή τα σήματα του πεδίου δεν έχουν επαρκεί χρόνο για να διαδοθούν μέχρι τα σημεία αυτά.

Ας δεχθούμε προς στιγμήν ότι στη θεωρία της Σχετικότητας μπορούμε να χρησιμοποιούμε αναλυτικές γεωμετρικές δομές και αναλυτικά πεδία, ότι δηλαδή ο χωρόχρονος είναι μια C^{ω} πολλαπλότητα,ότι ο μετρικός τανυστής και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περιγράφονται από αναλυτικά τανυστικά πεδία στο χωρόχρονο,και ότι οι αρχικές συνθήκες των πεδίων περιγράφονται με τη βοήθεια αναλυτικών τανυστικών πεδίων σε μια χωροειδή επιφάνεια (ή ένα υποσύνολο της) στο χωρόχρονο.
Με τις προϋποθέσεις αυτές θα μπορούσαμε , χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αναλυτικής επέκτασης,να κάνουμε το εξής:
Όταν δοθεί ένα επιπρόσθετο πεδίο στο χωρόχρονο,το οποίο καταγράφεται μόνο στο υποσύνολο Α της χωροειδούς επιφάνειας S , να προσδιορίσουμε με αναλυτική επέκταση τις αρχικές συνθήκες του επιπρόσθετου πεδίου σ'όλα τα σημεία της επιφάνειας S και κατόπιν,χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις πεδίου,να προσδιορίσουμε το αποτέλεσμα της δράσης του επιπρόσθετου πεδίου σε όλα τα σημεία του χωρόχρονου,ακόμη και έξω από τον κόλουρο κώνο με μικρή βάση το Α.Συνεπώς η αναλυτικότητα των πεδίων συνεπάγεται ότι ταδυναμικά πεδία διαδίδονται με άπειρη ταχύτητα. Για το λόγο αυτό στη Γενική θεωρία της Σχετικότητας ο χωρόχρονος θεωρείται μια λεία τετραδιάστατη πολλαπλότητα,με λείο

../..

μετρικό τανυστή και λεία όλα τα υπόλοιπα φυσικά πεδία.
Απεναντίας στη Νευτώνεια θεωρία,που προβλέπει άπειρη ταχύτητα διάδοσηςτων πεδίων,τα διάφορα πεδία τα θεωρούμε αναλυτικά.

Δεν θα συνεχίσουμε με άλλα παραδείγματα,αν και δεν αναφέραμε καθόλου τις εφαρμογές των αλγεβρών και των ομάδων Lie στις ενοποιημένες θεωρίες πεδίου, όπου συγκεντρώνεται και η μεγαλύτερη δραστηριότητα των θεωρητικών φυσικών τις ημέρες μας.
Απλώς προτιμήσαμε να αναφέρουμε παραδείγματα λιγότερο γνωστά που καλύπτουν διάφορους κλάδους των μαθηματικών και της φυσικής.
Με τα πέντε παραδείγματα τελειώνει και το καθαρά επιστημονικό τμήμα της ομιλίας. Προτού τελειώσουμε όμως θα το φιλοσοφήσουμε και λίγο, ασχολούμενοι με το ερώτημα:Χρειάζονται πράγματι οι φυσικοί τα "αφηρημένα" τα "προχωρημένα" μαθηματικά για να προχωρήσουν στη θεωρητική φυσική?

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα για να κάνουμε κατανοητό το ερώτημα. Ο φυσικός που μελετά τις στροφές γύρω από την αρχή των αξόνων στο καρτεσιανό επίπεδο (χ,ψ) ξέρει ότι δύο διαδοχικές στροφές με γωνίες φ_1 και φ_2 αντιστοιχούν σε μια στροφή με γωνία $\varphi_1 + \varphi_2$, ξέρει ότι υπάρχει η στροφή με γωνία μηδέν μοιρών η οποία δεν αλλάζει τίποτε, και ξέρει ότι σε κάθε στροφή αντιστοιχεί μια δεύτερη στροφή (η στροφή κατά την αντίθετη γωνία) έτσι ώστε το συνολικό αποτέλεσμα των δύο στροφών να είναι η στροφή που δεν αλλάζει τίποτε.
Χρειάζεται ο φυσικός αυτός τους μαθηματικούς να του μάθουν ότι οι στροφές στο επίπεδο απαρτίζουν μια Αβελιανή ομάδα του Lie- την ομάδα $U(1)$-για να μπορέσει να συνεχίσει τη μελέτη του; Ή για ένα άλλο παράδειγμα,ο φυσικός που ξέρει πως να προσθέσει δύο δυνάμεις, δύο ταχύτητες ή δύο συναρτήσεις δυναμικού χρειάζεται πράγματι τους μαθηματικούς να του πουν ότι αυτές αποτελούν τα στοιχεία κάποιου διανυσματικού χώρου και συνεπώς ότι πρέπει να τα προσθέσει δεόντως;

Προφανώς και στα δύο παραπάνω παραδείγματα η απάντηση είναι ένα κατηγορηματικό όχι. Κατά ποία έννοια λοιπόν χρειάζονται οι φυσικοί τα μαθηματικά; Η απάντηση που ακολουθεί εκφράζει τις προσωπικές απόψεις του ομιλητή.

Νομίζω ότι ο θεωρητικός φυσικός που μαθαίνει μαθηματικά κάνει μια επένδυση που θα του αποδόσει αργότερα σε χρόνο και προσπάθεια. Πάλι μ'ένα παράδειγμα θα προσπαθήσω να εξηγήσω καλύτερα αυτό που εννοώ.

Φαντάζομαι ότι κάποτε κάποιος άνθρωπος βρήκε, μετά από πολύ κόπο, οτι 5 πορτοκάλια και 7 πορτοκάλια κάνουν 12 πορτοκάλια. Και αργότερα,πάλι μετά από κόπο,ότι 5 πρόβατα και7πρόβατα κάνουν 12 πρόβατα και ότι 5 άλογα και 7 άλογα κάνουν 12 άλογα. Και κάποιος άλλος παρατήρησε την ύπαρξη μιας ομοιότητας στο αποτέλεσμα της πρόσθεσης,ανεξάρτητα του αν αυτή γινόταν για πορτοκάλια, πρόβατα ή άλογα. Και κάποιος τρίτος σκέφτηκε πως θα ήταν μεγάλη πρόοδος -κυρίως λόγω της μεγάλης οικονομίας χρόνου που θα συνεπάγονταν- να μπορέσει να κάνει κανείς την πρόσθεση μια και καλή ,ανεξάρτητα από τα συγκεκριμένα υλικά αντικείμενα. Τότε οι άνθρωποι θα έπρεπε να κάνουν κάθε πρόσθεση μία μόνο φορά στη ζωή τους,και να χρησιμοποιούν το αποτέλεσμα σ'όλες τις περιπτώσεις που θα τους χρειαζόταν. Τέλος εμφανίστηκε κάποιος τέταρτος που τα κατάφερε να εκφράσει την πρόσθεση ανεξάρτητα από αντικείμενα.Χρησιμοποίησε κάτι αφηρημένες έννοιες-που τις έλεγε αριθμούς- και έλεγε πως πρέπει να μάθουν οι άνθρωποι να προσθέτουν αριθμούς. Είχε αρκετά προβλήματα με τους συναθρώπους του,κυρίως γιατί δεν τον πολυκαταλάβαιναν. Οι άλλοι ήθελαν να φαντάζονταν το 5 σαν 5 πορτοκάλια ή 5 πρόβατα κι αυτός επέμενε ότι το 5 δεν είναι τίποτε παραπάνω από τον αριθμό 5. Αυτός ο τέταρτος είναι κατά τη γνώμη μου ο πρώτος μαθηματικός.

Σίγουρα αντιμετώπισε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθηματικοί και σήμερα, κυρίως στην επικοινωνία με τους συναθρώπους τους. Φανταστείτε όμως και την οικονομία σε χρόνο και προσπάθεια που επέφερε στην ανθρωπότητα.Νομίζω ότι και σήμερα οι μαθηματικοί κάνουν ουσιαστικά το ίδιο πράγμα,όταν μελετούν και χρησιμοποιούν του διανυσματικούς χώρους,τις άλγεβρες,και γενικά όλες τις μαθηματικές δομές.

Και τι σχέση έχει μ'αυτά ο σύγχρονος θεωρητικός Φυσικός;
Είναι πολύ πιθανόν ότι ο σύγχρονος θεωρητικός φυσικός θα συναντήσει κατά τη διάρκεια της επιστημονικής του ζωής μερικές εκατοντάδες περιπτώσεις που έχουν τη δομή ενός διανυσματικού χώρου, μιας ομάδας ή μιας άλγεβρας Lie,και μερικές δεκάδες περιπτώσεις που έχουν τη δομή μιας πολλαπλότητας ή μιας ινώδους δέσμης. Τον συμφέρει λοιπόν, καθαρά για λόγους οικονομίας, να καταλάβει τις δομές αυτές μια και καλή,γενικά και αφηρημένα,ώστε να μπορεί κατόπιν να τις χρησιμοποιεί οποτεδήποτε του χρειάζονται. Κατ'αυτή την έννοια,νομίζω, χρειάζονται τα"αφηρημένα" μαθηματικά στο θεωρητικό φυσικό.

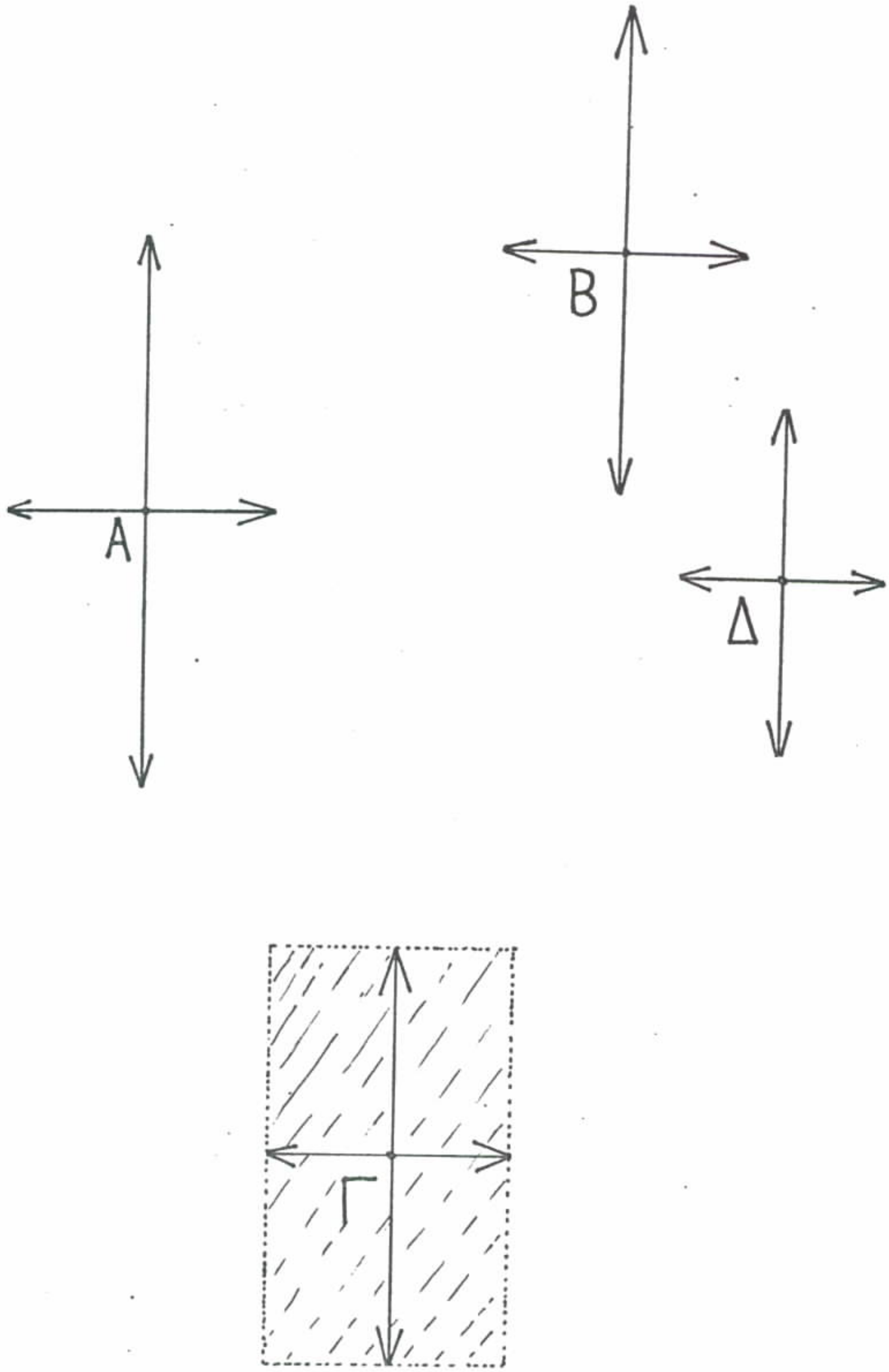
Οι μαθηματικοί και οι φυσικοί αλληλοπειράζονται συχνά.
Μια από τις ιστορίες που εκφράζουν τις διαφορές τους είναι και η παρακάτω. Σ'ένα μαθηματικό και ένα φυσικό έδωσαν από μία κατσαρόλα νερό και μία θερμάστρα και τους έθεσαν το πρόβλημα να ζεστάνουν μια κατσαρόλα νερό. Και οι δύο έδωσαν την ίδια λύση: Γέμισαν την κατσαρόλα ,τηνέβαλαν πάνω στη φωτιά και περίμεναν να ζεσταθεί το νερό. Μετά τους έδωσαν ένα δεύτερο πρόβλημα. Από μια κατσαρόλα γεμάτη με νερό, από μια θερμάστρα ,και τους ζήτησαν να ζεστάνουν το νερό.Ο φυσικός έβαλε την γεμάτη κατσαρόλα πάνω στη φωτιά.Ο μαθηματικός,απεναντίας,άδειασε την κατσαρόλα και δήλωσε: το πρόβλημα έχει αναχθεί στο προηγούμενο πρόβλημα, το οποίο έχει ήδη λυθεί!!

Νομίζω ότι οι φυσικοί είναι πιο πρακτικοί από τους μαθηματικούς.

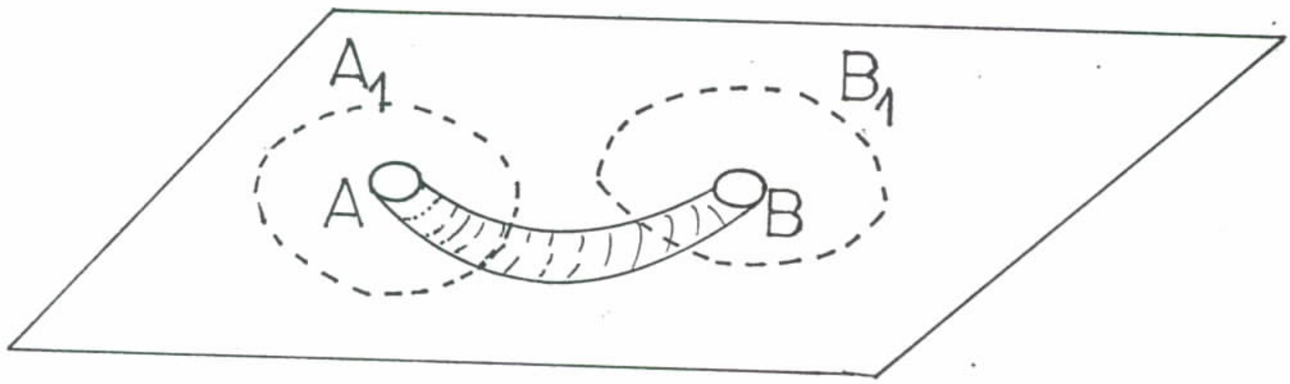
../..

Επειδή είναι πρακτικοί λοιπόν διαπιστώνουν ότι τους χρειάζονται τα μαθηματικά των μαθηματικών. Και τα μαθαίνουν.Και τα χρησιμοποιούν.

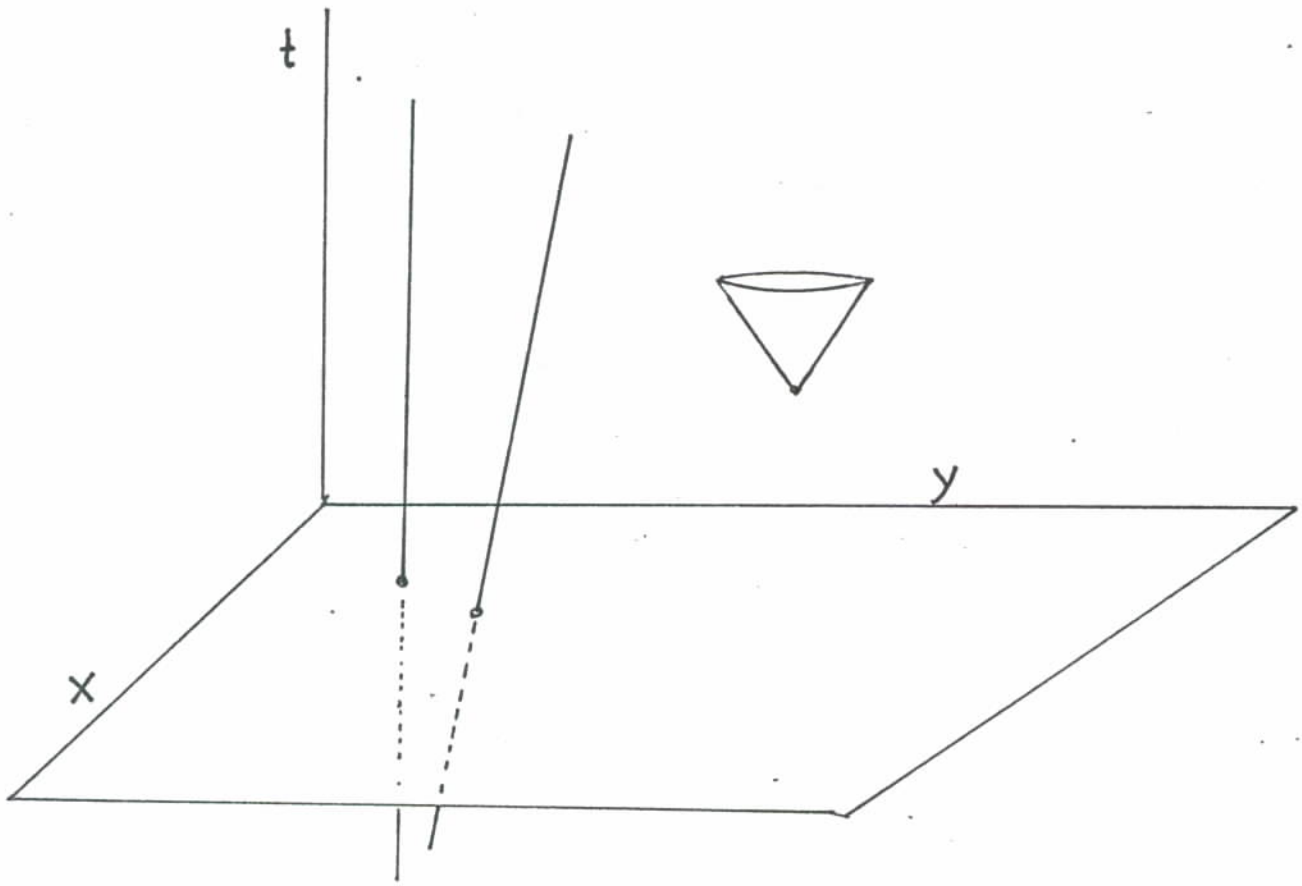
* Ομιλία που δόθηκε στη Θεσσαλονίκη στις 16 Απριλίου 1983,στα πλαίσια του Σεμιναρίου Μαθηματικής Παιδείας,και οργανώθηκε από το Παράρτημα Θεσσαλονίκης της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.



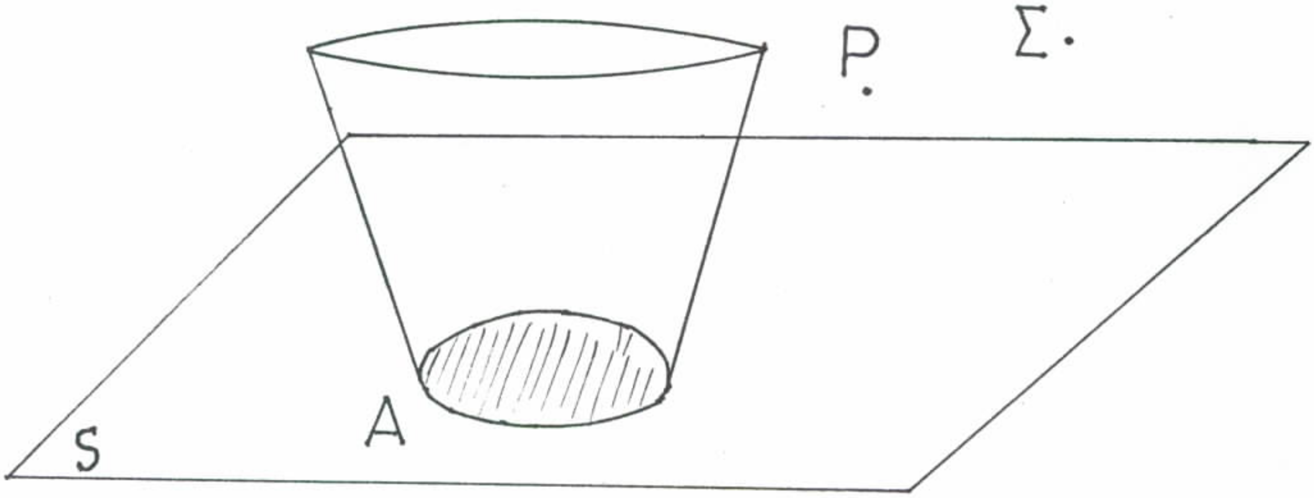
Σχ.1



Σχ. 2



Σχ.3



Σχ. 4