Γενική Θεωρία Σχετικότητας.
Εαρινό εξάμηνο 1990.

- Προχωρημένο μεταπτυχιακό μάθημα. Ιδέα, περάσουμε γρήγορα τα απαιτούμενα μαθηματικά – τανυστικό λογισμό σε πολλαπλότητες Riemann – και μετά εφαρμόσουμε.
 Πολλούς ακροατούς. Γρήγορη επανάληψη ότι συνήθως σεμινάριο (Τζανάκη – Παπαντωνόπουλου – Λύτσα) προηγούμενο εξάμηνο, όχι έγινε στη [illegible] ⇒ μαθηματικά προβλήματα Σχετικότητας.
- Βάση, συμβολισμός, ορολογία "General Relativity" του Robert Wald. Προς θεού, όχι όλο το βιβλίο.
 1 στη βιβλιοθήκη, κράτησα και για βιβλιοθήκη των.
- Προχωρημένο, Μεταπτυχιακό, Τρίωρο. Σ' όλα και τέταρτη ώρα εργασίας.
- Δεν θα κάνουμε εξετάσεις. Προς το μέσο του μαθήματος, ως πολύ πριν από το Πάσχα, θα δώσω από μία εργασία σ' όσους ενδιαφέρονται να πάρουν και βαθμό, να το κατοχυρώσουν. Όχι απαραίτητα μόνο σ' όσους θέλουν δουλέψουν σε σχετικότητα, τουλάχιστον τανυστικός λογισμός + διαφορική γεωμετρία ένα από τα εργαλεία των.
- Συμπληρώνουμε στην αρχή και την τέταρτη ώρα, ώστε μειώσουμε προς το τέλος, όταν θα κάνετε τις εργασίες σας.
- Σεμινάριο θα γίνεται, με παράλληλα θέματα.
- Προς το τέλος, αν υπάρχει ενδιαφέρον → διάλεξη στα πλαίσια του μαθήματος, πληροφοριακά κι άλλα πράγματα.

Μερικά θέματα: Πολλαπλότητες, λείες απεικονίσεις, Διανύσματα σ' ένα σημείο, λίγη γραμμική άλγεβρα, Τανυστικός λογισμός, Παραγωγίσεις, Μετρική, Παραγώγιση Lie, συναλλοίωτη παραγώγιση, Καμπυλότητα, Εξισώσεις Einstein, Γεωδαισιακές, Συμμετρίες και Διανυσματικά πεδία Killing, Σύμμορφοι μετασχηματισμοί, σύμμορφα διανυσματικά πεδία Killing, Γραμμικοποιημένες εξισώσεις Einstein, Μερικές λύσεις των εξισώσεων Einstein, Τετραδικές μέθοδοι, Αρχικές τιμές, Lie άλγεβρα, ομάδα Lie, κ.λ.π. ...

Γενικά: Σχετικότητα, η καλύτερη θεωρία κλασική, όχι κβαντική, για βαρύτητα. Κάτι παραπάνω από περιγραφή βαρύτητας. η γεωμετρική δομή του χώρου και χωρόχρονου.

- Βασικές αρχές:
  - Βαρύτητα περιγράφεται με καμπύλωση χωρόχρονου.
  - Κατανομή ύλης-ενέργειας προσδιορίζει γεωμετρία από εξισώσεις Einstein, $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$.
  - Κίνηση σωματιδίων στις γεωδαισιακές της γεωμετρίας, ύλη χωρόχρονο πως να καμπυλωθεί, η καμπυλότητα σωματίδια πως να κινηθούν.

Τα ανοιχτά τα θέματα Σύγχρονης Φυσικής.
Όχι μόνον δόγμα, πλήρης, κομψή μαθηματική θεωρία.

- Βασικός στόχος, μικροαλλαγή νοοτροπίας, απαραίτητη για έρευνα. Δουλεύει χωρίς να καταλαβαίνει τα πάντα. Χρησιμοποιείς το black and decker, χωρίς καταλαβαίνεις όλες λεπτομέρειες. Προβλήματα, επίπεδα κατανόησης. διαφορετικό μάθημα ποτέ δεν ολοκληρώνεται.

αφ φίλμονο σήμανση.

Πολλαπλότητες.

- Ιδέα, γεωμετρική δομή, τοπικά σαν κομμάτια $\mathbb{R}^n$, πολλά τον τέτοια, κολλημένα για ενιαία δομή, αυτό πολύ πιο πολύπλοκο. Παραδείγματα σφαίρα, επίπεδα, καμπυλωμένη επιφάνεια. Κοντά ελάχιστες διαφορές, μακριά πολλές.
- $\mathbb{R}^n$, σύνολο n-άδων $(x_1, x_2, \dots x_n)$. Συντεταγμένες σημείο $\Leftrightarrow$ n-άδα, περιγράφεται με συντεταγμένες. Το θέλουμε για συναρτήσεις, πεδία, διαφορίσεις.
- Είναι διανυσματικός χώρος, προσθέτουμε n-άδες, πολ/με.
- Τοπολογικός χώρος, $\exists$ ανοικτά υποσύνολα, ανοικτές σφαίρες ή ανοικτά ορθογώνια. Όχι συνοριακά σημεία, όλα μέσα, κινούνται ασφαλώς. Έχουμε έννοια ανοικτού συνόλου στο 0.
- Ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ σαν όλο τον $\mathbb{R}^n$, όχι ακραία σημεία, που δεν υπάρχουν σε όλο τον $\mathbb{R}^n$.

⊗ Πρώτα βήματα για πολλαπλότητα. Σύνολο M

(i) Κάθε ένα υποσυνόλων μοιάζει ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

(ii) Μπορεί να περιγραφεί με συντεταγμένες

(iii) όλα μαζί και αυτά κολλημένα είναι η πολλαπλότητα.

Επίσημα.

Σύνολο M, n-χάρτης του M, $V \subset M$, $\psi : V \to \mathbb{R}^n$:

$\psi(V)$ ανοικτό, $V \xleftrightarrow{\psi} \psi(V)$, 1-1, ακριβώς τα ίδια σημεία. $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ συντεταγμένες, από $(x_1, \dots x_n)$ και πεδίο τιμών, ακριβώς ίδιο στο V, V περιγράφηκε με συντεταγμένες.

- Οι συντεταγμένες του σημείου p ως προς τον χάρτη (V, ψ).

Τον 19 αιώνα, κατηλλήλως επιφάνειες μέσα σε μεγαλύτερους χώρους. Τον 20 αιώνα, είναι χώροι από μόνοι τους, οι πολλαπλότητες.

Συνθήκη 1-1 ⇒ δίνουν περιγραφή του $U \subset M$ με καλές συντεταγμένες.

⊗ ○ είναι ⬭ □ ← όχι, □ δεν είναι, η διάσταση δεν μπορεί να αλλάξει.

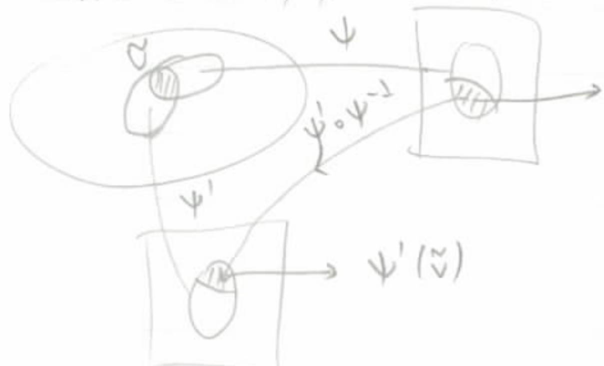
⊗ Η πολλαπλότητα, από πολλούς χάρτες. (~~Θεώρημα, πολλαπλότητα, περιγράφηκε από ένα μόνον χάρτη, είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$~~

Ιδέα, το πλακώνεις από διαφορετικούς τρόπους, η ίδια δομή;

Συμβιβαστότητα μεταξύ χαρτών:

Δύο n-χάρτες της M, (V, ψ), (V', ψ'), λέγε είναι συμβιβαστοί. Αν $V \cap V' = \emptyset$, δεν έχουν να χωρίσουν τίποτα.

Αν $V \cap V' = \tilde{V} \neq \emptyset$



$\psi' \circ \psi^{-1}$
$\psi \circ \psi'^{-1}$

n-συναρτήσεις, n μεταβλ. μεταβλητών, 1-1

C^∞, λείες, smooth, άπειρες φορές παραγωγίσιμες με συνεχείς παραγώγους.

⊗ Οι επιλογές των συντεταγμένων είναι καλές που το πέρασμα από ένα σύστημα στο άλλο, όπου επικαλύπτονται, γίνεται από άπειρα διαφορίσιμες συναρτήσεις, λείες συναρτήσεις.

⊗ Τα συμπεράσματα είναι καλά. Δεν εμφανίζονται παθολογίες επειδή οι συντεταγμένες δεν πάνε καλά, όχι ουσιαστικό.

Πολλαπλότητα: Για εμάς,
Ένα σύνολο M, καλύπτεται πλήρως και συμβιβαστά με n-χάρτες, πολλαπλότητα διάστασης n.

(i) Δεν συζητάμε πολλαπλότητες με συνοριακά σημεία, δηλαδή.

(ii) Δεν είναι δυνατή αλλαγή διάστασης, παντού η ίδια. Καλάμε n, m, δεν είναι πολλαπλότητα.

<u>Ορισμός για Μαθηματικούς.</u> Πολλαπλότητα n-διαστάσεων είναι σύνολο M, συλλογή n-χαρτών

(i) Καλύπτουν, $\forall p \in M$, ανήκει σε κάποιο χάρτη, ενός ανοικτού, όχι συνοριακό.

(ii) Ανά δύο, συμβιβαστοί.

(iii) Κάθε χάρτης της συλλογής συμβιβαστός μόλις την άλλη είναι ήδη στην συλλογή.

✱ Βασικό, να ξέρουμε ποιές είναι οι C^∞ συναρτήσεις στην πολλαπλότητα.

Μια περιοχή, κάποιες απεικονίσεις, άλλη άλλη, αλλαγή C^∞, άρα όλοι οι χάρτες συμφωνούν ποιές είναι οι λείες συναρτήσεις στην πολλαπλότητα.

✱ Πράξη: Σύνολο M, να το κάνουμε πολλαπλότητα.
Χάρτες που ικανοποιούν τις (i) και (ii) αρκεί. Για Μαθηματικούς, και όλοι οι υπόλοιποι πάντα μπορούμε να φανταστούμε.

- Το n χαρακτηρίζει το σύνολο. Αν προσπαθήσουμε να του δώσουμε $(n+1)$-χάρτη, δεν είναι ανοικτό $\psi(U)$
- Αν του δώσουμε $(n-1)$-χάρτη δεν είναι 1-1.

- Παραδείγματα: 1) $M=\mathbb{R}^n$, $U=\mathbb{R}^n$, ψ: ταυτότητα, $\mathbb{R}^n$ είναι πολλαπλότητα.

2) $M=\{(x,y,z),\ x^2+y^2+z^2=1.\}$

$U_x^+=\{(x,y,z)\in M,\ x>0\}$ $\qquad U_x^-$ - - -

$\psi_x^+(x,y,z)=(y,z)$

$\psi_x^-(x,y,z)=(y,z)$ $\updownarrow$ γιατί είναι ομοιομορφισμοί.

$\psi_x^+(U_x^+)=\{(y,z),\ y^2+z^2<1\}.$

6 καλύπτουν. Ανο $\geq$ $\leq$ $\to$ όχι ανοικτά
$\to$ δίχη επικάλυψη για συμβιβαστότητα.

$U_x^+,\ U_x^-$ συμβιβαστοί, τομή κενό.

(U_x^+,ψ_x^+), (U_y^+,ψ_y^+):

$\cap$ $x>0$, $y>0$, $\qquad (x,y,z),\ x>0, y>0.$

$x=\sqrt{1-y^2-z^2}$ $U_x^+ \ni (x,y,z) \in U_y^+$

$\updownarrow \qquad\qquad \downarrow\ y=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$(y,z) \qquad\qquad (x,z)$ $\qquad$ τοπικά σφαίρα S^2.

εδώ $\qquad$ εδώ

$(x=\sqrt{1-y^2-z^2},y,z) \underset{}{\overset{A}{\rightleftarrows}} (x,\ y=\sqrt{1-x^2-z^2},\ z)$

A: ανεξάρτητες οι y,z, εδώ οι x,z $\quad \begin{cases} x=\sqrt{1-y^2-z^2} \\ z=z \end{cases}$

B $(x,z) \to \begin{cases} y=\sqrt{1-x^2-z^2} \\ z=z \end{cases}$. όχι παραγωγίσιμες αν θεωρούσαμε ισότητα.

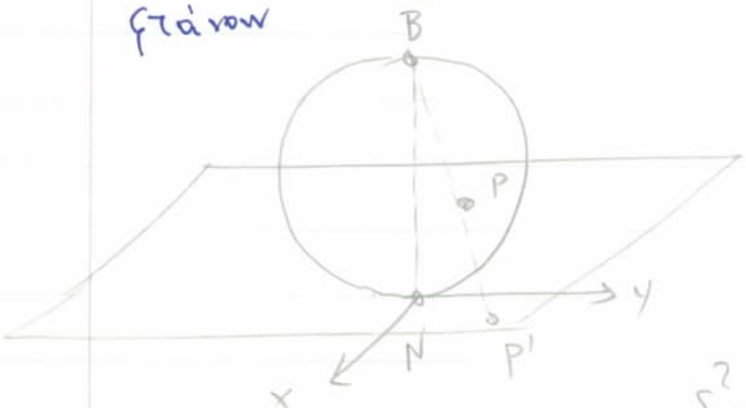
$R^m \times R^n = R^{m+n}$ $\qquad$ $S^1 \times S^1 =$ σαμπρέλα.

$R^1 \times S^1 =$ κύλινδρος,

* Σύνδεση με Σχετικότητα: Εισάγουμε καμπύλο χώρο, χρησιμοποιώντας συμμετρίες του προβλήματος (σφαιρικά συμμετρικό πρόβλημα σε κυλινδρικές συντεταγμένες).

Λύνουμε σ' έναν χάρτη. Επεκτείνουμε για να βρούμε όλη την πολλαπλότητα.

* Σφαίρα, στερεογραφικές προβολές, δύο μόνον χάρτες φτάνουν



Το P, BP που τέμνει το επίπεδο, περιγράφεται με τις συντεταγμένες του σημείου P'.

$$S^2 - \{B\} \leftrightarrow R^2$$

Αν περιλάβουμε και το B, τα B και N στο ίδιο σημείο. Κι άλλος ένας χάρτης που καλύπτει περιοχή του M.

<u>Πρακτικά:</u> Οι συντεταγμένες πρέπει να είναι καλές. Δεν είναι κακό οι συντεταγμένες να περιορίζονται σε μία περιοχή τιμών.

Πρέπει όμως να είναι σε 1-1 αντιστοιχία με τα σημεία που περιγράφουν. Περιορίζοντας στην έκταση, είμαστε απόλυτοι στο να είναι 1-1.

<u>Παράδειγμα:</u> (x, y, z) καλές.

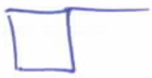
(r, θ, φ) προβληματικές στο 0.

- Καρτεσιανό γινόμενο πολλαπλοτήτων, και, το καρτεσιανό γινόμενο των αντίστοιχων χαρτών.

  $S^1 \times \mathbb{R}^1$ = κύλινδρος

  $S^1 \times S^1$ = τόρος.

- Η ένωση δύο πολλαπλοτήτων εν γένει δεν είναι πολλαπλότητα:

 αλλάζει διάσταση

 ένα προβληματικό σημείο.

 όχι προβλημ. σημείο

 και, κοινά.

⊗ Εν γένει πολλαπλότητες φυσικής, $\mathbb{R}^m \times S^n$

⊗ Θα καταλαβαίνετε αν είναι ή δεν είναι πολλαπλότητα. Δεν θα ελέγχετε μία-μία τις συνθήκες.

Λείες απεικονίσεις (smooth mappings).

M πολλαπλότητα

$f : M \to R$ $\qquad$ $f(p) \in \mathbb{R}$ πραγματικός αριθμός λεία

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & R \\ R^n \supset \psi(U) & \end{tikzcd}$$

$\forall$ χάρτη (U, ψ), $\quad f \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \to R$ είναι C^∞.

Αν είναι λεία σ' ένα σύνολο συντεταγμένων είναι λεία παντού.

⊛ Λεία μεταξύ πολλαπλοτήτων

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_\alpha"'] & N \arrow[d, "\psi_\alpha"] \\ \mathbb{R}^n \supset \phi_\alpha(U) \arrow[r, bend right] & \psi_\alpha(V) \in \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$\psi_\alpha \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} : R^n \to R^m$

m πραγματικές συναρτήσεις n-πραγματικών μεταβλητών είναι C^∞.

Αυτό το ελέγχουμε για ένα πλήρες σύνολο συντεταγμένων.

⊛ Πότε δύο πολλαπλότητες ίδιες

(i) ίδιες σαν σύνολα

(ii) ορίζουν ίδιες λείες απεικονίσεις.

Επίσης $f : M \to N$, 1-1, επί, f λεία, f^{-1} λεία,

f διαφορομορφισμός των πολλαπλοτήτων

Θεωρούνται ίδιες και δεν τις ξεχωρίζουμε.

Παραδείγματα: · $M=(-1,+1)$, πολλαπλότητα με την ταυτοτική απεικόνιση $\phi(u)=u$

• $N=\mathbb{R}$, $\psi(x)=x$, πάλι ταυτοτική.

Είναι τα ίδια σύνολα:

$$(-1,+1)=M \xrightarrow{f} N=\mathbb{R},$$
$$f(u)=\frac{u}{1-u^2} \stackrel{'}{=} (x)$$

Είναι επί? $\frac{u}{1-u^2}=x \Rightarrow u=\frac{-1\pm\sqrt{1+4x^2}}{2x}$,

παίρνετε $u=\frac{-1+\sqrt{1+4x^2}}{2x}$ ώστε $u\in(-1,+1)$

$$u=\frac{2x}{1+\sqrt{1+4x^2}}, \quad \text{άρα} \quad f^{-1}(x)=u=\frac{2x}{1+\sqrt{1+4x^2}}$$

Είναι 1-1, τα σύνολα είναι ισοδύναμα.
Είναι και οι δύο διαφορίσιμες προσοχή στην περιοχή τιμών των.
Οι δύο πολλαπλότητες είναι ίσες!!

Άσκηση: $(-1,+1) \longrightarrow (a,b)$
u
$$g(u)=\frac{1}{2}\left[(1+u)b+(1-u)a\right]$$

• Πεδία πάνω στις πολλαπλότητες. Βαθμωτά τα ξέρουμε, ίδια. Διανυσματικά. Στον $\mathbb{R}^n$, με $(\xi^1, \xi^2, \ldots \xi^n)$ μαζί υπήρχαν φυσιολογικά διανύσματα βάσης. Δεν υπάρχει κάποιο σύστημα αξόνων συντεταγμένων, φυσιολογικό και προτιμητέο.

παράγωγος κατά κατεύθυνση

Διάνυσμα $\xi = (\xi^1, \ldots \xi^n)$, βαθμωτό f, παράγωγος προς κατεύθυνση ξ, $\xi(f) = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n}$, στο σημείο, $\xi(f)|_p$ αριθμός. Αυτή την έννοια γενικεύουμε στις πολλαπλότητες.

Πολλαπλότητα M, σημείο P, χάρτης $(x^1, \ldots x^n)$, θα θεωρούμε τα $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$ διανύσματα βάσης κάποιου διαν. χώρου στο P. Αν συνιστώσες $\xi^1, \ldots$, $\{\xi^1, \ldots \xi^n\}$, διάνυσμα, $\xi = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n}$.

Έστω $C = \{$ όλες οι λείες συναρτήσεις στην πολλαπλότητα $\}$.

$\xi(f+g) = \xi(f) + \xi(g)$

$\xi(fg) = f\,\xi(g) + g\,\xi(f)$

$\xi(\lambda f) = \lambda\,\xi(f)$, $\quad \xi(\lambda) = 0$ για $\lambda = \text{const}$.

Τα διανύσματα είναι παραγωγίσεις. Αν στο σημείο, παράγουν έναν αριθμό.

⊛ Πρόσθεση, πολλαπλασιασμός διανυσμάτων, με τις συνιστώσες των τελευταίων είναι συμπεριφέρονται στην ίδια βάση.

Αλλαγή συντεταγμένων: M, p, χάρτες $\{x^i\}$, $\{\tilde{x}^j\}$. Άρα υπάρχουν $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^i)$ και $x^i = x^i(\tilde{x}^j)$.

Τυχαία συνάρτηση f,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j}\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}$$

$$\xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \tilde{\xi}^k \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k} = \xi^i \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j}\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}$$

$$\tilde{\xi}^k \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k} = \xi^i \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k} \Rightarrow \tilde{\xi}^k = \xi^i \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}$$

Αντίστοιχα, $\xi^i = \tilde{\xi}^j \dfrac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}$. Είναι η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης.

⊗ Παράδειγμα: ξ διάνυσμα, χάρτης $\{x^1, x^2, \dots x^n\}$.

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j . \qquad \xi(x^3) = \left(\xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n}\right)(x^3) = \xi^3 .$$

Ώστε η i συνιστώσα του διανύσματος ξ στο χάρτη $\{x^i\}$ είναι η δράση του ξ στη δείε συνάρτηση $f = x^i$.

⊗ Πως θα τα φανταζόμαστε, εφαπτόμενος χώρος σε κάθε σημείο T_p, $\dim T_p = \dim M$. Όλοι οι εφαπτόμενοι χώροι έχουν την ίδια διάσταση.

⊗ Διανύσματα σε διαφορετικά σημεία της πολλαπλότητας δεν προστίθενται, ζουν σε διαφορετικούς χώρους, οποιαδήποτε σύγκριση, δεν γίνεται.

- Διάνυσμα σε σημείο.
- Διανυσματικό πεδίο : Μια επιλογή ενός διανύσματος σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας, που ανήκει στον T_p.

  $\forall p \in M, \quad \xi \in T_p$.

- Συνεχής επιλογή, διαφορίσιμη επιλογή, λεία επιλογή.

  $C(M) = \{$ σύνολο λείων βαθμωτών συναρτήσεων στο $M\}$

  ξ διαν. πεδίο $\forall f \in C(M)$, $\xi(f) =$ καινούργιο βαθμωτό στο M. Αν, $\forall f \in C(M)$, $\xi(f) \in C(M)$, δηλ. εάν ξ δεν καταστρέφει λειότητα για όλες τις δυνατές λείες συναρτήσεις, λέγεται και το ξ λείο διανυσματικό πεδίο. Με τέτοια θα δουλεύουμε.

- Αναλογία — όχι κατ' ορισμόν.

  Συνήθως, απεικονίσεις $\xi : C(M) \to \mathbb{R}$

  (i) $\xi(f+g) = \xi(f) + \xi(g)$

  (ii) $\xi(fg) = f(p)\,\xi(g) + g(p)\,\xi(f)$

  (iii) $\xi(\text{const}) = 0$

  Πρόσθεση $(\xi + \zeta)(f) = \xi(f) + \zeta(f) \quad \forall f \in C(M)$

  ⋮ Είναι n-διάστατος διαν. χώρος.

  Ορισμός ανεξάρτητος χάρτη και στο τέλος, σε χάρτη x^i, $\xi = \xi(x^i)\,\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Γραμμική Άλγεβρα: Ανεξάρτητη από τα προηγούμενα.

V, διανυσματικός χώρος στο $\mathbb{R}$, n-διάστ.

$f: V \to \mathbb{R}$ γραμμική εάν

$$f(x+\alpha y) = f(x) + \alpha f(y), \quad \forall x, y \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$V^* = \{ f, \ f: V \to \mathbb{R}, \ f \text{ γραμμική} \}$ = το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από $V \to \mathbb{R}$.

– <u>Πρόσθεση:</u> $f, g \in V^*$ $\quad f+g$? $\quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

αf ? $\quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

Ο V^* διανυσματικός χώρος στο $\mathbb{R}$, ο δυϊκός χώρος του V.

– Να τον καταλάβουμε: $\{e_1, \dots e_n\}$ βάση του V.

$\{f_1, \dots f_n\}$ βάση του V^*

$$f(x) = (A^1 f_1 + \dots + A^n f_n)(x^1 e_1 + \dots + x^n e_n) =$$

$$= \sum A^i x^j f_i(e_j) \ .$$

Ώστε αρκεί να ξέρουμε τι κάνουν τα f_i στα e_j

πώς δρουν τα διανύσματα βάσης $^{\text{του } V^*}$ στα διανύσματα βάσης του V:

Ορίζουμε

$f_1: \ f_1(e_1) = 1, \quad f_1(e_2) = \dots = 0.$

$f_2: \ f_2(e_1) = 0, \quad f_2(e_2) = 1, \ \dots \ f_2(e_n) = 0$

$f_i(e_j) = \delta_{ij}$ $\qquad$ Η δυϊκή βάση της $\{e_i\}$

$$\dim V^* = \dim V$$

– Παραδείγματα.

– $(V^*)^*$ natural isomorphic to V, δεν τους διακρίνουμε.

$v \in V$, $v^* \in V^*$, $v^{**} \in V^{**}$, $\quad v \xrightarrow{} v^{**}$ $\quad v^{**}(v^*) = v^*(v)$

Δοθέντων, v, v^*

Ταννστές – index notation.

- $V^a, V^b, \dots V^c$ διάφοροι διανυσ. πάνω στο $\mathbb{R}$
- διακρίνονται με τον δείκτη.
- Membership με τον δείκτη, αλλιώς, είναι μέλος.
- Δυϊκοί των, $V_a, V_b \dots$
- Πρόσθεση, ίδιο δείκτη και στην ίδια θέση.
- $\mu_a(\xi^a) = \mu_a \xi^a = \xi^a \mu_e = \xi^a(\mu_a)$, $\quad \xi^a : V^* \to V \ (= V^{**})$
- Γραμμικότητα → σαν πολλαπλασιασμός και επιμεριστός

$(k_1\mu_a + k_2\lambda_a)(k_3\xi^a + k_4\eta^e) = \dots$

⊛ $f : V^a \times V^b \to \mathbb{R}$ διγραμμική, γραμμική ως προς καθεμία.
Πολυγραμμική απεικόνιση.

⊛ $\{V^c, V_a, V_e, V^d\}$ διατεταγμένη συλλογή διανυσματικών χώρων πάνω στο $\mathbb{R}$, κανείς περισσότερο από μία φορά, κανείς ~~κανείς~~ μαζί με τον δυϊκό του. $\nexists$ κοινός δείκτης.

$V_c{}^{ae}{}_d$: σύνολο πολυγραμμικών απεικονίσεων

- Ορίζουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό.

~~Ταννστικό~~ Στοιχεία ταννστές

Ταννστικό γινόμενο $V_c \otimes V^a \otimes V^e \otimes V_d$

- Η εικόνα, πραγματικός αριθμός σαν γινόμενο, ανεξάρτητο σειράς που χρησιμοποιούμε οι ταννστές
- Διανύσματα του χώρου $V^{\cdot\cdot}$, ταννστές πάνω που αντίστοιχους χώρους.

⊛ ~~Συλλ~~ Συλλογή Διαν. χώρων → ταννστές με κάποια δομή δεικτών. Δείκτες, membership ⇒ ποιές απεικονίσεις παριστάνει ο ταννστής.

- Προσεταιριστικό + Επιμεριστικό το ταννστικό γινόμενο.
- Γενίκευση ~~πολλ~~ πολλαπλασιασμού ταννστή επί αριθμό.

- Ορολογία: Αναλλοίωτοι δείκτες
  Συναλλοίωτοι δείκτες
  Αναλλοίωτη τάξη = αριθμός αναλλοίωτων δεικτών
  συναλλοίωτη τάξη

Τανυστής τάξης $\binom{m}{n}$ $\binom{m}{0}$, $\binom{0}{n}$

$\binom{1}{0}$ = διάνυσμα κτλ. $\binom{0}{1}$ συναλλοίωτο ή 1-~~φορ~~ μορφή (one-form, covector)

$\binom{0}{0}$ βαθμωτό. Γενίκευση.

⊗ Κάθε τανυστής περιγράφει πολλές πολυγραμμικές απεικονίσεις.

$T^a{}_{bc}{}^d : V_a \times V^b \times V^c \times V_d \to \mathbb{R}$

$T^a{}_{bc}{}^d \alpha_a \beta^b \gamma^c \delta_d \to \mathbb{R}$

σταθερά $\alpha_a, \beta^b, \gamma^c$. $V_d \to \mathbb{R}$, άρα στοιχείο του V^d

$T^a{}_{bc}{}^d : V_a \times V^b \times V^c \to V^d$

σταθερά α_a, β^b: $T^a{}_{bc}{}^d : V_a \times V^b \to V_c{}^d$

- Πολυγραμμική απεικόνιση από καρτεσιανό γινόμενο μικρότερο από πλήθος δεικτών, σε κάποιο τανυστικό χώρο.
- Παραδείγματα για τανυστή $T^a{}_{bc}{}^d{}_e$

⊗ Τανυστικό γινόμενο $T^a{}_b$, $\Sigma^c{}_{de}$, δεν έχουν κανέναν κοινό δείκτη.

$M^a{}_b{}^c{}_{de} = T^a{}_b \Sigma^c{}_{de}$, τον ένα κοντά δίπλα στον άλλο.

- Προσεταιριστικό + Επιμεριστικό το τανυστικό γινόμενο.
- Γενίκευση ~~ι~~ αντικατασταθεί τανυστή επί αριθμό.

• Πρόσθεση τανυστών, ίδιους δείκτες, ίδια θέση, πιθανόν διαφορετική σειρά:

$V_m{}^p{}_q$, $V^p{}_{qm}$:

$T_m{}^p{}_q \, \alpha^m \beta_p \gamma^q = \tilde{T}^p{}_{qm} \, \alpha^m \beta_p \gamma^q, \ \forall \alpha, \beta, \gamma \Rightarrow$

$T_m{}^p{}_q \to \tilde{T}^p{}_{qm}$ και προσθέτουμε αυτά που ανήκουν στον ίδιο ακριβώς διανυσματικό χώρο.

$T_m{}^p{}_q + \Sigma^p{}_{qm} \in$ είτε $V_m{}^p{}_q$ ή $V^p{}_{qm}$, και καταλαβαίνετε τι εννοούμε.

(*) Έχουμε στη διάθεσή μας έναν μόνον διανυσματικό χώρο V.
(δύο επιπλέον πράξεις, ~~πρόσθεση και [illegible]~~ αντιμετάθεση, συστολή δεικτών).

V, αντίγραφά του $V^a, V^b, V^c, \dots$

$i^a : V \to V^a$, $i^b : V \to V^b$, $i^c : V \to V^c$

γραμμικές απεικονίσεις από V στον εαυτό του.

$i^a(\xi) = \xi^a$, $i^b(\xi) = \xi^b$, αντίγραφα του αρχικού διανύσματος ξ.

$\mu \in V^*$, $\mu_a \in V_a$, $\mu_b \in V_b$, ...

- $T^a{}_{bc} : V^* \times V \times V \to \mathbb{R}$, πολυγραμμική.

Χώρος $\tau^1{}_2$, τανυστής $\binom{1}{2}$. Είδαμε τους $\binom{1}{0}$, $\binom{0}{1}$, $\binom{0}{0}$.

Επίσης $T^a{}_{bc}\,\eta_a\,\xi^b\zeta^c = \zeta^c\,\eta_a\,T^a{}_{bc}\,\xi^b$ ....

- Fix ζ^c, $T^a{}_{bc}\,\eta_a\,\xi^b : V \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$T^a{}_{bc}\,\eta_a\,\xi^b \in V^* = \binom{0}{1}$ $\Rightarrow$

$T^a{}_{bc} : \tau^1{}_1 \to \tau^0{}_1$ $\qquad$ $T^a{}_{bc} : \tau^1{}_1 \to \tau^0{}_1$.

- Διάσταση n^3, βάση $\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \otimes (dx^\beta) \otimes dx^\gamma$

$$T^{ab}{}_c = T^{\alpha\beta}{}_\gamma \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\beta} \otimes dx^\gamma$$

- Γενικά $n^{k+\lambda}$.
- Συστολή δεικτών, $\tau^k{}_\lambda \to \tau^{k-1}{}_{\lambda-1}$.

  $T^{ab}{}_b$, συστολή $T^{\alpha\beta}{}_\beta$.
- Για $\binom{1}{1}$, $T^\alpha{}_\beta \Rightarrow$ ίχνος πίνακα.

- Εξωτερικό γινόμενο τανυστών.
- Αλλαγή συντεταγμένων
- Τανυστική άλγεβρα
- Τανυστικό πεδίο
- Λείο τανυστικό πεδίο.
- Ο μοναδιαίος τελεστής.

<u>Τανυστές</u> (Wald), παράλληλα συνιστώσες και τανυστές υποδηλώνονται με τους δείκτες τους.

Ελληνικά γράμματα ⇒ συνιστώσες

λατινικά γράμματα ⇒ ο ίδιος ο τανυστής.

Σε κάθε σημείο πολλαπλότητας έχουμε $T_p = V$, δ. αν. χώρο.

Διανύσματα $\xi = \xi^a$, ξ^a, η^a, συνιστώσες ξ^μ, $\xi = (\xi^a) = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Δυϊκός χώρος $T_p^* = V^*$, διανύσματα $\xi_a, \eta_a, \dots$

Δυϊκή βάση $\{dx^1, \dots dx^n\}$, $(dx^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i{}_j$.

Περιεκτικός συμβολισμός.

Δύο συστήματα συντεταγμένων, $\{x^i\}$, $\{\tilde{x}^i\}$.

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k}\right)\left(\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Ποιά είναι η $d\tilde{x}^i$?

$$(d\tilde{x}^i)\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right) = \delta^i{}_j = (dx^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = (dx^i)\left(\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k}$$

$$(d\tilde{x}^i)\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right) = \dots$$

Συμβολισμός $\eta(\xi) = \xi^a \eta_a$ αριθμός. $= \eta_a \xi^a = \eta^a(\xi_a), \dots$

Με συνιστώσες, $\eta(\xi) = (\eta_\mu dx^\mu)\left(\xi^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)$ <u>γραμμικότητα</u>

$$\eta_\mu \xi^\nu (dx^\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \eta_\mu \xi^\nu \delta^\mu{}_\nu = \eta_\mu \xi^\mu.$$

$\eta_a \xi^a$ και $\eta_\alpha \xi^\alpha$ το ίδιο πράγμα, γενικά με διανύσματα και με συνιστώσες.

- Πολυγραμμική απεικόνιση. Διγραμμική,
  $T: V \times V \to \mathbb{R}$, $T(v_1, v_2)$ αριθμός, ένα σταθερό, γραμμική ως προς το άλλο. Παρόμοια πολυγραμμική.

- Τανυστής (k, l), $k=$ contravariant, ανταλλοίωτη, πάνω δείκτης
  $l=$ covariant, συναλλοίωτη, κάτω δείκτης.

$$T : \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{k} \times \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{l} \to \mathbb{R},$$ πολυγραμμική.

Συμβολισμός $\quad T = T^{a_1 a_2 \dots a_k}{}_{b_1 b_2 \dots b_l} = T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$.

Διανύσματα $\quad \eta_{a_1}, \eta_{a_2}, \dots \eta_{a_k}, \ \xi^{b_1}, \dots \xi^{b_l}$

Εικόνα $\quad \cancel{T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}}\ T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}\, \eta_{a_1} \cdots \eta_{a_k}\, \xi^{b_1} \cdots \xi^{b_l} \in \mathbb{R}$.

Διανύσματα βάσης: $\quad dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_l} \otimes \dfrac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \otimes \dots \otimes \left(\dfrac{\partial}{\partial x^{\nu_k}}\right)$

Ο τανυστής είναι

$$T = T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\mu_1 \dots \mu_l}\, dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_l} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}}\right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu_k}}\right)$$

Τανυστής $T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\mu_1 \dots \mu_l}$, αντίστοιχα, $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$

$\xi^a : V^* \to \mathbb{R}$

$\eta_a : V \to \mathbb{R}$

⊗ Τανυστής $\binom{2}{1}$: $\quad T: V^* \times V^* \times V \to \mathbb{R}$, $\quad T^{ab}_{\ \ c}$

$\eta_a \in V^*$, $\zeta_a \in V^*$, $\xi^a \in V$, $\quad T(\eta, \zeta, \xi) = T^{ab}_{\ \ c}\,\eta_a \zeta_b \xi^c \in \mathbb{R}$.

όρισε χώρο $\mathcal{T}^k_\lambda$, τανυστ. $\binom{k}{\lambda}$.

Τι είναι $T^{ab}_{\ \ c}\,\eta_a \xi^c : V \to \mathbb{R}$, άρα

$T^{ab}_{\ \ c} : V^* \times V \to V$,

οι τανυστές είναι γραμμικές απεικονίσεις από χώρους σε χώρους.

⊗ Τανυστής $\binom{0}{1}$, στοιχείο του V^*

ταν. $\binom{1}{0}$, στοιχείο του $(V^*)^*$, άρα του V.

$\binom{0}{0}$, αριθμός.

⊗ $T^{ab}_{\ \ c}$, βάση $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\beta} \otimes dx^\gamma$, συνιστώσες $T^{\alpha\beta}_{\ \ \ \gamma}$,

$$T = (T^{ab}_{\ \ c}) = T^{\alpha\beta}_{\ \ \ \gamma} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) \otimes (dx^\gamma).$$

Διάσταση n^3, γενικά n^{k+l}, Διανυσματικός χώρος.

⊗ Συστολή δεικτών, ενός ανταλλοίωτου και ενός συναλλοίωτου.

ο 3-τος ανταλλοίωτος και ο 2ος συναλλοίωτος δείκτης.

Από $T(k,l) \to T(k-1, l-1)$. Συνιστώσες,

$T^{ab}_{\ \ b}$, συνιστώσες $T^{\alpha\beta}_{\ \ \ \beta} = \sum_\beta T^{\alpha\beta}_{\ \ \ \beta}$

$$\left(T^{\alpha\beta}_{\ \ \ \gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\beta} \otimes dx^\gamma\right)\left(dx^\sigma, \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right) =$$

$$T^{\alpha\beta}_{\ \ \ \gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \delta_\beta^{\ \sigma} \delta^\gamma_{\ \sigma} = T^{\alpha\beta}_{\ \ \ \gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \delta_\beta^{\ \gamma} = T^{\alpha\beta}_{\ \ \ \beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right).$$

⊗ Αν $\binom{1}{1}$, $T^\alpha_{\ \beta}$, $T^a_{\ b}$, $\quad T^a_{\ a} = T^\alpha_{\ \alpha} = $ trace, ίχνος του T.

⊗ Εξωτερικό γινόμενο τανυστών.

$T^{ab}{}_c$, $S^d{}_e$, $\quad (T^{ab}{}_c \otimes S^d{}_e)((\eta_a, \xi_b, \gamma^c), (\mu_d, \nu^e)) =$

$= (T^{ab}{}_c\, \eta_a \xi_b \gamma^c)(S^d{}_e\, \mu_d \nu^e)$ αριθμός.

Συνιστώσες $\quad T^{\alpha\beta}{}_\gamma\, S^\delta{}_\varepsilon$

⊗ Ο τανυστής ο ίδιος, ανεξάρτητος των συστημάτων συντεταγμένων.

$$T^\alpha{}_\beta \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \otimes dx^\beta = \tilde{T}^i{}_j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\, d\tilde{x}^j$$

$$T^\alpha{}_\beta \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\rho}\, d\tilde{x}^\rho = \tilde{T}^k{}_\rho \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k}\, d\tilde{x}^\rho \Rightarrow$$

$$\tilde{T}^k{}_\rho = T^\alpha{}_\beta \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\rho}$$, ένας όρος για κάθε δείκτη.

$T^a{}_b$ με index notation, ο ίδιος ο τανυστής, ανεξάρτητος της βάσης.

⊗ Ορολογία: Τανυστική άλγεβρα. Σε κάθε σημείο p της πολλαπλότητας. Τανυστές όλων των ειδών.

* Τανυστικό πεδίο $T(p)$ στην πολλαπλότητα.

* Πότε λείο. η_a : $\forall\, \xi^a$ λείο, $\eta_a \xi^a$ λείο.

$T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}$ λείο, $\forall\, \xi^{\cdot\cdot}, \eta_{\cdot\cdot}$ λεία, $T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}\, \xi^{\cdot\cdot}\, \eta_{\cdot}$ λεία.

Αρκεί οι συνιστώσες να είναι λείες συναρτήσεις.

⊗ Ο Μοναδιαίος τανυστής, $\delta^a{}_b$, συν. $\delta^\alpha{}_\beta$

$\delta^a{}_b\, \xi^b$, $\quad \delta^\alpha{}_\beta\, \xi^\beta = \xi^\alpha$, ίδιο παν.

$$\tilde{\delta}^\alpha{}_\beta = \delta^k{}_\lambda \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} = \delta^\alpha{}_\beta$$

⊛ Μετρική: Τι χρειάζεται να ξέρουμε, τί δομή να δοθεί, ώστε να ξέρουμε το απειροστό μέτρο, απειροστή τετραγωνική απόσταση που αντιστοιχεί σε δοθείσα μετατόπιση απειροστή.

⊛ Μετατόπιση, ξ^a: τετραγωνική στο ξ, $V\times V \to \mathbb{R}$

g_{ab}, $\binom{0}{2}$. Τότε, όταν δοθεί ξ^a, $|\xi|^2 = g_{ab}\xi^a\xi^b$.

Ο τανυστής $g = g_{\mu\nu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu = ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$

$$g(\xi,\xi) = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu\, \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\, \xi^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} = g_{\mu\nu}\xi^\alpha\xi^\beta \delta^\mu{}_\alpha \delta^\nu{}_\beta =$$

$$= g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu$$ για συνιστώσες.

$g_{ab}\xi^a\xi^b$ το πεδίο.

μετρικό το εσωτερικό γινόμενο.

⊛ Υπόθεση g συμμετρικός: $g(\xi,\zeta) = g(\zeta,\xi)$ $\forall\xi, \forall\zeta$.

$$g_{\mu\nu}\xi^\mu\zeta^\nu = g_{\mu\nu}\zeta^\mu\xi^\nu = g_{\nu\mu}\xi^\mu\zeta^\nu \Rightarrow g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

Το γράφουμε $g_{ab} = g_{ba}$.

⊛ Αντιστρεπτός.

<u>Ο Μοναδιαίος</u> τανυστής $\delta^a{}_b$, $\delta^\mu{}_\nu$

$\delta^a{}_b\xi^b$ συν, $\delta^\mu{}_\nu\xi^\nu = \xi^\mu$ ίδιες.

$\delta^a{}_b : V \to V$ διατηρεί το διάνυσμα.

$\exists\ g^{ab}$, $g^{ab}g_{bc} = \delta^a{}_c$.

Συνιστώσες $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma$. Οι συνιστώσες δίνονται από τον αντίστροφο πίνακα!

Συνθήκη $\det g \neq 0$. Έτσι που καταργείται ο χώρος με γεωμετρία μας.

- Σε σημείο και ως τανυστικό πεδίο.
- Διάνυσμα ξ^a, $\to$ $g_{ab}\xi^b$ συναλλοίωτο, συμβολίζουμε $\xi_a = g_{ab}\xi^b$.

$\xi^b = g^{ab}\xi_a = g^{ba}\xi_a$. 1-1 αντιστοιχία

συναλλοίωτων και ανταλλοίωτων, ίδιο σύμβολο, δεν τα ξεχωρίζουμε.

⊛ Όταν δοθεί ο g_{ab}, έχουμε έναν ισομορφισμό μεταξύ των T_p και T_p^*.

⊛ Αν $T^{ab}{}_c$, $\quad T_a{}^{bc} = g_{am}\, g^{cn}\, T^{mb}{}_n$.

Διαδοχικά ανεβοκατεβάσματα δεν αλλάζουν τον τανυστή ⇒ συμβιβαστός συμβολισμός.

$$T^{a\cdots}_{\cdots} \qquad T_a = g_{am} T^m \,, \qquad T^a = g^{an}(g_{nm} T^m) =$$
$$= \delta^a{}_m T^m = T^a \,, \quad \text{ο.κ.}$$

- Από ειδική σχετικότητα $-c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$ διατηρείται.
  $ds^2 = \cdots$ διατηρείται, αλλά αναλλοίωτη.
- Υπόθεση, $(-+++)$.
- Γενικά, θετικά ορισμένη → Riemannian
  $(-++\cdots+)$, Lorentzian μετρική.

- ισομορφισμός μεταξύ V, V^*.

Motivation: βαθμωτό f, παρα f ? όχι βαθμωτό, γιατί πια κατεύθυνση, βαθμωτό πλησίας διανύσματα. Όπως παράγωγοι προσθέτει έναν δείκτη παραπάνω.

Διαφορίσεις.

- Τελεστής παραγώγισης : $\nabla : T^{\cdots}_{\cdots} \in \mathcal{T}^k_l \to \mathcal{T}^k_{l+1}$.

ή και συναλλοίωτη παράγωγος.

(i) Γραμμική $\nabla(\alpha T^{\cdots}_{\cdots} + \beta S^{\cdots}_{\cdots}) = \alpha \nabla T^{\cdots}_{\cdots} + \beta \nabla S^{\cdots}_{\cdots}$

(ii) Leibnitz $\nabla(TS) = (\nabla T)S + T(\nabla S)$

Συμβολισμός $\nabla_a T^{bc}{}_d$ $\quad \nabla_d T^{bc}{}_a$, πολύ χρήσιμη.

Αλλά τον ∇_a όχι σαν συναλλοίωτο διάνυσμα.

(i) Γραμμικό

(ii) Leibnitz

(iii) Μετατίθεται με συστολή, $\nabla_d(T^{a_1\cdots m\cdots a_k}{}_{b_1\cdots m\cdots b_l})$ έχει νόημα.

(iv) Συμβιβαστός με τα εφαπτόμενα διανύσματα.

$t = t^a \in V$, $\quad t(f)$ βαθμωτό,

$\nabla_a f$ διάνυσμα, $\quad t^a \nabla_a f$ βαθμωτό, $\quad t(f) = t^a \nabla_a f$.

(v) Torsion free, κανείς ορίζει. $\forall$ βαθμωτό

$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$, όπως και οι συνήθεις παραγωγίσεις.

– όχι για τανυστές, γίνεται κυρτός χώρος.

Τυπική παρατήρηση: $\tilde{\nabla}_a, \nabla_a$ συμφωνούν στη δράση τους σε βαθμωτά πεδία.

⊗ Υπάρχουν : Αν δοθεί χάρτης

συνήθης διαφόριση αναφορικά με τις εν λόγω χάρτη

$\{x^1, \dots x^n\}$, $\quad \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ $\quad T^{\cdots}_{\cdots}$ components, ικανοποιεί

$\frac{\partial}{\partial x^\sigma}(T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l})$ κλπ.

όχι κανονική κατασκευή!

Δεν χρησιμοποιεί μόνο τη δομή της πολλαπλότητας.

Globally, τοπολογική ιδιότητα, paracompact.

⊗ Παράδειγμα, $\xi^a = \delta^a_b \xi^b \Rightarrow \nabla_c \delta^a_b = 0$.

⊛ Παρατηρησή: Υπάρχουν άπειροι, ταξινόμηση. Μόνο όταν έχει και βάση επιλέγεται συνθήκη, $\exists$ ένας και μοναδικός.

$\tilde{\nabla}_a - \nabla_a$? Δύο, συμφωνούν στα βαθμωτά.
Στα συναλλοίωτα.
$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(w_b + t_b)$ γραμμικό
$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(f w_b) = f\,(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\, w_b$ γραμμικό:
$\tilde{\nabla}_a - \nabla_a : \tau^0_1 \to \tau^0_2 \to \exists\ C^m{}_{ab} : \tau^1_2$
$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\, w_b = -C^m{}_{ab}\, w_m$

⊛ Για συναλλοίωτα διανύσματα,
$\tilde{\nabla}_a w_b = \nabla_a w_b + C^m{}_{ab}\, w_m$. πρόσημο irrelevant.

Να γράψετε και την ιδιότητα (v)

- Έστω $w_b = \nabla_b f$

$\tilde{\nabla}_a \nabla_b f = \nabla_a \nabla_b f \pm C^m{}_{ab}(\nabla_m f)$, $\forall f$

?

$C^m{}_{ab}(\nabla_m f) = \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f - \nabla_a \nabla_b f = \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a f - \nabla_b \nabla_a f =$
$= C^m{}_{ba}(\nabla_m f)$,

Άρα $C^m{}_{ab}$ συμμετρικό.

⊛ Για διανύσματα $\binom{0}{1}$ τόσοι τελεστές παραγώγισης όσοι $C^m{}_{ab}$, $C^m{}_{ab} = C^m{}_{ba}$. Και των τανυστικά πεδία. Connection tensor field.

- Αυτά γράφουν για όλους τους τανυστές, κάθε τάξης.

⊛ $\forall$ πεδία ξ^a, w_a, $\xi^a w_a$ = βαθμωτό
$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(\xi^b w_b) = 0$ ...
$(\tilde{\nabla}_a \xi^b - \nabla_a \xi^b)\, w_b + \xi^m C^b{}_{am}\, w_b = 0$, $\forall w_b \Rightarrow$

$(\tilde{\nabla}_a \xi^b - \nabla_a \xi^b) = -C_a{}^b{}_m\, \xi^m$.

- $\tilde{\nabla}_a T^{\cdots}_{\cdots} = \nabla_a T^{\cdots}_{\cdots} + \cdots - \cdots$ για κάθε τανυστή.

  σ' αυτή τη φάση πρόσημα είναι just convention

- Παράγωγοι, σύμβολα Christoffel.

  Έστω δίνεται (M και χάρτης) έχω ∂_a = συνήθη παραγώγιση.

  Έχω και παράγωγο ∇_a. Το αντίστοιχο $C^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ που συνδέει τις ∇_a και ∂_a το λέμε σύμβολο Christoffel.

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla_a \xi^b &= \partial_a \xi^b + \Gamma^b_{am}\xi^m \\ \nabla_a w_b &= \partial_a w_b - \Gamma^m_{ab} w_m \end{aligned}}$$

  Εξαρτάται από τον ∂_a και για κάθε επιλογή των $\Gamma^m_{ab} = \Gamma^m_{ba}$ όλες τις παραγωγίσεις. Αλλά από ισχύει σε δοσμένο χάρτη.

  $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ όχι 100% τανυστικό πεδίο, εξαρτάται και από τον χάρτη. Σε άλλον χάρτη $\nabla_a w_b$ με αλλαγή συντεταγμένων συνδυασμός $\partial_a w_b$, $-\Gamma^m_{ab} w_m$ με σωστή αλλαγή συντεταγμένων.

- Θεώρημα: (M, g_{ab}), $\exists$ μοναδικός τελεστής διαφόρισης ∇_a, $\nabla_a g_{bc} = 0$. Η αντίστοιχη παράγωγος η συμβιβαστή με τη μετρική g_{ab}.

  Μέγεθος C^m_{ab}, $\left[\binom{n}{2}+n\right]n = \left[\frac{n(n-1)}{2}+n\right]n = \frac{n^2(n+1)}{2}$

  $\nabla_a g_{bc} = 0$ ίδιοι βαθμοί ελευθερίας, ίδιος αριθμός εξισώσεων και αγνώστων.

  Απόδ: έστω $\tilde{\nabla}_a$ (∂_a) τυχαίο, $\tilde{\nabla}_a g_{bc} \neq 0$. ($\partial_a$) $\qquad \tilde{\nabla}_a \to \partial_a$

$$\nabla_a g_{bc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - C^m_{ab} g_{mc} - C^m_{ac} g_{bm}$$

$$\begin{aligned}
+\quad & \tilde{\nabla}_a g_{bc} = C^m_{ab} g_{mc} + \cancel{C^m_{ac} g_{bm}} \\
+\quad & \tilde{\nabla}_b g_{ca} = \cancel{C^m_{bc} g_{ma}} + C^m_{ba} g_{cm} \\
-\quad & \tilde{\nabla}_c g_{ab} = \cancel{C^m_{ca} g_{mb}} + \cancel{C^m_{cb} g_{am}}
\end{aligned}$$

$$2\, C^m_{ab} g_{mc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} + \tilde{\nabla}_b g_{ca} - \tilde{\nabla}_c g_{ab} \Rightarrow$$

$$C^{n}_{ab} = \frac{1}{2} g^{nc}\left(\tilde{\nabla}_a g_{bc} + \tilde{\nabla}_b g_{ac} - \tilde{\nabla}_c g_{ab}\right)$$

Μοναδική εκ κατασκευής.

- Αν $\tilde{\nabla}_a$ ήταν ο ∂_a, τα σύμβολα Christoffel.

Δηλαδή. Δίνεται χάρτης $\{x^\mu\}$ υπολογίζουμε

$$\Gamma^{c}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cm}\left(\partial_a g_{bm} + \partial_b g_{am} - \partial_m g_{ab}\right)$$

$$\Gamma^{k}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{kp}\left(\partial_\lambda g_{\mu p} + \partial_\mu g_{\lambda p} - \partial_p g_{\lambda\mu}\right)$$

$$\nabla_a \xi^b = \partial_a \xi^b + \Gamma^{b}_{am}\xi^m \quad , \text{κ.λ.π.}$$

Είναι η παράγωγος η συμβιβαστή με τον g_{ab}.

⊛ Γιατί είναι απαραίτητη η $\nabla_a g_{bc} = 0$; για το συμβολισμό μας. $\nabla_a \xi_b$ τι είναι, επίσης και $\nabla_a(g_{bc}\xi^c)$ ή $g_{cb}(\nabla_a \xi^c)$. είναι ίδια μόνο για $\nabla_a g_{bc} = 0$.

⊛ ~~Διατηρείται το εσωτερικό γινόμενο, σε μετατόπιση κατά μήκος καμπύλης μας.~~

- Παράλληλη μετατόπιση διανυσμάτων

Γεωδαισιακές

εσωτερικό γινόμενο διατηρείται

Παράδειγμα $\tilde{g}_{ab} = g_{ab} + l_a l_b$

Curvature.

- Στόχος μας να ορίσουμε καμπυλότητα.

Σφαίρα καμπυλωμένη επιφάνεια, το καταλαβαίνουμε γιατί έχουμε στη διάθεσή μας μία παραπάνω διάσταση. Πώς να το δούμε, παραμένοντας δι-διάστατοι?

- Χρησιμοποιούμε παράλληλη μεταφορά.
- Καμπύλη $x^\mu = x^\mu(\lambda)$, $\xi^\mu = \dfrac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}$, $\xi^a = \xi^\mu \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$

Αδιάφορα θα λέμε ξ^a περιγράφει μία καμπύλη.

- v^a παράλληλη μεταφορά κατά μήκος του ξ^a, η γωνία σταθερή είναι.

Στη σφαίρα δεν γυρίζει στο ίδιο μετά από μεταφορά σε κλειστή καμπύλη $\Rightarrow$ καμπυλότητα.

Ισοδύναμα δύο μεταφορές, απειροστές, δεν συμπίπτουν $\Rightarrow$ κάποιες παραγωγίσεις δεν συμπίπτουν, οι διαδοχικές παραγωγίσεις δεν αντιμετατίθενται.

<u>Επίσης:</u> Καμπύλη ξ^a, $\xi^\mu = \dfrac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}$, βαθμωτό $f(x^\mu)$

$$\xi^a \nabla_a f = \xi^\mu \nabla_\mu f = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{df}{d\lambda}$$

, η μεταβολή της f κατά μήκος της καμπύλης.

<u>Γενίκευση:</u> Μεταβολή των η^a, ω_a, $T^{\cdots}_{\cdots}$ κατά μήκος της ξ^a: $\xi^m \nabla_m \eta^a$, $\xi^m \nabla_m \omega_a$, $\xi^m \nabla_m T^{\cdots}_{\cdots}$.

- Παράλληλη μεταφορά του η^a: $\xi^m \nabla_m \eta^a = 0$,

$$\xi^m \left(\partial_m \eta^a + \Gamma^a_{mn}\eta^n\right) = 0,$$

$$\xi^m \partial_m \eta^a + \Gamma^a_{mn}\xi^m \eta^n = 0.$$

Προσοχή, σταθερό $\Rightarrow$ όχι μηδέν

Συνιστώσες $\xi^\mu \partial_\mu \eta^\nu + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\xi^\alpha \eta^\beta = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{d\eta^\nu}{d\lambda} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\eta^\beta = 0.$$

- Όταν δοθεί η καμπύλη, προκύπτει είναι σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, Δόση η^μ σ' ένα σημείο → παντού η^μ προσδιορίζεται μοναδικά.
- Καμπύλη γεωδαισιακή, $t^m \nabla_m t^a = 0$, το εφαπτόμενο διάνυσμα παράλληλα προς τον εαυτό του.

- Συν πράξη: Μετρική g_{ab}, ∇_a συμβιβαστή, Γεωδαισιακή $\xi^m \nabla_m \xi^a = 0$. $v^a \parallel \xi^a$, $\xi^m \nabla_m v^a = 0$.
  Το $\xi^a v_a$ διατηρείται κατά μήκος της καμπύλης - $\xi^a v^b g_{ab}$, το εσωτερικό γινόμενο, που έχει το συνημίτονο της γωνίας.
  $\xi^m \nabla_m (g_{ab} \xi^a v^b) = 0$.
  Ή, $v^a, w^b \parallel$ κατά ξ^a, $g_{ab} v^a w^b$ διατηρείται.

- Καμπυλότητα: Μετριέται με το κατά πόσο διαδοχικές παρεκτροπές σε αναλλοίωτα διανύσματα δεν μετατίθενται.
- Θεωρούμε $\Delta_{ab} = \nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a$, τελεστή.
  $\Delta_{ab} f = 0$. $\Delta_{ab} W_c = ??$

$$\Delta_{ab} (f W_c) = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(f w_c) =$$
$$= \nabla_a [(\nabla_b f) w_c + f \nabla_b w_c] - (a \leftrightarrow b) =$$
$$= (\nabla_a \cancel{\nabla_b f}) w_c + \cancel{(\nabla_b f)(\nabla_a w_c)} + \cancel{(\nabla_a f)(\nabla_b w_c)} + f \nabla_a \nabla_b w_c -$$
$$- [(\nabla_b \cancel{\nabla_a f}) w_c + \cancel{(\nabla_a f)(\nabla_b w_c)} + \cancel{(\nabla_b f)(\nabla_a w_c)} + f \nabla_b \nabla_a w_c] =$$
$$= f (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) w_c$$
, γενικότερα, γραμμικά.

$\Delta_{ab} (T^{::}_{::} S^{::}_{::}) = (\Delta T^{::}_{::}) S^{::}_{::} + T^{::}_{::} (\Delta S^{::}_{::})$

• $(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)$ ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz σε τανυστικά γινόμενα. Έτσι υπολογίζεται το $(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)T^{\cdots}_{\cdots}$

$\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a$: Γραμμικό, από $\binom{0}{1}$ σε $\binom{0}{3}$,
Άρα κάποιος τανυστής - τανυστικό πεδίο $\binom{1}{3}$,
$R_{abc}{}^d$

$$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\,w_c = R_{abc}{}^d\, w_d$$

Τανυστής του Riemann.

- Όπως και με την συνοχή, ο ίδιος τανυστής μετρά την μη αντιμεταθετικότητα σε ξ^a και γενικότερα σε κάθε τανυστικό πεδίο.
- $$0=(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)(w_c\xi^c)=$$
$$=\nabla_a[(\nabla_b w_c)\xi^c+w_c(\nabla_b\xi^c)]-(a\leftrightarrow b)=$$
$$=(\nabla_a\nabla_b w_c)\xi^c+(\nabla_b w_c)(\nabla_a\xi^c)+(\nabla_a w_c)(\nabla_b\xi^c)+w_c\nabla_a\nabla_b\xi^c)-$$
$$-(a\leftrightarrow b)=$$
$$=(\nabla_a\nabla_b w_c-\nabla_b\nabla_a w_c)\xi^c+w_c(\nabla_a\nabla_b\xi^c-\nabla_b\nabla_a\xi^c)=$$
$$=R_{abc}{}^m w_m\xi^c+w_c(\nabla_a\nabla_b\xi^c-\nabla_b\nabla_a\xi^c)=$$
$$=R_{abm}{}^c w_c\xi^m+w_c(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\xi^c \Rightarrow$$

$$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\xi^c=-R_{abm}{}^c\xi^m.$$

- Και για τυχαίο $(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)T^{\cdots}_{\cdots}=\cdots$

- Επειδή θα έχουμε μετρική g_{ab}, ∇_a ο $\nabla_a g_{bc}=0$
Θα γράφομε R_{abcd}.

Ιδιότητες

1) Ορισμός $R_{abc}{}^d=-R_{bac}{}^d$.
Συμβολισμός, ( ), [ ]

Συμβολισμοί: Συμμετρικό τμήμα τανυστή.

- $T_{(ab)} = \frac{1}{2!}\left(T_{ab} + T_{ba}\right)$
- $T_{(abc)} = \frac{1}{3!}\left(T_{abc} + T_{bca} + T_{cab} + T_{bac} + T_{acb} + T_{cba}\right)$
- $T_{ab} = T_{(ab)} \Leftrightarrow T_{ab} = T_{ba}$, συμμετρικός.
- $T_{((ab)c)} = T_{(abc)}$
- $T_{(abc)} = T_{(bac)}$ e.t.c.
- Αντισυμμετρικό κομμάτι: $T_{[ab]} = \frac{1}{2!}\left(T_{ab} - T_{ba}\right)$

  $T_{ab} = T_{[ab]} \Leftrightarrow T_{ab} = -T_{ba}$.

  $T_{[abc]} = \frac{1}{3!}\left(T_{abc} + T_{bca} + T_{cab} - T_{cba} - T_{bac} - T_{acb}\right)$.

Το $1/n!$ μπαίνει ώστε

(i) Αν συμμετρικός, συμμετρικό κομμάτι του να ισούται με το ίδιο τον τανυστή.

- Δυο φορές → το ίδιο.

(ii) Αν αντισυμμετρικός, το αντισυμμετρικό κομμάτι του να ισούται με τον ίδιο τον τανυστή.

$T_{(abc)} = T_{(bac)}$, $T_{[abc]} = -T_{[bac]}$

- Γενικά $T_{[(ab),c]} = 0$, $T_{([ab],c)} = 0$.

  $T_{ab} = T_{(ab)} + T_{[ab]}$.

- Όταν παρενθέσεις περιβάλλουν παρενθέσεις ή αγκύλες περιβάλλουν αγκύλες, οι εσωτερικές παραλείπονται.
- Όταν οι μεν περιβάλλουν τις δε, είναι μηδέν.
- Όταν έχουν κοινό δείκτη, κοινούς δείκτες, αλλά δεν περιέχει η μία την άλλη, για τα τελευταία αποτελέσματα, υπολογίζεται σε δύο δόσεις.

- Ιδιότητες τανυστή Riemann:

Ορισμός $\nabla_{[a}\nabla_{b]}\xi_c = \frac{1}{2} R_{abc}{}^{m}\xi_m$.

i) $R_{[ab]c}{}^{m} = R_{abc}{}^{m}$.

ii) Έστω $\xi_a = \nabla_a f$, τυχαίο βαθμωτό f,

$$\frac{1}{2} R_{abc}{}^{m}(\nabla_m f) = \nabla_{[a}\nabla_{b]}\nabla_c f \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} R_{[abc]}{}^{m}(\nabla_m f) = \nabla_{[a}\nabla_{b}\nabla_{c]} f = \nabla_{[a}(\nabla_b\nabla_{c]} f) =$$

$$= \nabla_{[a}\nabla_{(b}\nabla_{c)]} f = 0 \Rightarrow$$

$$R_{[abc]}{}^{m} = 0.$$

$abc + bca + cab - cba - bac - acb = 0 \Rightarrow$

$2(abc + bca + cab) = 0 \Rightarrow$

$R_{abc}{}^{m} + R_{bca}{}^{m} + R_{cab}{}^{m} = 0$.

(iii) Αν υπάρχει και μετρική, $R_{abcd} = R_{abc}{}^{m} g_{md} \Rightarrow$

$R_{ab[cd]} = R_{abcd}$.

$$0 = (\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a) g_{cd} = R_{abc}{}^{m} g_{md} + R_{abd}{}^{m} g_{cm} =$$

$$= R_{abcd} + R_{abdc} \Rightarrow$$

$R_{....}$ αντισυμμετρικός στους δύο πρώτους και τους δύο τελευταίους δείκτες του.

(i), (ii), (iii) $\Rightarrow$ Είναι όλες δύο αυτές συνέπειες αυτών, χρήσιμες.

~~$R_{abcd} = R_{cdab}$ συμμετρικός στην εναλλαγή των δεικτών.~~

$R_{[abc]d} = 0 \Rightarrow R_{abcd} + R_{bcad} + R_{cabd} = 0$

~~[...] για τα b, c, d:~~

~~$R_{a[bcd]} + R_{[bc\underline{a}d]} +$~~

iv) $R_{abcd} - R_{bcda} - R_{acbd} = 0$

[. 3 από b, c, d :

$R_{a[bcd]} - R_{[bcd]a} - R_{a[cbd]} = 0 \Leftrightarrow$

$R_{a[bcd]} + R_{a[bcd]} = 0 \Rightarrow \quad R_{a[bcd]} = 0$

— 20 ανεξάρτητες συνιστώσες

(v) όχι ανεξάρτητη, δυναμική, $R_{abcd} = R_{cdab}$.

⊛ Ταυτότητα Bianchi, $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{e} = 0$,

Η μόνη διαφορική σχέση.

⊛ Επίπεδος χώρος, Διαλέγω καρτεσιανές συντεταγμένες, θα ο ~~τελ~~ τελεστής, η παράγωγος του συστήματος των μετρική.

$g_{\mu\nu}$ σταθερά $\Rightarrow \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$

$(\partial_a \xi_b)_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu$

$\partial_a \partial_b \xi_c$ συνιστώσες $\partial_\alpha \partial_\beta \xi_\gamma$, οι μερικές παραγωγίσεις μετατίθενται $\Rightarrow$

$\partial_\alpha \partial_\beta \xi_\gamma - \partial_\beta \partial_\alpha \xi_\gamma = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda} = 0 \Rightarrow$

$R_{abc}{}^{d} = 0$. Και αντίστροφο, δύσκολο.

Απόλυτο κριτήριο πότε ένας χώρος είναι επίπεδος, $R_{\dots\cdot} = 0$.

⊛ Ταυτότητα Bianchi

Έκφραση για τον τανυστή Riemann.

- Bianchi $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{e} = 0$. Για την απόδειξη, δες αναλυτική και γεωμετρική.

- $$\nabla_a \left(\nabla_{[b} \nabla_{c]} \xi_d \right) = \nabla_a \left(\tfrac{1}{2} R_{bcd}{}^{m} \xi_m \right) =$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(\nabla_a R_{bcd}{}^{m} \right) \xi_m + \tfrac{1}{2} R_{bcd}{}^{m} \left(\nabla_a \xi_m \right)$$

$$\nabla_{[a} \nabla_{b]} \left(\nabla_c \xi_d \right) = \tfrac{1}{2} R_{abc}{}^{m} \left(\nabla_m \xi_d \right) + \tfrac{1}{2} R_{abd}{}^{m} \left(\nabla_c \xi_m \right)$$

Άρα

$$\left(\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{m} \right) \xi_m + \cancel{R_{[bc\underline{d}}{}^{m} \left(\nabla_{a]} \xi_m \right)} =$$

$$= \underbrace{R_{[abc]}{}^{m}}_{=0} \left(\nabla_m \xi_d \right) + \cancel{R_{[ab\underline{d}}{}^{m} \left(\nabla_{c]} \xi_m \right)}$$

Hence $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{m} = 0$.

- Ricci, R, Einstein, Contracted Bianchi.

- Riemann, αποτυχία παραγωγίσεων να αντιμετατίθενται:
$$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)w_c = R_{abc}{}^{m}w_m$$
$$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)w^c = -R_{abm}{}^{c}w^m.$$

- Συμμετρίες ανεξάρτητες.
$$R_{abcd} = R_{[ab]cd}$$
$$R_{[abc]d} = 0.$$
$$R_{ab[cd]} = R_{abcd}.$$
- Η δεύτερη αναλυτικά,
$$R_{abcd} + R_{bcad} + R_{cabd} = 0 \Leftrightarrow$$
$$R_{abcd} - R_{bcda} - R_{acbd} = 0$$
πάρε [ ] των $b, c, d \Rightarrow R_{a[bcd]} = 0$

Επίσης $R_{abcd} = R_{cdab}$.

Οι δύο τελευταίες δεν είναι ανεξάρτητες.

Συνολικά 20 συνιστώσες.

- Συμβολισμός, παρουσία μετρικής:
$$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)w^c = -R_{abm}{}^{c}w^m = R_{ab}{}^{c}{}_{m}w^m,$$
πάντα ίδια σειρά, πάντοτε +, δείκτες στη συνοχή θέση.
- Πρόγραμμα, σχετικότητα, εξισώσεις Einstein.

Trace, ίχνος του τανυστή Riemann. Ποιές δυνατές συστολές; $R_{ac} = R_{amc}{}^{m}$, πρώτο-τρίτο ή δεύτερο-τέταρτο. Τανυστής Riemann.

Trace του Ricci, $R = R_m{}^m$, βαθμωτή καμπυλότητα. Ricci συμμετρικός, 10 βαθμούς, 50% της καμπυλότητας.

Einstein $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$, συμμετρικός.
Εξίσωση Einstein :

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \quad \text{ή} \quad G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad \text{ή} \quad G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}.$$

Κενό, $G_{ab} = 0$, $R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 0 \Rightarrow R = 0 \Rightarrow$
$R_{ab} = 0$.

• Weyl tensor. Trace-free τμήμα της καμπυλότητας.
$n \geq 3$

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{2}{n-2} \left(g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a} \right) - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R \, g_{a[c} g_{d]b}$$

ίδιες συμμετρίες με τον Riemann.

$$R_{abcd} \, g^{bd} = C_{abcd} \, g^{bd} + \dots$$
$$R_{ac} = C_{abcd} \, g^{bd} + R_{ac}$$

Όλες οι traces του τανυστή του Weyl είναι μηδέν.

Σχετικότητα: $n=4$, g_{ab} $-+++$, 20 βαθμοί ελευθερίας.
Ricci κομμάτι καθορίζεται από τις πηγές.
C_{abcd} απροσδιόριστο, βαρυτικό πεδίο, κύματα βαρύτητας, δυναμικοί βαθμοί ελευθερίας.
C_{abcd} 10 βαθμούς ελευθερίας.
– Να βρεθεί ο g_{ab} ώστε $R_{ab} = 0$.

- <u>Μεγάλο θεώρημα:</u> Χώρος επίπεδος, Ευκλείδειος ή Lorentz, Minkowski.
  Διαλέγω Καρτεσιανές συντεταγμένες, $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,+1,+\dots+)$
  Christoffel $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$. Άρα ∇_a και ∂_a ίδιες.

  $(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a) = (\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a)$, αντιμετατίθενται $\Rightarrow$

  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, συνιστώσες στις καρτεσιανές συντεταγμένες $\Rightarrow$ $R_{abcd} = 0$ τανυστ, σε κάθε σύστημα. Π.χ. μη τετριμμένο αν δουλέψετε σε σφαιρικές συντεταγμένες.
  Και αντίστροφο, $R_{\dots\dots} = 0 \Rightarrow$ επίπεδος!

- Πώς υπολογίζουμε τους τανυστές καμπυλότητας.

- <u>Πρόβλημα:</u> Έστω $(\cancel{g_{ab}}, \nabla_a)$, $(\cancel{\tilde{g}_{ab}}, \tilde{\nabla}_a)$. Έστω ότι οι $\nabla_a, \tilde{\nabla}_a$ συνδέονται με $C^m{}_{ab}$,

$$\tilde{\nabla}_a w_b = \nabla_a w_b - C^m_{ab}\, w_m$$

Πώς συνδέονται οι $\tilde{R}_{abcd}$ και R_{abcd}?

$$\tilde{R}_{abc}{}^m \xi_m = (\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b - \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_a)\xi_c = \tilde{\nabla}_a(\tilde{\nabla}_b\xi_c) - \tilde{\nabla}_b(\tilde{\nabla}_a\xi_c) =$$

$$= \nabla_a(\tilde{\nabla}_b\xi_c) - C^m_{ab}(\tilde{\nabla}_m\xi_c) - C^m_{ac}(\tilde{\nabla}_b\xi_m)$$

$$- \nabla_b(\tilde{\nabla}_a\xi_c) + C^m_{ba}(\tilde{\nabla}_m\xi_c) + C^m_{bc}(\tilde{\nabla}_a\xi_m)$$

$$= \dots\dots$$

$$\tilde{R}_{abc}{}^{m}\xi_m = R_{abc}{}^{m}\xi_m - (\nabla_a C_{bc}^{m})\xi_m + (\nabla_b C_{ac}^{m})\xi_m + C_{ac}^{n} C_{bn}^{m}\xi_m - C_{bc}^{n} C_{an}^{m}\xi_m .$$

Άρα
$$\tilde{R}_{abc}{}^{m} = R_{abc}{}^{m} - (\nabla_a C_{bc}^{m}) + (\nabla_b C_{ac}^{m}) + C_{ac}^{n} C_{bn}^{m} - C_{bc}^{n} C_{an}^{m}$$

• Έστω ~~g_{ab} επίπεδος~~, g_{ab} επίπεδος, συντεταγμένες $\{x^\mu\}$, ∇_a η μερική παράγωγος ως προς το x^μ. Τότε τα C^{a}_{bc} είναι το σύμβολο Christoffel.

$$\tilde{R}_{abc}{}^{m} = -\partial_a \Gamma_{bc}^{m} + \partial_b \Gamma_{ac}^{m} + \Gamma_{ac}^{n}\Gamma_{bn}^{m} - \Gamma_{bc}^{n}\Gamma_{an}^{m}.$$

Παραλείπουμε και το ~.

Μετρική, g_{ab}, συνιστώσες $g_{\mu\nu}$ στο σύστημα $\{x^\mu\}$, Christoffel $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$,

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma} = -\partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} + \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\rho}^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\rho}^{\kappa}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}.$$

Έτσι τον υπολογίζουμε.

$\nu \leftrightarrow \sigma$ ανάλογα για Ricci:

$$R_{\mu\rho} = -\partial_\mu \Gamma_{\sigma\rho}^{\sigma} + \partial_\sigma \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\rho}^{\kappa}\Gamma_{\sigma\kappa}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\rho}^{\kappa}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}.$$

Να λυθούν 10 $g_{\mu\nu}$ ώστε $R_{\mu\nu}=0$, 10 εξισώσεις, διαφορικές, β'. τάξης, 10 άγνωστοι.

$$\tilde{R}_{abc}{}^{m}\xi_m = 2\,\tilde{\nabla}_{[a}\tilde{\nabla}_{b]}\,\xi_c .$$

$$\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\xi_c = \tilde{\nabla}_a(\tilde{\nabla}_b\xi_c) = \nabla_a(\tilde{\nabla}_b\xi_c) - C_{ab}^{m}(\tilde{\nabla}_m\xi_c) - C_{ac}^{m}(\tilde{\nabla}_b\xi_m) =$$

$$= \nabla_a(\nabla_b\xi_c - C_{bc}^{m}\xi_m) - C_{ab}^{m}(\nabla_m\xi_c - C_{mc}^{n}\xi_n) - C_{ac}^{m}(\nabla_b\xi_m - C_{bm}^{n}\xi_n) \Rightarrow$$

$$\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\xi_c = \nabla_a\nabla_b\xi_c - (\nabla_a C_{bc}^{m})\xi_m - C_{bc}^{m}(\nabla_a\xi_m) - \cancel{C_{ab}^{m}(\nabla_m\xi_c)} + \cancel{C_{ab}^{m}C_{mc}^{n}\xi_n} - C_{ac}^{m}(\nabla_b\xi_m) + C_{ac}^{m}C_{bm}^{n}\xi_n$$

Skew στα a, b , 4,5 συμμετρικοί, από μόνοι τους
3, 6 συμμετρικοί σαν σύνολο.

$$\tilde{\nabla}_{[a}\tilde{\nabla}_{b]}\xi_c = \nabla_{[a}\nabla_{b]}\xi_c - (\nabla_{[a}C_{b]c}{}^{m})\xi_m + C^{n}{}_{c[a}C_{b]n}{}^{m}\xi_m \Rightarrow$$

$$\tilde{R}_{abc}{}^{m} = R_{abc}{}^{m} - 2(\nabla_{[a}C_{b]c}{}^{m}) + 2C^{n}{}_{c[a}C_{b]n}{}^{m}.$$

- Ταυτότητα ή Ταυτότητες του Bianchi: Διαφορική συνθήκη στον τανυστή Riemann:

$\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{e} = 0.$ (Και χωρίς μετρική).

- Θα υπολογίσουμε το $\nabla_{[a} \nabla_b \nabla_{c]} \xi_d$ με δύο τρόπους.

$$\nabla_a \left(\nabla_{[b} \nabla_{c]} \xi_d \right) = \nabla_a \left(\tfrac{1}{2} R_{bcd}{}^{m} \xi_m \right) =$$
$$= \tfrac{1}{2} \left(\nabla_a R_{bcd}{}^{m} \right) \xi_m + \tfrac{1}{2} R_{bcd}{}^{m} \left(\nabla_a \xi_m \right)$$

$$\nabla_{[a} \nabla_{b]} \left(\nabla_c \xi_d \right) = \tfrac{1}{2} R_{abc}{}^{m} \left(\nabla_m \xi_d \right) + \tfrac{1}{2} R_{abd}{}^{m} \left(\nabla_c \xi_m \right).$$

Άρα

$$\left(\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{m} \right) \xi_m + R_{[bc|d|}{}^{m} \left(\nabla_{a]} \xi_m \right) =$$
$$= \underbrace{\cancel{R_{[abc]}{}^{m}}}_{0} \left(\nabla_m \xi_d \right) + R_{[ab|d|}{}^{m} \left(\nabla_{c]} \xi_m \right)$$

συνδέονται με άρτια μετάθεση.

Άρα $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{m} = 0.$

- $$\nabla_a R_{bcd}{}^{m} + \nabla_b R_{cad}{}^{m} + \nabla_c R_{abd}{}^{m} = 0.$$

Πρώτη συστολή, (c, m):

$$\nabla_a R_{bd} - \nabla_b R_{ad} + \nabla^m R_{abdm} = 0.$$

- Άλλη μία, (b,d) ή (a,d), όχι (a,b)

$$\nabla_a R - \nabla^b R_{ab} - \nabla^m R_{am} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\nabla^b \left(R_{ab} - \tfrac{1}{2} R g_{ab} \right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\boxed{\nabla^b G_{ab} = 0.}$$

Η ενδιαφέρουσα ταυτότητα Bianchi, μετά από δύο συστολές.

Ξέρουμε διαφορική γεωμετρία. Μερικές γενικές ιδέες της Σχετικότητας.

- Γεγονός, όλα τα γεγονότα του σύμπαντος → χωρόχρονο (όπως ιστορία σωματιδίου, ή ένα χτύπημα, π.χ.). Από θυμόμαστε.
- Στατική εικόνα, τίποτα δεν συμβαίνει, όσα συνέβησαν και όσα θα συμβούν είναι στο M.
- Σημείο, σωματίδιο, κινούμενο.
- Σχηματισμένα. Ράβδος, χορδή, Γη.
- Κώνοι φωτός: Σε κάθε σημείο. Παρελθόν και μέλλον.

(i) Ταχύτητα c ανεξάρτητη της κίνησης πηγής είναι αρχική.

· Περιγράφεται μαθηματικά l^a. φωτοειδής.

$$l^a l^b g_{ab} = 0, \quad \text{null.}$$

$-+++$,
$$\xi^a \xi^b g_{ab} < 0, \quad \text{timelike}$$
$$\xi^a \xi^b g_{ab} > 0, \quad \text{spacelike.}$$

Τι επιτρέπεται, τι δεν επιτρέπεται.

- Πρώτα γεωμετρικά. Μετά, μαζί ήδη εκφράσαμε ότι η ταχύτητα του φωτός είναι ανεξάρτητη της κινητικής κατάστασης της πηγής και του παρατηρητή!

- Χωροειδής, Χρονοειδής, φωτοειδής

Καμπύλη Γ, διάνυσμα ξ^a $\quad - + + +$

$g_{ab}\xi^a\xi^b < 0$ χρονοειδής

$\xi^a\xi_a > 0$ χωροειδής

$\xi^a\xi_a = 0$ null.

- Έστω $ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$

$\xi^a = (\xi^t, \xi^r, 0, 0)$. Ακτινικό.

$g_{ab}\xi^a\xi^b < 0 \Leftrightarrow -c^2(\xi^t)^2 + (\xi^r)^2 < 0 \Leftrightarrow$

$\xi^a = \left(\frac{dt}{ds}, \frac{dr}{ds}, 0, 0\right)$. $\quad -c^2(dt)^2 + (dr)^2 < 0 \Leftrightarrow$

$\left|\frac{dr}{dt}\right| < c$. κίνηση με ταχύτητα μικρότερη της ταχύτητας του φωτός.

⊛ Αν ξ^a γεωδαισιακή, $\xi^m \nabla_m (\xi^a\xi_a) = 0$, $\xi^a\xi_a$ διατηρείται, ο χαρακτήρας της διατηρείται.

- Κώνοι φωτός, τι επιτρέπεται, τι δεν επιτρέπεται.

⊛ g_{ab} χωρόχρονου $\Rightarrow$ εκφράσαμε ότι η ταχύτητα του φωτός είναι ανεξάρτητη της κινητικής κατάστασης της πηγής και του παρατηρητή!

Weyl
Ταυτότητες Bianchi.

- $\nabla^b T_{ab}=0$, διατηρείται, όπως διατηρούμενο ρεύμα, $\nabla^a J_a=0$.
- ξ_a διαν. πεδίο Killing, $\nabla_a\xi_b+\nabla_b\xi_a=0$, συμμετρία, $\nabla_{(a}\xi_{b)}=0$.

1) S κλειστή επιφάνεια, $\oint_S T_{ab}\xi^a dS^b = \int_V \nabla^b(T_{ab}\xi^b)\, dV =$

$$= \int \left[(\nabla^b T_{ab})\xi^a + T_{ab}(\nabla^a\xi^b)\right] dV = 0$$ για κλειστή επιφάνεια.

2) Συνήθης εφαρμογή. Δύο χωροειδείς επιφάνειες και διαστημικά πέρα στο μηδέν ή στο άπειρο $T_{ab}=0$

$\int_{S_1} T_{ab}\xi^a dS^b = \int_{S_2} T_{ab}\xi^a dS^b$, όσο

S_1, όλο ο χώρος κάποια χρονική στιγμή, S_2, άρα $\int T_{ab}\xi^a d\xi^b$ είναι κάποια διατηρούμενη ποσότητα.

- Κλασικά, πότε P_x διατηρείται, όταν $\frac{\partial V}{\partial x} \neq 0$, όταν η διεύθυνση $\hat{x}$ ή $\frac{\partial}{\partial x}$ είναι ~~συμμετρία~~ συμμετρία του δυναμικού που αλλάζει τον χώρο, συμμετρία του χώρου.
- L_z διατηρείται όταν $\partial/\partial\varphi$ συμμετρία, $x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$.
- Πότε ενέργεια διατηρείται; όταν $\partial/\partial t$ συμμετρία του δυναμικού.

Ώστε διατηρούμενες ποσότητες προκύπτουν από συμμετρίες. Έτσι και στη Σχετικότητα, ανάλογα και ταυτότητες Bianchi.

- Hilbert action: vacuum, $G_{ab}=0 \Leftrightarrow R_{ab}=0$. Αρχικά Einstein έγραψε $R_{ab}=T_{ab}$, ίδιο Schwarzschild test.

Linearized Equations

- Εχετικότητα, Μη γραμμική, δύσκολες εξισώσεις. Λύσεις σε ιδεατές περιπτώσεις, αρκετά συμμετρικές, Black holes, διαταράσσεται από ύλη, ... Κοσμολογία, ομογενής και ισότροπος, μικρές διαταραχές πως διαδίδονται?
- Θεωρία διαταραχών πρώτης τάξης.
  $g_{ab} = \overset{\circ}{g}_{ab} + h_{ab}$ μικρό, $\overset{\circ}{g}_{ab}$ known exact solution.
- Μονοπαραμετρική οικογένεια $g_{ab}(\lambda)$, $R_{ab}(g_{ab}(\lambda)) = 0$.
  $$\left.\frac{d g_{ab}}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \dot{g}_{ab} = h_{ab}, \text{ η διαταραχή.}$$
  $$\left.\frac{d R_{ab}(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \dot{R}_{ab} \text{ διαταραχή πρώτης τάξης.}$$
  εξισώσεις πρώτης τάξης $\dot{R}_{ab} = \dot{T}_{ab}$
- Και vacuum ενδιαφέρουσες, $\dot{R}_{ab} = 0$. Ειδικά σε βαρυτικά κύματα.
- Μαθηματικά, όλα να εκφρασθούν συναρτήσει των ∇_a, h_{ab}, του background, της ακριβούς λύσεως.
- Γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Εξαρτάται από το background
- $g_{ab}(\lambda)$, $g_{ab} = g_{ab}(0)$
  ∇_a $\quad \nabla_a = \nabla_a$.

$$\tilde{\nabla}_a \xi_b = \nabla_a \xi_b - C^m_{ab}\, \xi_m$$

$$C^m_{ab} = C^m_{ab}(\lambda) \qquad \text{και} \qquad C^m_{ab}(\lambda=0) = 0.$$

$$C^m_{ab}(\lambda) = \frac{1}{2} g^{mn}(\lambda) \left[\nabla_a g_{nb}^{(\lambda)} + \nabla_b g_{na}^{(\lambda)} - \nabla_n g_{ab}^{(\lambda)} \right].$$

$$g^{am}(\lambda)\, g_{bm}(\lambda) = \delta^a_b \Rightarrow \dot{g}^{ab} = -h^{ab}.$$

(Ακρίβεια πρώτης τάξης,

$$g^{ab}(\lambda) = g^{ab} - \lambda h^{ab} + \dots,$$
$$g_{ab}(\lambda) = g_{ab} + \lambda h_{ab} + \dots$$

$$\dot{C}^m_{ab} = \frac{1}{2} g^{mn} \left[\nabla_a h_{nb} + \nabla_b h_{na} - \nabla_n h_{ab} \right] \Rightarrow$$

$$\dot{C}^m_{ab} = \frac{1}{2} \left(\nabla_a h^m{}_b + \nabla_b h^m{}_a - \nabla^m h_{ab} \right).$$

(Τα πάντα ανεβοκατεβαίνουν στο background).

$$R_{ac}(\lambda) = \tilde{R}_{ac} = \overset{0,\ \text{vacuum}}{\cancel{R_{ac}}} - \nabla_a C^m_{mc} + \nabla_m C^m_{ac} + C^n_{ac} C^m_{mn} - C^n_{mc} C^m_{an}$$

$$\dot{R}_{ac} = -\nabla_a \dot{C}^m_{mc} + \nabla_m \dot{C}^m_{ac}$$

$$\dot{C}^m_{mc} = \frac{1}{2} \nabla_c h, \qquad h = h^m{}_m = g^{ab} h_{ab}.$$

$$\dot{R}_{ac} = \frac{1}{2} \Big\{ \nabla_m \nabla_a h^m{}_b + \nabla_m \nabla_b h^m{}_a - \nabla^m \nabla_m h_{ab} -$$
$$- \nabla_a \nabla_b h \Big\}$$

$$R(\lambda) = -g^{ab}\nabla_a C^m_{mb} + g^{ab}\nabla_m C^m_{ab} + g^{ab}(\lambda) R$$

$$+ g^{ab} C^n_{ab} C^m_{mn} - g^{ab} C^n_{mb} C^m_{an}$$

$$\dot{R} = -g^{ab}\nabla_a \dot{C}^m_{mb} + g^{ab}\nabla_m \dot{C}^m_{ab}$$

$$\overset{\circ}{R} = -\nabla^b \overset{\circ}{C}{}^m_{mb} + g^{ab}\nabla_m \overset{\circ}{C}{}^m_{ab}$$

Άρα γράφουμε

$$\dot{G}_{ab} = \ldots$$

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a$$

$u, \ \phi^* u$

ξ generat of ϕ^*

- Επιβάλλουμε $\nabla^m \gamma_{ma} = 0$.
  Like the Lorentz gauge condition.

- Δουλεύουμε σε vacuum, non-flat, background.
  But the perturbation does not have necessarily to be vacuum.

$$\dot{G}_{ab} = \dot{T}_{ab} \qquad \text{when } \underline{T_{ab} = 0,\ R_{ab} = 0}$$

Vacuum linearized Equations:

- $\nabla^m \nabla_m h_{ab} - \nabla_m \nabla_a h^m{}_b - \nabla_m \nabla_b h^m{}_a + \nabla_a \nabla_b h = 0.$ ⊛

(i) Γραμμική ως προς h_{ab}

(ii) Εξαρτάται από το background.

(iii) Παράδειγμα διάδοση βαρυτικών κυμάτων σε blackholes.

(iv) Γραμμικοποίηση μεν, αλλά κομμάτια υπόθεση για συμμετρίες. Ανάλυση σε normal modes.

$\nabla^m \nabla_m \phi = \Box \phi = g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi$ wave operator.

Διάδοση κυμάτων, βαρυτικών.

- Επιβάλλουμε τα $\nabla^m h_{ma} = 0$, που τα μπορούμε από gauge ελευθερίας.

$$\nabla_m \nabla_a h^m{}_b = \nabla_a \nabla_m h^m{}_b + R_{ma}{}^m{}_n h^n{}_b + R_{mab}{}^n h^m{}_n =$$
$$= \nabla_a \nabla^m h_{mb} + \cancel{R_{an} h^n{}_b} + R_{mabn} h^{mn}$$

$$\nabla_m \nabla_b h^m{}_a = \nabla_b \nabla^m h_{ma} + R_{mban} h^{mn}.$$

$$\nabla^m \nabla_m h_{ab} - \nabla_a (\nabla^m h_{bm}) - \nabla_b (\nabla^m h_{am}) + \nabla_a \nabla_b h + 2 R_{ambn} h^{mn} = 0.$$

Θεωρούμε το συνδυασμό $\gamma_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2} h g_{ab}$

$\gamma = -h \Rightarrow \quad h_{ab} = \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\gamma g_{ab}$

Η εξίσωση (*) γίνεται

$$\nabla^m \nabla_m \left(\gamma_{ab} - \frac{1}{2}\gamma g_{ab}\right) - \nabla_m \nabla_a \gamma^m{}_b - \nabla_m \nabla_b \gamma^m{}_a = 0.$$

$$\nabla_m \nabla_a \gamma^m{}_b = \nabla_a \nabla^m \gamma_{mb} - R_{ambn}\gamma^{mn}.$$

$$\nabla^m \nabla_m h_{ab} - \nabla_a(\nabla^m \gamma_{mb}) - \nabla_b(\nabla^m \gamma_{ma}) + 2R_{ambn}\gamma^{mn} = 0.$$

$$\nabla^m \nabla_m h_{ab} - \nabla_a(\nabla^m \gamma_{mb}) - \nabla_b(\nabla^m \gamma_{ma}) + 2R_{ambn}\gamma^{mn} = 0.$$

$h_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a$ gauge $\mathcal{L}_\xi g_{ab}$.

$h = 2(\nabla^m \xi_m)$

identically satisfied for vacuum background.

Χρησιμοποιούμε ώστε $\nabla^m \gamma_{mb} = 0$.

$$\boxed{\nabla^m \nabla_m h_{ab} + 2R_{ambn} h^{mn} = 0.}$$

Γενίκευση κυματικής εξίσωσης.

Σε επίπεδο background, $\nabla^m \nabla_m h_{ab} = 0$, κύματα.

· Ανάλυση σε κουβάδων και ενέργεια.

Μαθηματική εἰσαγωγή καί εἰδικά θέματα στή Γενική Θεωρία τῆς Σχετικότητας.

Ἐλεύθερα μαθήματα στό Ἐργαστήριο Ἀστρονομίας Α.Π.Θ.
Ἰανουάριος 1980 –

Βασίλης Ξανθόπουλος.

⟷

1. Εἰσαγωγή.

Στή θεωρητική φυσική μελετοῦμε διάφορες φυσικές θεωρίες, δηλαδή μοντέλα γιά τόν φυσικό κόσμο καί τά φυσικά φαινόμενα. Τά μοντέλα αὐτά εἶναι συνήθως γεωμετρικοί ἤ ἀλγεβρικοί χῶροι μέ ὁρισμένη μαθηματική δομή. Ὑποδομές σ' αὐτούς τούς χώρους (σημεῖα, καμπύλες, ἐπιφάνειες, τανυστικά πεδία, ἰδεώδη, ...) περιγράφουν διάφορες φυσικές ἔννοιες. Σάν παράδειγμα ἀναφέρουμε τόν χῶρο μορφῆς (configuration space), τῶν φάσεων (phase space) καί τόν χῶρο τῶν φυσικῶν καταστάσεων (space of states) τοῦ συστήματος. Τήν δομή σ' αὐτούς τούς χώρους τήν δίνει, τήν ἐπιβάλλει ὁ ἴδιος ὁ θεωρητικός φυσικός. Τό εἶδος τῆς δομῆς πού ἐπιβάλλει ἐξαρτᾶται ἀπό τό εἶδος τῆς μελέτης πού ἐπιθυμεῖ νά κάνει. Ἄς ἐξηγηθοῦμε λίγο καλύτερα.

Στή φυσική συνήθως μελετοῦμε Κινηματική καί Δυναμική. Στήν <u>κινηματική</u> ρωτοῦμε ἐρωτήσεις τῆς μορφῆς "ποῦ εἶναι τό σύστημα", "πότε δύο καταστάσεις τοῦ συστήματος εἶναι κοντά", "πῶς ἐξελίσσεται φαινομενολογικά τό σύστημα", "εἶναι τό σύστημα εὐσταθές" κ.λ.π., δηλαδή ρωτοῦμε μόνο <u>ποιοτικές</u> καί ὄχι <u>ποσοτικές</u> ἐρωτήσεις. Ἐκεῖνο λοιπόν πού χρειαζόμαστε εἶναι μία ἀκριβής, δηλ. μία μαθηματική ἔννοια πού νά ἐκφράζῃ τίς ἐμπειρικές ἔννοιες τοῦ "εἶναι κοντά" καί τοῦ "μεταβάλλεται συνεχῶς". Ἡ μαθηματική δομή πού διαθέτει αὐτές τίς ἱκανότητες εἶναι ἡ τοπολογία (topology). Γιά νά μελετήσουμε λοιπόν κινηματική δίνουμε στόν χῶρο μας τή δομή τοπολογικοῦ χώρου (topological space).

Ἡ κινηματική μελέτη μόνο δέν ἀποτελεῖ μία ἀρκετά ἱκανοποιητική μελέτη (καί κατανόηση) τοῦ φυσικοῦ κόσμου. Ὁ θεωρητικός φυσικός ψάχνει ἐπιπλέον γιά μερικούς λίγους καί "βασικούς" νόμους πού ἐξηγοῦν τή συμπεριφορά τῶν φυσικῶν συστημάτων καί πού ἔχουν τήν ἱκανότητα νά περιγράφουν τά φαινόμενα καί ποσοτικά. Αὐτή ἡ "βαθύτερη" μελέτη γίνεται μέ τή Δυναμική.

Ὁ Newton μᾶς ἔχει διδάξει ὅτι μία ἀρκετά ἀποτελεσματική μέθοδος γιά τή δυναμική περιγραφή τῶν συστημάτων εἶναι ἡ μέθοδος πού βασίζεται στόν διαφορικό καί ὁλοκληρωτικό λογισμό. Γιά νά διαφορίσουμε ὅμως ἡ συνέχεια δέν ἐπαρκεῖ. Ἀπαιτεῖται πρῶτα νά εἶναι κανείς σέ θέση νά ἀπαντήσει σέ ποσοτικές ἐρωτήσεις τῆς μορφῆς "πόσο κοντά", "πόσο γρήγορα μεταβάλλεται", "πόσο γρήγορα μεταβάλλεται πρός τήν τάδε κατεύθυνση" κ.λ.π. Ἡ μαθηματική δομή πού θεμελιώνει αὐτές τίς ἔννοιες εἶναι ἡ διαφορίσιμη πολλαπλότητα (differential manifold), πού ἐπιπλέον περιλαμβάνει καί τήν ἔννοια τῆς διάστασης (dimension).

Ὁ σκοπός αὐτῆς τῆς εἰσαγωγῆς ἦταν νά ἐπεξηγήσει τούς λόγους γιά τούς ὁποίους θά ἀναπτύξουμε τίς μαθηματικές ἔννοιες πού ἀκολουθοῦν.

2. Τοπολογικοί χῶροι.

Ἀρχίζουμε μέ μερικές παρατηρήσεις πού ἀποτελοῦν καί τά κίνητρα (the motivation) γιά τόν ὁρισμό τοῦ τοπολογικοῦ χώρου.

Ἄς θεωρήσουμε τήν πραγματική εὐθεῖα $\mathbb{R}$ καί τά ἀνοικτά διαστήματα $(a,b) = \{x \in \mathbb{R},\ a<x<b\}$. Κάθε σημεῖο τοῦ (a,b) ἔχει τήν ἰδιότητα ὅτι ἄν "διαταραχθεῖ λίγο" ἐξακολουθεῖ νά παραμένει μέσα στό ἀνοικτό διάστημα (a,b). Ἀντίθετα, γιά κάθε ἀνοικτό διάστημα (a,b) καί σημεῖο του $x \in (a,b)$, μποροῦμε νά θεωρήσουμε σάν τίς "ἐπιτρεπτές", τίς "μικρές" μεταβολές τοῦ x, ἐκεῖνες γιά τίς ὁποῖες τό x παραμένει μέσα στό (a,b). Θά δεχθοῦμε ὅτι αὐτή ἡ ἰδιότητα ἐκφράζει τίς ἔννοιες τῆς καθημερινῆς ζωῆς ὅτι τό σημεῖο "μετακινεῖται λίγο" ἤ "παραμένει κοντά" ἤ "μεταβάλλεται συνεχῶς", πάντοτε φυσικά ἀναφορικά μέ κάποιο ἀνοικτό διάστημα τοῦ $\mathbb{R}$. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἕνωση ἀνοικτῶν διαστημάτων ἔχει τήν ἴδια ἰδιότητα ἀλλά ὄχι καί κάθε τομή ἀνοικτῶν διαστημάτων. Π.χ. ἡ τομή τῶν ἀνοικτῶν διαστημάτων $I_n = \left(1-\frac{1}{n^2},\ 3+\frac{2}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ εἶναι $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [1,3]$. Τό διάστημα $[1,3]$ περιέχει σημεῖα (τά 1 καί 3) μικρές διαταραχές τῶν ὁποίων δέν ἀνήκουν στό $[1,3]$. Ἀπό τήν ἄλλη μεριά, κάθε πεπερασμένη

τομή ἀνοιχτῶν διαστημάτων εἶναι ἕνα ἀνοιχτό διάστημα καί κατά συνέπεια ἔχει τήν ἰδιότητα πού θεωροῦμε.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἔστω σύνολο X. Ὀνομάζουμε <u>τοπολογία</u> στό X ἕνα σύνολο τ ὑποσυνόλων τοῦ X πού ἱκανοποιεῖ τίς ἑξῆς συνθῆκες:

i) <u>Κάθε ἕνωση</u> ὑποσυνόλων πού ἀνήκουν στό τ εἶναι ὑποσύνολο πού ἀνήκει στό τ.

$$[\, A_j \in \tau \quad \forall j \in J \Longrightarrow \bigcup_{j\in J} A_j \in \tau \,].$$

ii) Ἡ <u>τομή δύο</u> ὑποσυνόλων πού ἀνήκουν στό τ εἶναι ὑποσύνολο πού ἀνήκει στό τ.

$$[\, A_1 \in \tau,\ A_2 \in \tau \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau \,].$$

iii) Τά σύνολα $\emptyset$ (τό κενό σύνολο) καί X ἀνήκουν στό τ.

Προφανῶς ἡ δεύτερη συνθήκη συνεπάγεται ὅτι κάθε πεπερασμένη τομή ὑποσυνόλων πού ἀνήκουν στήν τ εἶναι ἕνα ὑποσύνολο πού ἀνήκει στήν τ.

Τό ζεῦγος (X, τ) πού ἀποτελεῖται ἀπό τό σύνολο X καί μία τοπολογία τ στό X λέγεται <u>τοπολογικός χῶρος</u>.

<u>Ὁρισμός:</u> Τά στοιχεῖα τοῦ τ ὀνομάζονται <u>ἀνοιχτά σύνολα</u> τοῦ X.

<u>Παράδειγμα 1ον:</u> Στό σύνολο $X = \{a, b, c, d, e\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$ εἶναι μία τοπολογία.

$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ καί

$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$

εἶναι ἐπίσης τοπολογίες. Εἶναι λοιπόν δυνατόν νά ἔχουμε πολλές διαφορετικές τοπολογίες σέ κάποιο σύνολο. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ τ εἶναι ὑποσύνολο τῆς τ_1 ἐνῶ οἱ τ καί τ_2 δέν συνδέονται μέ τή σχέση τοῦ "περιέχεσθαι".

<u>Παράδειγμα 2ον:</u> Ἔστω $\mathbb{R}$ τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἕνα ὑποσύνολο A τοῦ $\mathbb{R}$ θά τό ὀνομάσουμε α-σύνολο ἐάν ἔχει τήν ἑξῆς ἰδιότητα: Γιά κάθε σημεῖο $x \in A$ ὑπάρχει θετικός ἀριθμός $\varepsilon > 0$ τέτοιος ὥστε ὅλοι οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x' πού ἱκανοποιοῦν τήν $|x - x'| < \varepsilon$ νά ἀνήκουν στό A. Θά ἀποδείξουμε ὅτι τό σύνολο τῶν α-συνόλων ἀποτελεῖ μία τοπολογία στό $\mathbb{R}$. Τό κενό σύνολο $\emptyset$ (δέν περιλαμβάνει κανένα στοιχεῖο καί συνεπῶς δέν ἔχουμε τίποτε νά ἐλέγξουμε) καί $\mathbb{R}$ (περιλαμβάνει ὁποιοδήποτε x') εἶναι α-σύνολα. Ἄς θεωρήσουμε τά α-σύνολα A_j, $j \in J$ καί ἔστω $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$. Ἄρα ὑπάρχει $j_0 \in J$ ὥστε $x \in A_{j_0}$. Ἀφοῦ τό A_{j_0} εἶναι α-σύνολο, ὑπάρχει $\varepsilon > 0$ ὥστε ὅλα τά x' πού ἱκανοποιοῦν τήν $|x' - x| < \varepsilon$ νά ἀνήκουν στό A_{j_0}, ἄρα καί στό $\bigcup_{j \in J} A_j$. Συνεπῶς τό $\bigcup_{j \in J} A_j$ εἶναι α-σύνολο. Τελικά ἄς εἶναι A_1 καί A_2 α-σύνολα καί ἔστω $x \in A_1 \cap A_2$. Αὐτό συνεπάγεται ὅτι $x \in A_1$ καί $x \in A_2$, γιά τά ὁποῖα ξέρουμε ὅτι ὑπάρχουν $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ τέτοια ὥστε $|x' - x| < \varepsilon_1 \Rightarrow x' \in A_1$ καί $|x'' - x| < \varepsilon_2 \Rightarrow x'' \in A_2$. Διαλέγουμε τόν ε ἴσο

πρὸς τὸν μικρότερο τῶν ϵ_1 καὶ ϵ_2. Προφανῶς ὅλα τὰ x' ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν $|x'-x|<\epsilon$ ἀνήκουν καὶ στὰ δύο, A_1 καὶ A_2, ἄρα καὶ στὴ τομή τους $A_1 \cap A_2$, δηλ. ἀποδείξαμε ὅτι τὸ $A_1 \cap A_2$ εἶναι ἕνα α-σύνολο. Τὰ α-σύνολα λοιπὸν ἀποτελοῦν μία τοπολογία στὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Θὰ τὴν συμβολίσουμε τ_E. Ὁ τοπολογικὸς χῶρος $(\mathbb{R}, \tau_E)$ λέγεται Εὐκλείδειος τοπολογικὸς χῶρος. Τὴν ὁρολογία α-σύνολα δὲν θὰ τὴν ξαναχρησιμοποιήσουμε. Χωρὶς κανένα κίνδυνο σύγχυσης μποροῦμε πλέον νὰ τὰ ὀνομάζουμε ἀνοιχτὰ σύνολα.

Μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι τὸ σύνολο ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ $\emptyset$, $\mathbb{R}$, ὅλα τὰ ἀνοιχτὰ διαστήματα (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$ καὶ ὅλες τὶς δυνατὲς ἑνώσεις ἀνοιχτῶν διαστημάτων συμπίπτει μὲ τὸ σύνολο τ_E. Ὁ Εὐκλείδειος τοπολογικὸς χῶρος μπορεῖ λοιπὸν νὰ ὁρισθεῖ, ἰσοδύναμα, καὶ μὲ τὴ βοήθεια τῶν ἀνοιχτῶν διαστημάτων.

Παράδειγμα 3^{ον}: Ἔστω $X=\mathbb{R}$ καὶ $\tilde{\tau} = \{\emptyset, \mathbb{R}$, ὅλα τὰ ἀνοιχτὰ διαστήματα τῆς μορφῆς

$E_a = (a, \infty)$, $\forall a \in \mathbb{R}\}$. $(\mathbb{R}, \tilde{\tau})$ εἶναι τοπολογικὸς χῶρος. Πράγματι, $E_a \cap E_b = E_{\max\{a,b\}}$. Γιὰ τὴν ἕνωση τῶν E_a, $a \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ παρατηροῦμε ὅτι $\bigcup_{a\in\Lambda} E_a = \mathbb{R}$ ἐὰν $\inf\{a, a\in\Lambda\} = -\infty$ καὶ

$\bigcup_{a\in\Lambda} E_a = E_k$ ἐὰν $\inf\{a, a\in\Lambda\} = k \in \mathbb{R}$, δηλ. ἀνήκει πάντοτε στὴν $\tilde{\tau}$.

Ἂς συγκρίνουμε λίγο τὶς τοπολογίες τ_E καὶ $\tilde{\tau}$ τοῦ $\mathbb{R}$. Ἡ τ_E ἔχει πολὺ περισσότερα ἀνοιχτὰ σύνολα ἀπὸ τὴν $\tilde{\tau}$, $\tilde{\tau} \subsetneq \tau_E$ (γνήσιο ὑποσύνολο), μπορεῖ λοιπὸν νὰ πεῖ κανεὶς ὅτι ἡ τ_E εἶναι "ἰσχυρότερη" ἀπὸ τὴν $\tilde{\tau}$. Θὰ παρουσιάσουμε τώρα ἐπιχειρήματα ποὺ προσπαθοῦν νὰ πείσουν ὅτι ἡ τ_E ἔχει μεγαλύτερη "διακριτικὴ ἱκανότητα" ἀπὸ τὴν $\tilde{\tau}$ καὶ ὅτι εἶναι ἰσχυρότερη ἀπὸ τὴν $\tilde{\tau}$ γιὰ ἕνα πολὺ πιὸ θεμελιώδη λόγο.

Φανταζόμαστε ὅτι μία τοπολογία ἔχει τὴν δυνατότητα νὰ περιορίζει τὴν ἐλευθερία τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου X μὲ τὸν ἑξῆς μηχανισμό: ὅταν διαλέξει κάποιο ἀνοιχτὸ σύνολο ποὺ περιέχει ἕνα στοιχεῖο, στὸ στοιχεῖο αὐτὸ ἀπομένει μόνον ἡ ἐλευθερία νὰ κινεῖται μέσα σ' αὐτὸ τὸ ἀνοιχτὸ σύνολο (τὸ κελλί του). Ἐπίσης φανταζόμαστε ὅτι ἡ τοπολογία ἔχει τὴν δυνατότητα νὰ διακρίνει δύο στοιχεῖα τοῦ X ἐὰν ἔχει τὴν δυνατότητα νὰ τὰ περιορίσει σὲ δύο κελλιὰ ποὺ δὲν ἔχουν κανένα κοινὸ στοιχεῖο. Μ' αὐτὲς τὶς πρακτικὲς ἔννοιες στὸ νοῦ λοιπὸν εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ τοπολογία τ_E, ἐπειδὴ διαθέτει γύρω ἀπὸ κάθε στοιχεῖο ἀνοιχτὰ σύνολα ὁσονδήποτε μικρά, ἔχει τὴν δυνατότητα νὰ περιορίσει κάθε σημεῖο ὅσο θέλει καὶ τὴν δυνατότητα νὰ διακρίνει δύο στοιχεῖα τοῦ X ποὺ κεῖνται ὁσοδήποτε κοντά. Παρόμοια πράγματα δὲν συμβαίνουν καὶ μὲ τὴν τοπολογία $\tilde{\tau}$.

Ἐπειδή ὅλα τά κελλιά πού διαθέτη ἡ $\tilde{\tau}$ εἶναι τῆς μορφῆς (a, ∞), $a \in \mathbb{R}$, ἡ $\tilde{\tau}$ ἔχει τήν δυνατότητα νά περιορίσει τήν ἐλευθερία τῶν στοιχείων τοῦ $\mathbb{R}$ "ὅσο θέλει πρός τά ἀριστερά" καί "καθόλου πρός τά δεξιά". Ἐπίσης, ἐπειδή ὅλα τά κελλιά τῆς $\tilde{\tau}$ ἔχουν πάντοτε μερικά κοινά στοιχεῖα, ἡ $\tilde{\tau}$ ἀδυνατεῖ νά διακρίνει δύο οποιαδήποτε διαφορετικά σημεῖα. (Τό κενό σύνολο δέν μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ἀπό τήν τοπολογία σάν κελλί).

<u>Ὁρισμός:</u> τ_1 καί τ_2 τοπολογίες στό σύνολο X. Ἐάν $\tau_1 \subset \tau_2$, ἡ τ_1 λέγεται <u>τραχύτερη</u> (coarser) ἀπό τήν τ_2 καί ἡ τ_2 λέγεται λεπτότερη (finer) ἀπό τήν τ_1.

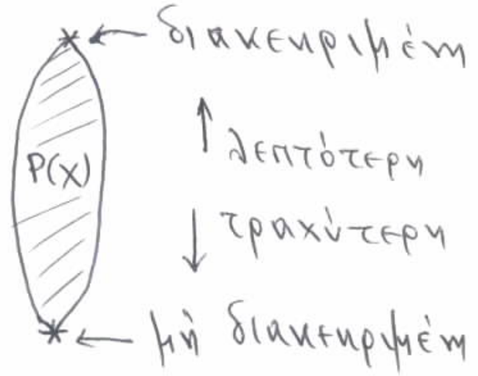
<u>Παράδειγμα 4ον:</u> Στό σύνολο X, ἡ τ ἀποτελεῖται ἀπ' ὅλα τά ὑποσύνολα τοῦ X. Λέγεται ἡ <u>διακεκριμένη</u> (discrete) τοπολογία στό X. Πολλές φορές συμβολίζεται καί $\tau = 2^X$.

<u>Παράδειγμα 5ον</u> Στό σύνολο X ὁρίζουμε $\tau = \{\emptyset, X\}$. Αὐτή λέγεται ἡ <u>μή διακεκριμένη</u> (indiscrete) τοπολογία τοῦ X.

Οἱ παρατηρήσεις τῆς προηγούμενης σελίδας δικαιολογοῦν τούς ὅρους διακεκριμένη καί μή διακεκριμένη. Πιθανόν καί νά μᾶς ἐπιτρέπουν νά ὀνομάζουμε τήν δεύτερη καί "ἀδιάκριτη τοπολογία".

Θά τελειώσουμε αὐτή τήν ἑνότητα μέ τή μελέτη ὅλων τῶν δυνατῶν τοπολογιῶν στό σύνολο X.

Ἔστω X ἕνα σύνολο καί $P(X)$ τό σύνολο τῶν ὑποσυνόλων τοῦ X πού ἱκανοποιοῦν τά τρία ἀξιώματα γιά νά ἀποτελοῦν μία τοπολογία στό X. Ἔτσι, κάθε στοιχεῖο τοῦ $P(X)$ εἶναι μία τοπολογία στό X.
Ἡ σχέση τοῦ περιέχεσθαι $\tau_1 \leq \tau_2$ ἐάνν $\tau_1 \subset \tau_2$ εἶναι μία σχέση μερικῆς διάταξης στό X.



Τό διάγραμμα ἀριστερά εἶναι ἀρκετά παραστατικό. Οἱ ἐνδιαφέρουσες τοπολογίες, δηλαδή αὐτές πού περιέχουν κάποια χρήσιμη πληροφορία, εἶναι οἱ τοπολογίες πού βρίσκονται κάπου στή μέση τοῦ διαγράμματος. Εἶναι εὔκολο νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

<u>Πρόταση:</u> Ἐάν τ_j, $j \in J$ εἶναι τοπολογίες στό σύνολο X, τότε $\bigcap_{j \in J} \tau_j = \tau$ εἶναι ἐπίσης τοπολογία στό X. Προφανῶς ἡ τ εἶναι τραχύτερη ἀπ' ὅλες τίς τ_j. Εἶναι ἡ λεπτότερη τοπολογία πού εἶναι τραχύτερη ἀπ' ὅλες τίς τ_j.

Προσοχή! Ἡ ἕνωση δύο τοπολογιῶν δέν εἶναι ἐν γένει τοπολογία.

3. Τοπολογία (II).

Ἡ ἔννοια τοῦ τοπολογικοῦ χώρου εἶναι τόσο γενική (χρησιμοποιεῖ ἁπλῶς τυχαῖα σύνολα καί ὁρισμένα ὑποσύνολά τους!) ὥστε νά εἶναι ἀρκετά δύσκολο νά ἀναπτύξη κανείς πολλή δομή σ' αὐτούς. Ἡ συνηθισμένη ἀντίδραση τῶν μαθηματικῶν σέ μία τόσο γενική ἔννοια εἶναι νά ἐπιβάλλουν ἐπιπλέον συνθῆκες καί νά μελετοῦν αὐτούς τούς ἐξειδικευμένους τοπολογικούς χώρους. Ἔχει σχηματισθεῖ λοιπόν ἕνας, πρακτικά ἀτέλειωτος, κατάλογος εἰδικῶν (καί ἀρκετά ἐξωτικῶν πολλές φορές) τοπολογικῶν χώρων. Ἐμεῖς θά προσπαθήσουμε νά κρατήσουμε γιά ὁδηγό μας τή φυσική γιά νά μήν παρασυρθοῦμε σ' αὐτή τή δίνη: στούς τοπολογικούς χώρους πού θά χρησιμοποιήσουμε θά ἐπιβάλλουμε τρεῖς ἐπιπλέον συνθῆκες πού ὑπαγορεύονται ἀπό φυσικές θεωρήσεις.

Ἀρχίζουμε μέ μερικούς ὁρισμούς.

Ὁρισμός: Ἔστω (X,τ) τοπολογικός χῶρος. Τό σύνολο A λέγεται κλειστό ἐάν τό συμπληρωματικό του σύνολο $A^c = X - A = \{x \in X \text{ ὅπου } x \notin A\}$ εἶναι ἀνοιχτό.

Π.χ. στόν $(\mathbb{R}, \tau_E)$ τό σύνολο $\mathbb{Z}$ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀποτελεῖ ἕνα κλειστό σύνολο.

Παρατηρήσεις: i) Χρησιμοποιώντας τίς σχέσεις τοῦ De Morgan $(\bigcup_j A_j)^c = \bigcap_j (A_j^c)$ καί $(\bigcap_j A_j)^c = \bigcup_j (A_j^c)$ εὔκολα παίρνουμε τίς βασικές ἰδιότητες τῶν κλειστῶν συνόλων: Τό $\emptyset$ καί τό X

εἶναι κλειστά σύνολα, κάθε πεπερασμένη ἕνωση κλειστῶν συνόλων εἶναι κλειστό σύνολο, κάθε τομή κλειστῶν συνόλων εἶναι κλειστό σύνολο.

ii) Θά μποροῦσε νά πεῖ κανείς ὅτι ἡ ὁρολογία ἀνοιχτά καί κλειστά σύνολα εἶναι τελείως ἀνεπιτυχής. Ὑπάρχουν σύνολα πού εἶναι συγχρόνως ἀνοιχτά καί κλειστά (π.χ. ϕ, X) καί ἄλλα πού δέν εἶναι οὔτε ἀνοιχτά οὔτε κλειστά (π.χ. $(0,2]$ ἤ $(0,1)\cup[2,3]$ στήν $(\mathbb{R},\tau_E)$).

<u>Ὁρισμός:</u> Ἔστω (X,τ) τοπολογικός χῶρος καί σημεῖο $x\in X$. Τό ὑποσύνολο Π τοῦ X λέγεται <u>περιοχή</u> τοῦ x ἐάν ὑπάρχει ἀνοιχτό σύνολο A $(A\in\tau)$ πού περιέχει τό x καί περιέχεται στό Π.

$$[\{x\}\subset A\subset\Pi].$$

Ἡ ἔννοια τῆς περιοχῆς ἔχει εἰσαχθεῖ στήν τοπολογία γιά νά ἐκφράσει τό "ἀρκετά κοντά" χρησιμοποιώντας ὅμως ὁποιαδήποτε σύνολα, ὄχι ἀναγκαστικά ἀνοιχτά.

<u>Ὁρισμός:</u> Ὁ τοπολογικός χῶρος (X,τ) λέγεται τοπολογικός χῶρος τοῦ <u>Hausdorff</u> ἐάν γιά κάθε ζεῦγος διαφορετικῶν σημείων τοῦ X, $x,y\in X$, $x\neq y$, ὑπάρχουν δύο ἀνοιχτά σύνολα $A_x\ni\{x\}$ καί $A_y\ni\{y\}$ τέτοια ὥστε $A_x\cap A_y=\phi$.

Ἡ ἰδέα τοῦ τοπολογικοῦ χώρου Hausdorff εἶναι ὅτι ἡ τοπολογία εἶναι ἀρκετά λεπτή, δηλ. περιλαμβάνει ἀρκετά ἀνοιχτά σύνολα, ὥστε νά μπορεῖ νά ξεχωρίσει δύο ὁποιαδήποτε διαφορετικά σημεῖα. Hausdorff εἶναι ἡ διακριτική ἱκανότητα πού συνήθως ἀπαιτοῦμε νά ἔχουν οἱ τοπολογίες πού χρησιμοποιοῦμε στή φυσική. Προφανῶς, ἐάν ἡ τοπολογία τ εἶναι Hausdorff, κάθε τοπολογία λεπτότερη τῆς τ εἶναι ἐπίσης Hausdorff.

Παράδειγμα: Ἐάν τό σύνολο X ἔχει δύο τουλάχιστον στοιχεῖα καί τ εἶναι ἡ μή διακεκριμένη τοπολογία στό X, ἡ τοπολογία δέν εἶναι Hausdorff, ἀφοῦ τό μόνο ἀνοιχτό σύνολο πού περιέχει κάποιο στοιχεῖο τοῦ X εἶναι τό ἴδιο τό σύνολο X.

Παράδειγμα: Ὁ τοπολογικός χῶρος $(X, \tilde{\tau})$ τοῦ τρίτου παραδείγματος στή σελίδα 6 δέν εἶναι Hausdorff.

Ἡ ἑπόμενη ἔννοια πού θά ἀναπτύξουμε εἶναι ἡ ἔννοια τῆς συνέχειας. Θυμηθεῖτε ὅτι στά γενικά μαθηματικά τοῦ πρώτου ἔτους ἡ συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνεχής στό σημεῖο $x_0 \in \mathbb{R}$ ἐάν $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ τέτοιο ὥστε $|x - x_0| < \delta$ νά συνεπάγεται ὅτι $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Χρησιμοποιώντας τήν ἔννοια τῆς περιοχῆς ἡ ἴδια ἰδιότητα ἐκφράζεται ἰσοδύναμα καί ὡς ἑξῆς: Ἡ $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνεχής στό $x_0 \in \mathbb{R}$ ἐάν γιά κάθε περιοχή $M = (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ τοῦ $f(x_0)$ ὑπάρχει περιοχή $N = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ τοῦ x_0 τέτοια ὥστε $f(N) \subset M$. Αὐτή τήν ἰδιότητα θά πάρουμε σάν τόν ὁρισμό τῆς συνέχειας.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἄς εἶναι (X, τ_X) καί (X, τ_Y) τοπολογικοί χῶροι καί ἡ ἀπεικόνιση $f: X \ni x \longrightarrow f(x) \in Y$. Ἡ f λέγεται <u>συνεχής</u> στό $x_0 \in X$ ἐάν γιά κάθε περιοχή (ἀναφορικά μέ τήν τοπολογία τ_Y) M τοῦ $f(x_0)$ ὑπάρχει περιοχή N τοῦ x_0 (ἀναφορικά μέ τήν τ_X) ὥστε $\phi(N) \subset M$.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἡ $f: X \longrightarrow Y$ λέγεται συνεχής (continuous) ἐάν εἶναι συνεχής στό x_0 $\forall x_0 \in X$.

Θά χρειασθοῦμε λίγο συμβολισμό γιά νά ἀναπτύξουμε λίγο παραπάνω τήν ἔννοια τῆς συνέχειας. Ἔστω $f: A \longrightarrow B$ μία ἀπεικόνιση συνόλων (θεωροῦμε πάντοτε μονότιμες ἀπεικονίσεις). Ἐάν $K \subset A$,

$f(K) = \{ b \in B$ τέτοιο ὥστε $\exists\, a \in K$ ὥστε $f(a) = b\}$ λέγεται <u>εἰκόνα</u> (range ἤ image) τοῦ K. Ἐάν $\Lambda \subset B$,

$f^{-1}(\Lambda) = \{ a \in A$ τέτοιο ὥστε $f(a) \in \Lambda\}$ λέγεται <u>ἀντίστροφη εἰκόνα</u> (inverse image) τοῦ Λ. Προσοχή, ἡ f^{-1} ἐν γένει δέν εἶναι συνάρτηση. Εἶναι εὔκολο νά ἀποδειχθεῖ ὅτι

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad , \quad f^{-1}(B) = A \quad ,$$

$$f^{-1}(\Lambda^c) = [f^{-1}(\Lambda)]^c, \quad f^{-1}(\bigcup_j \Lambda_j) = \bigcup_j [f^{-1}(\Lambda_j)] \, ,$$

$$f^{-1}(\bigcap_j \Lambda_j) = \bigcap_j [f^{-1}(\Lambda_j)] \, ,$$ ὅπου Λ_j καί Λ εἶναι τυχαῖα ὑποσύνολα τοῦ B. Πρακτικά, γιά τίς ἀντίστροφες εἰκόνες ὅλες οἱ "προφανεῖς" ταυτότητες εἶναι σωστές. Γιά τίς εἰκόνες συνόλων ἡ κατάσταση δέν εἶναι τόσο ὄμορφη. Εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι $f(\emptyset) = \emptyset$ καί $f(\bigcup_j K_j) = \bigcup_j [f(K_j)]$, ἐνῶ ἐν γένει <u>δέν</u> εἶναι σωστό ὅτι $f(K^c) = [f(K)]^c$,

$f(B) = A$ καί $f(\bigcap_j K_j) = \bigcap_j [f(K_j)]$.

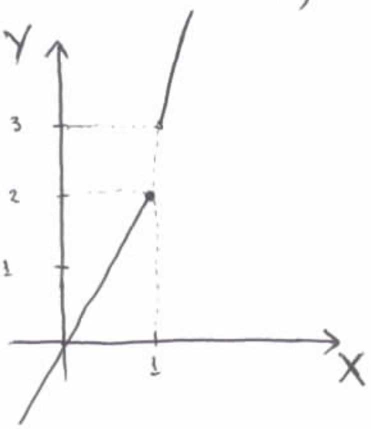
Ξαναγυρίζουμε τώρα στή μελέτη τῆς συνέχειας. Εἶναι εὔκολο νά ἀποδειχθεῖ (δοκιμάστε το!) ὅτι:

<u>Θεώρημα:</u> Ἡ $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ εἶναι συνεχής ἐάν καί μόνον ἐάν $\forall\ A\in\tau_Y \Longrightarrow f^{-1}(A)\in\tau_X$, δηλ. ἐάν ὅλες οἱ ἀντίστροφες εἰκόνες τῶν ἀνοιχτῶν συνόλων τοῦ Y εἶναι ἀνοιχτά σύνολα τοῦ X.

Μέ ἄλλα λόγια, οἱ ἀντίστροφες εἰκόνες τῶν συνεχῶν συναρτήσεων διατηροῦν τά ἀνοιχτά σύνολα. Ἐπειδή $f^{-1}(A^c)=[f^{-1}(A)]^c$, οἱ ἀντίστροφες εἰκόνες τῶν συνεχῶν συναρτήσεων διατηροῦν ἐπίσης καί τά κλειστά σύνολα.

<u>Παράδειγμα 1ον:</u> Περιμένουμε ὅτι ἡ συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 1\\ 3x, & x>1\end{cases},\qquad f:X=\mathbb{R}\to Y=\mathbb{R},$$ εἶναι ἀσυνεχής.



Ἄς δοῦμε πῶς διαπιστώνεται αὐτό σάν ἐφαρμογή τοῦ παραπάνω θεωρήματος. Τό μόνο ἐνδιαφέρον σημεῖο εἶναι τό $x_0=1$ καί οἱ τιμές $y_0=2$ καί $y=3$. Δοκιμάζουμε δύο ἀνοιχτά σύνολα τοῦ Y.

$f^{-1}\left(\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)\right)=\left(1,\frac{7}{6}\right)$ εἶναι ἀνοιχτό τοῦ X.

$f^{-1}\left(\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)\right)=\left(\frac{3}{4},1\right]$, πού δέν εἶναι ἀνοιχτό τοῦ X.

<u>Παράδειγμα 2ον:</u> Ἔστω $f:X\longrightarrow Y$. Ἐάν ὁ X ἔχει τήν διακεκριμένη τοπολογία, ἡ f εἶναι συνεχής. Ἐπίσης, ἐάν ὁ Y ἔχει τήν μή διακεκριμένη τοπολογία ἡ f εἶναι συνεχής (Πρέπει νά ἐλέγξουμε μόνο τά $f^{-1}(\phi)=\phi$ καί $f^{-1}(Y)=X$, καί τά δύο εἶναι ἀνοιχτά).

Παράδειγμα 3ον: Ἔστω $f: X \longrightarrow Y$ συνεχής. Ἡ f παραμένει συνεχής ἐάν δώσουμε στόν X μία λεπτότερη τοπολογία (ὑπάρχουν πολλοί περισσότεροι ὑποψήφιοι γιά νά εἶναι τά ἀνοιχτά σύνολα τῆς μορφῆς $f^{-1}(A)$). Ἐπίσης παραμένει συνεχής ἐάν δώσουμε στόν Y μία τραχύτερη τοπολογία (ὑπάρχουν λιγότερα ἀνοιχτά σύνολα στόν Y γιά τά ὁποῖα πρέπει νά ἐλέγξουμε τό $f^{-1}(A)$).

Θεωροῦμε τώρα τό ἑξῆς πρόβλημα: Ἔχουμε σύνολο X, τοπολογικό χῶρο (Y, τ_Y) καί ἀπεικόνιση $f: X \longrightarrow Y$. Γιά ποιές τοπολογίες στόν X ἡ f εἶναι συνεχής;

Ἡ διακεκριμένη τοπολογία στό X εἶναι μία λύση τοῦ συστήματος. Ψάχνουμε γιά τήν "καλύτερη" δυνατή λύση, δηλ. γιά τήν τραχύτερη τοπολογία στό X πού κάνει τήν f συνεχή. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς σελίδας 14 ἡ τοπολογία πού χρειαζόμαστε θά πρέπει νά περιέχει ὁπωσδήποτε ὅλα τά σύνολα $f^{-1}(A)$ γιά κάθε ἀνοιχτό σύνολο A τοῦ Y. Θά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ

$$\tau_X = \{ f^{-1}(A), \forall A \in \tau_Y \}$$

εἶναι τοπολογία στό X καί συνεπῶς εἶναι ἡ τραχύτερη δυνατή τοπολογία. Ἐπειδή οἱ ἀντίστροφες εἰκόνες ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις $f^{-1}(\phi) = \phi$, $f^{-1}(Y) = X$, $\bigcup_j [f^{-1}(A_j)] = f^{-1}[\bigcup_j A_j]$ καί $\bigcap_j [f^{-1}(A_j)] = f^{-1}[\bigcap_j A_j]$ ἡ ἀπόδειξη εἶναι προφανής.

Ἡ τοπολογία τ_X λέγεται <u>τοπολογία ἐξ ἐπαγωγῆς</u> (induced topology) στό X ἀπό τόν τοπολογικό χῶρο (Y, τ_Y) καί τήν ἀπεικόνιση $f: X \to Y$. Ἡ καλύτερη ἐφαρμογή τῆς τοπολογίας ἐξ ἐπαγωγῆς εἶναι ὁ ὁρισμός τοῦ τοπολογικοῦ ὑποχώρου.

Ἔστω τοπολογικός χῶρος (X, τ_X) καί B ὑποσύνολο τοῦ X. Ὑπάρχει ἡ φυσική (natural) ἀπεικόνιση $f: B \ni x \longrightarrow f(x) = x \in X$, πού ἁπλῶς ἀναγνωρίζει ὅτι τά στοιχεῖα τοῦ x εἶναι καί στοιχεῖα τοῦ X. Τό σύνολο B μέ τήν τοπολογία ἐξ ἐπαγωγῆς τ_A λέγεται <u>τοπολογικός ὑποχῶρος</u> (topological subspace) τοῦ X. Παρατηρεῖστε ὅτι κάθε ὑποσύνολο ἑνός τοπολογικοῦ χώρου εἶναι τοπολογικός ὑποχῶρος, ἐνῶ κάτι ἀντίστοιχο δέν συμβαίνει σέ ἄλλες μαθηματικές δομές (π.χ. ὁμάδες, ἄλγεβρες, διανυσματικούς χώρους). Τά ἀνοικτά σύνολα τοῦ B εἶναι ὅλα τά σύνολα τῆς μορφῆς

$f^{-1}(A) = A \cap B$, ὅπου A εἶναι ἀνοιχτό σύνολο τοῦ X.

<u>Παράδειγμα 1ον</u>: Θεωροῦμε τόν τοπολογικό ὑποχῶρο $B = [0,1]$ τοῦ Εὐκλείδειου τοπολ. χώρου $(\mathbb{R}, \tau_E)$. Ἔστω ἀριθμός a, $0 < a < 1$. $\left(-\frac{1}{2}, a\right) \cap [0,1] = [0, a)$ εἶναι ἀνοιχτό σύνολο τοῦ B, παρόμοια καί τό $(a, 1]$! Δέν εἶναι καθόλου παράξενο ἀφοῦ καί τό $[0,1]$ εἶναι ἀνοιχτό σύνολο τοῦ $[0,1]$.

<u>Παράδειγμα 2ον</u>: Στά σύνολα $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί $\mathbb{Z}$ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἡ τοπολογία ἐξ ἐπαγωγῆς ἀπό τόν $(\mathbb{R}, \tau_E)$ εἶναι ἡ διακεκριμένη τοπολογία.

Μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε ὑποχῶρος ἑνός τοπολογικοῦ χώρου Hausdorff εἶναι χῶρος Hausdorff.

4. Εἰδικοί τοπολογικοί χῶροι.

Ὁρισμοί: Ἔστω σύνολο X καί μία οἰκογένεια $\{A_j, j\in J\}$ ὑποσυνόλων τοῦ X. Ἡ $\{A_j, j\in J\}$ λέγεται κάλυμμα (cover) τοῦ X ἐάν $\bigcup_{j\in J} A_j = X$. Μία ὑποοικογένεια $\{A_j, j\in \tilde{J}\subset J\}$ λέγεται ὑποκάλυμμα (subcover) τοῦ X ἐάν $\bigcup_{j\in \tilde{J}} A_j = X$.

Ὁρισμός: Ὁ τοπολογικός χῶρος (X,τ) λέγεται συμπαγής (compact) ἐάν κάθε κάλυμμα τοῦ X πού ἀποτελεῖται ἀπό ἀνοιχτά σύνολα περιλαμβάνει ἕνα ὑποκάλυμμα τοῦ X μέ πεπερασμένο πλῆθος συνόλων (πεπερασμένο ὑποκάλυμμα).

Πρακτικά, ὁ (X,τ) εἶναι συμπαγής ἐάν ἡ τοπολογία "δέν ἔχει πάρα πολλά καί μικρά ἀνοιχτά σύνολα τά ὁποῖα καλύπτουν τό X καί τά ὁποῖα ὅλα σχεδόν εἶναι ἀναγκαῖα γιά νά ἐπιτευχθεῖ αὐτή ἡ κάλυψη". Ἐάν τό σύνολο X ἔχει πεπερασμένου πλήθους στοιχεῖα, γιά κάθε τοπολογία τ ὁ (X,τ) εἶναι συμπαγής. Ἐάν ὅμως τό X εἶναι ἄπειρο σύνολο, ἡ τοπολογία τ θά πρέπει νά εἶναι ἀρκετά τραχεῖα γιά νά εἶναι ὁ (X,τ) συμπαγής.

Ἀποδεικνύεται εὔκολα ὅτι ἄν ὁ (X,τ_1) εἶναι συμπαγής καί ἡ τ_2 εἶναι τραχύτερη τῆς τ_1 τότε καί ὁ (X,τ_2) εἶναι συμπαγής.

Ὁρισμός: Ἕνα ὑποσύνολο τοπολογικοῦ χώρου λέγεται συμπαγές ἐάν σάν τοπολογικός ὑπόχωρος εἶναι

Παράδειγμα: Τό $(0,1)$ (Εὐκλείδεια τοπολογία) δέν εἶναι συμπαγές. Πράγματι, ἡ οἰκογένεια τῶν ἀνοικτῶν συνόλων $I_n = \left(\frac{1}{n^2}, 1-\frac{1}{n^2}\right)$, $n = 2,3,4,\ldots$ καλύπτει τό $(0,1)$ — $\bigcup_{n=2}^{\infty} I_n = (0,1)$ — ἐνῶ κανένα πεπερασμένο πλῆθος ἀπ' αὐτά δέν τό καλύπτει.

Παράδειγμα: Ὁ τοπολογικός χῶρος $(\mathbb{R}, \tau_E)$, παρόμοια καί ὅλοι οἱ Εὐκλείδειοι τοπολογικοί χῶροι n-διαστάσεων πού θά βροῦμε στήν ἑπόμενη ἑνότητα, δέν εἶναι συμπαγής, ἔχει ὅμως συμπαγῆ ὑποσύνολα. Μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά συμπαγῆ ὑποσύνολα τοῦ $(\mathbb{R}, \tau_E)$ εἶναι ἀκριβῶς (ὅλα καί μόνον) αὐτά) πού εἶναι κλειστά καί περατωμένα.

Παρατήρηση: Οἱ ἰδιότητες "συμπαγής" καί Hausdorff εἶναι τελείως ἀντίθετες σ' ἕναν τοπολογικό χῶρο καί προσπαθοῦν νά ἀλληλοεξουδετερωθοῦν. Μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ τό ἑξῆς: Ἔστω (X,τ) συμπαγής καί Hausdorff τοπολογικός χῶρος. Ἐάν ἡ τ_1 εἶναι γνήσια τραχύτερη τῆς τ, ὁ (X,τ_1) δέν εἶναι Hausdorff. Ἐάν ἡ τ_2 εἶναι γνήσια λεπτότερη τῆς τ, ὁ (X,τ_2) δέν εἶναι συμπαγής.

Παρατήρηση: Οἱ χῶροι πού μελετοῦμε στή φυσική συνήθως <u>δέν</u> εἶναι συμπαγεῖς. Πολλές φορές ὅμως χρειάζεται νά μελετήσουμε ὁρισμένα συμπαγῆ ὑποσύνολά τους. Μία ἰδιότητά τους πού τά κάνει πολύ χρήσιμα εἶναι καί ἡ ἑξῆς: ἐάν ἡ $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ εἶναι συνεχής καί C εἶναι συμπαγές ὑποσύνολο τοῦ X τότε ἡ f παίρνει μέγιστη καί ἐλάχιστη τιμή στό C.

Ὁρισμός: Ὁ τοπολογικός χῶρος (X, τ) λέγεται παρασυμπαγής (paracompact) ἐάν κάθε κάλυμμά του μέ ἀνοιχτά σύνολα ἔχει ἕνα ὑποκάλυμμα (ἐν γένει ἄπειρο) τέτοιο ὥστε κάθε σημεῖο τοῦ X ἀνήκει τό πολύ σέ πεπερασμένου πλήθους σύνολα τοῦ ὑποκαλύμματος.

Ἡ συνθήκη "παρασυμπαγής" εἶναι ἀσθενέστερη ἀπό τήν συμπαγής καί πάρα πολύ ἐξειδικευμένη. Εἶναι πολύ δύσκολο, ἀκόμη καί στούς μαθηματικούς, νά κατασκευάσουν ἕνα τοπολογικό χῶρο πού δέν εἶναι παρασυμπαγής. Παρά ταῦτα δέν ξέρω (πιθανόν καί νά μήν ὑπάρχει) κανένα φυσικό λόγο πού ἐξηγεῖ γιατί οἱ τοπολογικοί χῶροι πού μελετοῦμε στή φυσική πρέπει νά εἶναι παρασυμπαγεῖς. Ὑπάρχει ὅμως κάποιος μαθηματικός λόγος: Στούς τοπολογικούς μας χώρους θά δώσουμε ἀργότερα λίγη ἐπιπλέον δομή καί θά τούς κάνουμε πολλαπλότητες. Γι' αὐτές μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι δέχονται ἕναν τελεστή διαφορίσεως (derivative operator) ἐάνν ὁ ἀντίστοιχος τοπολογικός χῶρος εἶναι παρασυμπαγής. Ὥστε λοιπόν θά ἀπαιτήσουμε τήν ἰδιότητα "παρασυμπαγής" ἀπό τούς χώρους μας γιά νά μποροῦμε ἀργότερα, ὅταν θά μελετοῦμε δυναμική, νά διαφορίζουμε.

Ἡ τρίτη καί τελευταία ἔννοια πού θά ἀναπτύξουμε σ' αὐτή τήν ἑνότητα εἶναι ἡ ἔννοια τῆς συνάφειας (connectedness).

Μιλώντας πρακτικά, ἕνας τοπολογικός χῶρος δέν εἶναι συναφής ἐάν ἀποτελεῖται ἀπό μερικά τμήματα πού δέν ἐφάπτονται μεταξύ τους καί πού δέν μποροῦν νά μεγαλώσουν συνεχῶς ὥστε νά ἔλθουν σέ ἐπαφή, ἢ ἐάν ἀποτελεῖται ἀπό δύο τουλάχιστον κομμάτια πού δέν μποροῦν νά ἔλθουν σέ ἐπικοινωνία, σέ ἐπαφή μεταξύ τους κάνοντας κάτι συνεχές.

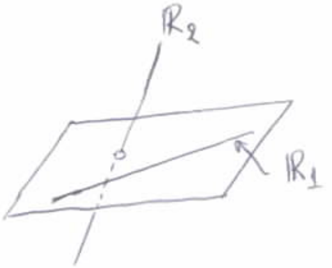
Οἱ χῶροι πού μελετοῦμε στή φυσική θέλουμε νά εἶναι συναφεῖς. Ἄς πάρουμε γιά παράδειγμα τόν χωρόχρονο τῆς

Σχετικότητας. Ἕνας μή συναφής χωρόχρονος σημαίνει ὅτι ὑπάρχουν κομμάτια τῆς ἱστορίας τοῦ σύμπαντος πού δέν εἶχαν, δέν ἔχουν καί οὔτε θά ἔχουν καμμία σχέση μεταξύ τους, δέν ἀλληλοεπιδροῦν, δέν ὑπάρχει (οὔτε καί νοητός) τρόπος ἐπικοινωνίας μεταξύ τους καί δέν ὑπάρχουν πειράματα πού μποροῦν νά κάνουν οἱ κάτοικοι τοῦ ἑνός κομματιοῦ γιά νά διαπιστώσουν τήν ὕπαρξη τῶν ἄλλων. Γιά τόν φιλόσοφο, τόν μεταφυσικό καί τόν θεολόγο καί τά ἄλλα κομμάτια μποροῦν νά ὑπάρχουν, ὄχι ὅμως καί γιά τόν φυσικό, ὁ ὁποῖος περιορίζει τίς μελέτες του μόνο στό δικό του κομμάτι, τό συναφές, στό ὁποῖο μπορεῖ νά κάνει ἐπιστήμη.

<u>Ὁρισμός:</u> Ὁ τοπολογικός χῶρος (X,τ) λέγεται <u>συναφής</u> (connected) ἐάν τά μόνα ὑποσύνολά του πού εἶναι συγχρόνως ἀνοικτά καί κλειστά εἶναι τό $\emptyset$ καί τό X.

Ἐπειδή ὁ ὁρισμός φαίνεται ἀρκετά παράξενος, θά παρουσιάσουμε μερικά παραδείγματα καί θεωρήματα γιά νά πείσουμε ὅτι ὁ ὁρισμός πράγματι συνεπάγεται τήν ἔννοια τῆς συνάφειας πού θέλουμε νά ἐκφράσουμε.

<u>Παράδειγμα 1ον:</u> Θεωροῦμε δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες, δηλ. δύο εὐθεῖες πού δέν κεῖνται στό ἴδιο ἐπίπεδο, κάθε μία μέ τήν Εὐκλείδεια τοπολογία. Θεωροῦμε τήν ἕνωση



$X = \mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2$, καί ὁρίζουμε τοπολογία στό X κατά τόν πολύ φυσιολογικό τρόπο:

$$\tau = \{ A \subset X \text{ τέτοιο ὥστε } A \cap \mathbb{R}_1 \text{ εἶναι ἀνοιχτό τοῦ } \mathbb{R}_1 \text{ καί } A \cap \mathbb{R}_2 \text{ εἶναι ἀνοιχτό σύνολο τοῦ } \mathbb{R}_2 \}.$$

[Αὐτή ἡ κατασκευή εἶναι μία εἰδική περίπτωση τοῦ εὐθέως ἀθροίσματος τοπολογικῶν χώρων, μιᾶς πράξης πού ἀπό δύο ὁποιουσδήποτε τοπολογικούς χώρους κατασκευάζει ἕναν τρίτο].

Ἄς μελετήσουμε τό γνήσιο, μή κενό ὑποσύνολο τοῦ X $\mathbb{R}_1$.
$\mathbb{R}_1 \cap X = \mathbb{R}_1$ καί $\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2 = \emptyset \Rightarrow \mathbb{R}_1$ εἶναι ἀνοιχτό τοῦ (X, τ), παρόμοια καί τό $\mathbb{R}_2$. Ἀλλά τό συμπλήρωμα τοῦ $\mathbb{R}_1$ εἶναι $\mathbb{R}_1^c = \mathbb{R}_2 =$ ἀνοιχτό, ἄρα τό R_1 εἶναι ἐπίσης καί κλειστό καί ὁ (X, τ) δέν εἶναι συναφής, πράγμα πού τό περιμέναμε.

Τί συμβαίνει ἐάν οἱ R_1 καί $\mathbb{R}_2$ τέμνονται, ὁπότε περιμένουμε τόν X νά εἶναι συναφής; Ἔστω $\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2 = \{p\}$. Ξαναδοκιμάζουμε τό μή κενό γνήσιο ὑποσύνολο $\mathbb{R}_1$ πού μαζί μέ τό $\mathbb{R}_2$ εἶναι οἱ μόνοι ὑποψήφιοι γιά νά εἶναι σύνολα συγχρόνως ἀνοιχτά καί κλειστά.
$\mathbb{R}_1^c = \mathbb{R}_2 - \{p\} = (-\infty, p) \cup (p, +\infty) =$ ἀνοιχτό $\Rightarrow$ $\mathbb{R}_1$ εἶναι κλειστό. Ἀλλά, $\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2 = \{p\}$, κλειστό σύνολο τοῦ $\mathbb{R}_2 \Rightarrow$ τό $\mathbb{R}_1$ δέν εἶναι ἀνοιχτό σύνολο τοῦ X. Φυσικά δέν ἀποδείξαμε ὅτι ὁ (X, τ) εἶναι συναφής. Ἁπλῶς διαπιστώσαμε ὅτι ὁ ὁρισμός πού δώσαμε εἶναι ἀρκετά ἔξυπνος ὥστε νά μπορεῖ νά διακρίνει τίς περιπτώσεις πού οἱ $\mathbb{R}_1$ καί $\mathbb{R}_2$ τέμνονται ἤ δέν τέμνονται.

Παράδειγμα 2ον: Ὁ (X,τ) μέ τήν μή διακεκριμένη τοπολογία εἶναι συναφής. Ὁ (X,τ) μέ τήν διακεκριμένη τοπολογία δέν εἶναι συναφής ἐάν τό σύνολο X ἔχει δύο τουλάχιστον στοιχεῖα. Ἐάν ὁ (X,τ) εἶναι συναφής, παραμένει συναφής γιά κάθε τοπολογία τραχύτερη τῆς τ.

Θεώρημα: Ἔστω (X,τ) τοπολογικός χῶρος. Ἐάν γιά δύο οποιαδήποτε σημεῖα x καί x' τοῦ X ὑπάρχει μία συνεχής ἀπεικόνιση $\phi : [0,1] \longrightarrow X$ τέτοια ὥστε $\phi(0)=x$ καί $\phi(1)=x'$, ὁ (X,τ) εἶναι συναφής.

Ὁρισμός: Τό ὑποσύνολο $Y \subset X$ τοῦ τοπολογικοῦ χώρου (X,τ) λέγεται συναφές ἐάν σάν τοπολογικός ὑποχῶρος τοῦ (X,τ) εἶναι συναφής.

Θεώρημα: Ἔστω (X,τ) τοπολογικός χῶρος καί $A_j,\ j\in J$ συναφῆ ὑποσύνολα τοῦ X τέτοια ὥστε ἡ τομή δύο ὁποιωνδήποτε ὑποσυνόλων A_j νά μήν εἶναι κενή. Τότε ἡ ἕνωση $\bigcup\limits_{j\in J} A_j$ εἶναι συναφές σύνολο.

Τά δύο παραπάνω θεωρήματα, πού ἀποδεικνύονται εὔκολα ἄν εἰσάγει κανείς τήν ἔννοια τῆς συναφοῦς συνιστώσας, δείχνουν ὅτι "εἶναι σωστό ὅτι περιμέναμε νά εἶναι σωστό" καί ἐνισχύουν ἔτσι τήν πίστη μας στόν ὁρισμό τῆς συνάφειας πού δώσαμε.

Τελειώνουμε ἐπαναλαμβάνοντας ὅτι στή φυσική συνήθως μελετοῦμε Hausdorff, συναφεῖς, παρασυμπαγεῖς χώρους καί μερικές φορές καί συμπαγεῖς ὑποχώρους αὐτῶν.

5. Μετρικοί χώροι.

Σ' αὐτὴ τὴν ἑνότητα θὰ ἀναφερθοῦμε πολὺ βασικὰ σὲ μετρικοὺς χώρους (metric spaces) γιὰ νὰ ὁρίσουμε τὸν Εὐκλείδειο χῶρο n-διαστάσεων ποὺ θὰ μᾶς χρειασθεῖ στὸν ὁρισμὸ τῆς ἔννοιας τῆς πολλαπλότητας (manifold).

<u>Ὁρισμός:</u> Ἔστω σύνολο $X \neq \emptyset$ καὶ συνάρτηση

$d: X \times X \ni (x,y) \longrightarrow d(x,y) \in \mathbb{R}$. Ἡ d λέγεται <u>μετρική</u> στὸ X ἐὰν ἱκανοποιεῖ τὶς συνθῆκες:

i) $d(a,b) \geq 0$, $\forall a,b \in X$.

ii) $d(a,b) = 0$ ἐὰνν $a = b$.

iii) $d(a,b) = d(b,a)$, $\forall a,b \in X$ (συμμετρική)

iv) $d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b)$, $\forall a,b,x \in X$

(τριγωνικὴ ἀνισότητα).

<u>Παρατήρηση:</u> Ἡ i) εἶναι συνέπεια τῶν ii), iii) καὶ iv). Πράγματι, θέσε $b = a$ στὴν iv).

Ἐπίσης, μερικὲς φορὲς ἡ τριγωνικὴ ἀνισότητα ἀπαιτεῖται νὰ ἰσχύει μὲ τὴν μορφὴ

$\tilde{iv}$) $d(a,b) \leq d(a,x) + d(b,x)$, $\forall a,b,x \in X$.

Τότε οἱ ii) καὶ $\tilde{iv}$) συνεπάγονται τὶς i) καὶ iii).

Πράγματι, γιὰ $x = a$ ἡ $\tilde{iv}$) δίνει $d(a,b) \leq d(b,a)$, $\forall a,b \in X$.

Μὲ ἐναλλαγὴ τῶν a καὶ b παίρνουμε παρόμοια ὅτι

$d(b,a) \leq d(a,b)$ καὶ ἄρα $d(a,b) = d(b,a)$. Μετά, ἐφαρμόζοντας τὴν $\tilde{iv}$) γιὰ $b = a$, παίρνουμε τὴν i).

<u>Παράδειγμα 1ον:</u> Ἔστω $X = \mathbb{R}$, $d(a,b) = |a-b|$. Ἡ d εἶναι μετρικὴ στὸ σύνολο $\mathbb{R}$.

<u>Ὁρισμός:</u> Τὸ ζεῦγος (X, d) ὅπου d εἶναι μία μετρικὴ στὸ σύνολο X λέγεται <u>μετρικὸς χῶρος</u> (metric space).

Παράδειγμα 2ον: Ἔστω $X = \mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots a_n),\ a_i \in \mathbb{R}\}$.
Ἡ πυθαγόρεια ἀπόσταση

$$d(a,b) = \{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + \dots + (a_n-b_n)^2\}^{1/2}$$ εἶναι

μετρική στό $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 3ον: $X = \mathbb{R}^2$, $d(a,b) = |a_1-b_1| + |a_2-b_2|$, παρόμοια καί στόν $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 4ον: X εἶναι τυχόν σύνολο καί

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ἐάν } x \neq y \\ 0 & \text{ἐάν } x = y. \end{cases}$$

Εἶναι ἡ ἁπλούστερη μετρική πού μπορεῖ νά δοθεῖ σέ τυχόν σύνολο.

Παράδειγμα 5ον: Ἔστω $C[a,b]$ τό σύνολο τῶν συνεχῶν πραγματικῶν συναρτήσεων πού ὁρίζονται στό διάστημα $[a,b]$. Ἡ $d(f,g) = \int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx$ εἶναι μετρική στό $C[a,b]$. Ὁ μετρικός χῶρος πού προκύπτει συνήθως συμβολίζεται $L^2(a,b)$ καί χρησιμοποιεῖται πολύ στή συναρτησιακή ἀνάλυση. Ἡ μετρική $d(f,g)$ εἶναι ἡ ἔκφραση τῆς ἀρχῆς τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων σέ συναρτήσεις.

Παράδειγμα 6ον: Ἔστω d μετρική στό σύνολο X. Χρησιμοποιώντας λίγη γυμνασιακή ἄλγεβρα (βασικά ὅτι $a>0$, $b>0$, $a<b \Rightarrow \frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$) μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι καί ἡ $\tilde{d}(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ εἶναι μία καινούργια μετρική στό X.
Ὅλες οἱ ἀποστάσεις στόν $(X,\tilde{d})$ εἶναι μικρότερες τῆς μονάδος. Φυσικά, μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε τό "1" τοῦ παρονομαστῆ μέ ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό καί νά κατασκευάσουμε ἕνα μετρικό χῶρο μέ ἀποστάσεις ὁσοδήποτε μικρές.

Οἱ μετρικοί χῶροι ἔχουν πολλή περισσότερη δομή ἀπό τούς τοπολογικούς χώρους, μποροῦν νά ἀπαντήσουν καί στό "Πόσο μακρυά". Μόνο πού δέν μποροῦν νά ξεχωρίσουν διαφορετικές κατευθύνσεις. Ἐφ' ὅσον ὅμως ἀπαντοῦν στήν ἐρώτηση "πόσο μακρυά" περιμένουμε ὅτι οἱ μετρικοί χῶροι μποροῦν νά ἀπαντήσουν καί στήν ἁπλούστερη ἐρώτηση "εἶναι κοντά;" ἤ "εἶναι μακρυά;". Αὐτές οἱ ἰδέες μαθηματικά ἐκφράζονται ὡς ἑξῆς: Κάθε μετρικός χῶρος εἶναι καί τοπολογικός χῶρος καί ἡ τοπολογία του ὁρίζεται μονοσήμαντα ἀπό τήν μετρική του.

Ἔστω (X,d) μετρικός χῶρος. Ὁρίζουμε τήν <u>ἀνοιχτή μπάλλα</u> (open ball) μέ κέντρο $x_0 \in X$ καί ἀκτίνα $\varepsilon > 0$ νά εἶναι τό σύνολο

$$B_\varepsilon(x_0) = \{ x \in X \text{ ὥστε } d(x,x_0) < \varepsilon \}.$$

Ὁρίζουμε τό ἑξῆς σύνολο ὑποσυνόλων τοῦ X:

$$\tau = \left\{ A \text{ ὅπου } A \subset X \text{ πού ἔχει τήν ἑξῆς ἰδιότητα: } \forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0 \text{ ὥστε } B_\varepsilon(x) \subset A \right\}.$$

Μπορεῖ εὔκολα νά ἀποδειχθεῖ [τό μόνο πού χρειάζεται νά ἀποδειχθεῖ εἶναι ὅτι γιά κάθε σημεῖο πού ἀνήκει στήν τομή δύο ἀνοιχτῶν μπαλλῶν ὑπάρχει ἀνοιχτή μπάλλα, μέ κέντρο τό σημεῖο αὐτό καί κατάλληλη ἀκτίνα, πού ἀνήκει ἐξ ὁλοκλήρου στήν τομή τους] ὅτι τό σύνολο τ εἶναι τοπολογία στό X. Εἶναι ἡ τοπολογία πού καθορίζεται ἀπό τήν μετρική d. Πρακτικά τό σύνολο τ κατασκευάζεται παίρνοντας ὅλες τίς ἑνώσεις καί ὅλες τίς πεπερασμένες τομές ὅλων τῶν ἀνοιχτῶν μπαλλῶν μέ κέντρο κάθε στοιχεῖο τοῦ X καί ὁποιαδήποτε ἀκτίνα.

Παράδειγμα 7ον: Ἡ μετρική τοῦ πρώτου παραδείγματος δίνει τόν Εὐκλείδειο τοπολογικό χῶρο $(\mathbb{R}, \tau_E)$. Ἡ ἀνοιχτή μπάλλα $B(x_0, \varepsilon)$ εἶναι τό ἀνοιχτό διάστημα $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

Παράδειγμα 8ον: Ὁ χῶρος $\mathbb{R}^n$ μέ τήν μετρική τοῦ δεύτερου παραδείγματος καί τήν τοπολογία πού συνεπάγεται αὐτή λέγεται Εὐκλείδειος (τοπολογικός) χῶρος n-διαστάσεων καί παριστάνεται E^n.

Παράδειγμα 9ον: Ἡ μετρική τοῦ τέταρτου παραδείγματος δίνει στό X τήν διακεκριμένη τοπολογία γιατί, π.χ., $B_{1/2}(x)=\{x\}$.

Παρατηρήσεις: i) Οἱ τοπολογικοί χῶροι πού προέρχονται ἀπό μετρικούς χώρους εἶναι ἀρκετά ἐξειδικευμένοι. Π.χ., εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι ὅλοι αὐτοί οἱ χῶροι εἶναι Hausdorff. Γιά πολλά χρόνια ἦταν ἀνοιχτό τό πρόβλημα τοῦ νά βρεθοῦν ἀναγκαῖες καί ἱκανές τοπολογικές συνθῆκες ὥστε μία τοπολογία νά προέρχεται ἀπό κάποια μετρική.

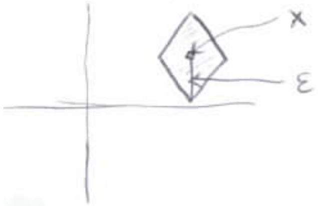
ii) Εἶναι δυνατόν (καί στήν πράξη συμβαίνει πολύ συχνά!) δύο διαφορετικές μετρικές νά ὁρίζουν τελικά τήν ἴδια τοπολογία, ἄν καί χρησιμοποιοῦν ἐν γένει διαφορετικές ἀνοιχτές μπάλλες. Σάν παράδειγμα ἀναφέρουμε τίς δύο μετρικές τοῦ ἕκτου παραδείγματος. Πράγματι, γιά $0<\varepsilon<1$,

$$\tilde{d} = \frac{d}{1+d} < \varepsilon \iff d < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad \text{καί ἄρα}$$

$B(x, \varepsilon, \tilde{d}) = B\left(x, \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, d\right)$. Ἐπειδή στήν κατασκευή τῆς τοπολογίας χρησιμοποιοῦμε τίς ἀνοιχτές μπάλλες μέ ὁποιαδήποτε ἀκτίνα, οἱ ἀνοιχτές μπάλλες τῶν δύο τοπολογιῶν οὐσιαστικά συμπίπτουν (πιθανή ἐξαίρεση τό X) καί οἱ δύο μετρικές ὁρίζουν τήν ἴδια τοπολογία.

Ἐπίσης μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ μετρική τοῦ τρίτου

Παραδείγματος δρίζει στόν $\mathbb{R}^2$ τήν εὐκλείδεια τοπολογία, ἄν καί οἱ ἀνοιχτές του μπάλλες



εἶναι τετράγωνα στό ἐπίπεδο $\mathbb{R}^2$.

Θά τελειώσουμε τήν ἑνότητα συνοψίζοντας μερικές βασικές ἰδιότητες τοῦ χώρου E^n.

1. Τά σημεῖα τοῦ E^n εἶναι τῆς μορφῆς $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, δηλ. μποροῦν νά παρασταθοῦν μέ συντεταγμένες.
2. Οἱ συναρτήσεις $f: E^n \to \mathbb{R}$ εἶναι ἀκριβῶς οἱ $\dfrac{\text{πραγματικές}}{\text{συναρτήσεις}}$ n ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν οἱ ὁποῖες, ἐν γένει, μποροῦν νά διαφορισθοῦν.
3. Ὁ E^n εἶναι τοπολογικός χῶρος.
4. Ὁ E^n εἶναι μετρικός χῶρος
5. Ὁ E^n εἶναι διανυσματικός χῶρος.

Οἱ πολλαπλότητες πού θά δρίσουμε στήν ἐπόμενη ἑνότητα θά ἔχουν τίς ἰδιότητες 1, 2, καί 3 ἀλλ' ὄχι καί τίς δύο τελευταῖες.

6. Πολλαπλότητες.

Ποῦ καί γιατί χρειαζόμαστε τίς πολλαπλότητες; Στή φυσική, ἐπειδή ὑπάρχουν φυσικά συστήματα τά ὁποῖα, στήν καλύτερή τους περιγραφή, δέν ζοῦν καί ἐξελίσσονται στόν $\mathbb{R}^n$ ἤ κάποιο κομμάτι του. Π.χ. γιά τό σφαιρικό ἐκκρεμές μέ σταθερό σημεῖο ἐξαρτήσεως καί σταθερό μῆκος l ὁ χῶρος μορφῆς εἶναι ἡ σφαίρα (ἤ ἕνα κομμάτι τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας) ἀκτίνας l. Ποιό γενικά θά μπορούσαμε νά φανταστοῦμε ἕνα σύστημα μέ χῶρο μορφῆς $\mathbb{R}^n$ καί τό ὁποῖο ὑπόκειται σέ ὡρισμένους ὁλόνομους δεσμούς. Ἡ ἐξάλειψη τῶν ὁλόνομων δεσμῶν συνήθως ὁδηγεῖ σέ χῶρο μορφῆς μικρότερης μέν διαστάσεως ἀλλά ἀρκετά πολύπλοκο πού εἶναι πολλαπλότητα.

Ἄς κρατήσουμε γιά λίγο στό μυαλό μας (προσωρινά καί πρόχειρα) τήν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας σάν τό πρότυπο τῆς πολλαπλότητας. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε μικρή περιοχή της μοιάζει μ' ἕνα κομμάτι τοῦ $\mathbb{R}^2$, λίγο παραμορφωμένο. Γι' αὐτό θά δεχτοῦμε ὅτι μικρά κομμάτια τῆς πολλαπλότητας ἔχουν τήν τοπολογική δομή τοῦ $\mathbb{R}^n$, γιά κάποιο n. Ἡ τοπολογική ὅμως δομή δέν φτάνει. Πάνω στίς πολλαπλότητες θέλουμε νά κάνουμε δυναμική, νά γράφουμε διαφορικές ἐξισώσεις, δηλ. θά πρέπει νά ξέρουμε καί νά διαφορίζουμε. Πράγματα πού ξέρουμε νά τά διαφορίζουμε εἶναι οἱ συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν [Ὑπάρχει ἐπίσης καί ἡ παράγωγος Frechet, στήν ὁποία διαφορίζουμε συναρτήσεις ὡρισμένες σέ χώρους Banach. Ἡ θεώρηση αὐτῶν ὁδηγεῖ στήν μελέτη πολλαπλοτήτων ἀπείρου διαστάσεως, πού δέν θά τίς μελετήσουμε]. Γιά νά εἴμαστε λοιπόν σέ θέση νά διαφορίζουμε θά ὑποθέσουμε ὅτι τὰ σημεῖα τῆς πολλαπλότητας μποροῦν νὰ παρασταθοῦν μὲ συντεταγμένες. Γιὰ τὶς "ἐνδιαφέρουσες" πολλαπλότητες ἕνα μόνο σύστημα συντεταγμένων δὲν θὰ ἐπαρκεῖ γιὰ τὴν περιγραφὴ ὅλων τῶν σημείων τους. Τέλος θὰ δεχθοῦμε ὅτι ὁ χῶρος μας εἶναι ἕνα "σύνολο δεμένο", καὶ θὰ τὸ ἐκφράσουμε μὲ τὴν ἀπαίτηση ὅτι τὰ μικρὰ παραμορφωμένα κομμάτια τοῦ $\mathbb{R}^n$ ἀλληλοεπικαλύπτονται. Οἱ

περιοχὲς τῶν ἐπικαλύψεων, ὅπου ἰσχύουν καὶ τὰ δύο συστήματα συντεταγμένων, θὰ χρησιμοποιοῦνται γιὰ νὰ μεταβαίνουμε ἀπὸ ἕνα σύστημα συντεταγμένων σ' ἄλλο.

Ἀρχίζουμε τώρα τὴν μαθηματικὴ θεμελίωση τῶν παραπάνω ἐννοιῶν.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἔστω σύνολο M. Ἕνας <u>n-χάρτης</u> (n-chart) στὸ M εἶναι ἕνα ζεῦγος (V, ϕ) ὅπου V εἶναι ὑποσύνολο τοῦ M καὶ ἡ ϕ εἶναι ἀπεικόνιση $\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ τέτοια ὥστε:

i) $\phi(V)$ εἶναι ἀνοιχτὸ σύνολο τοῦ E^n $(=\mathbb{R}^n)$

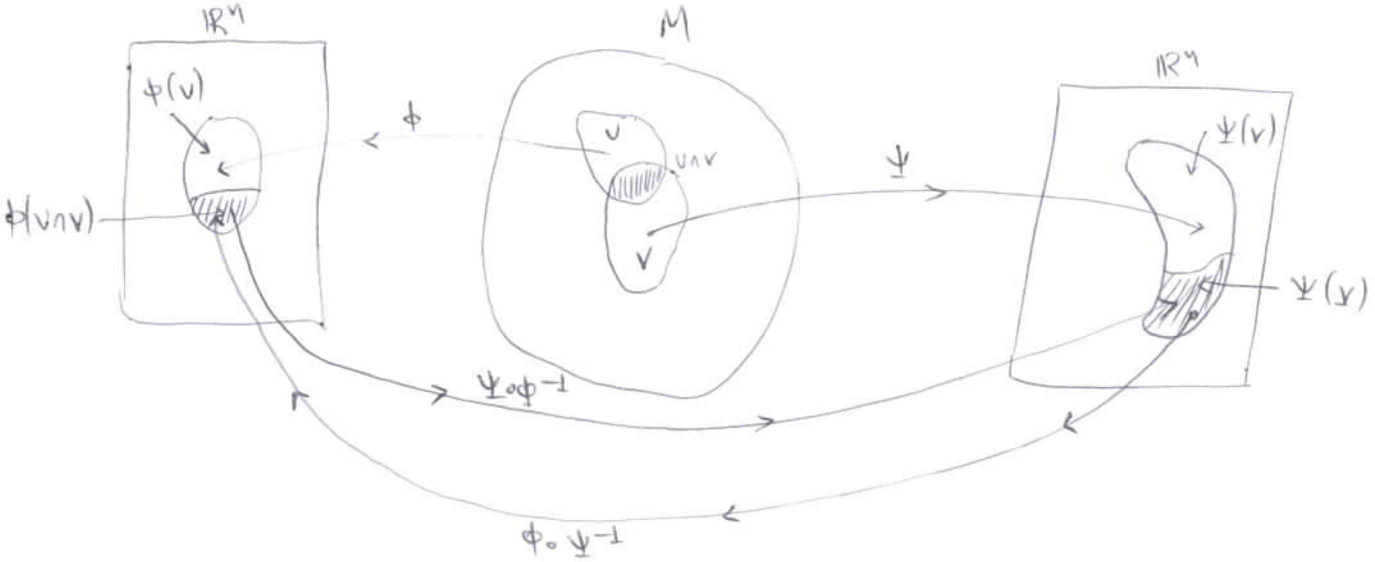
ii) Ἡ ϕ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη.

Ἡ ἀπεικόνιση ϕ "ταυτοποιεῖ" (identifies) τὰ σημεῖα τοῦ V μὲ τὰ σημεῖα τοῦ $\mathbb{R}^n$ στὸ $\phi(V)$ καὶ μ' αὐτὸ τὸν τρόπο δίνει συντεταγμένες στὰ σημεῖα τοῦ V, τὶς συντεταγμένες τῶν εἰκόνων τους. Τὸ πεδίο τιμῶν τῶν συντεταγμένων καθορίζεται ἀπὸ τὸ $\phi(V)$. Ἐπειδὴ ἡ ϕ εἶναι ἀμφί, διαφορετικὲς τιμὲς τῶν συντεταγμένων περιγράφουν διαφορετικὰ σημεῖα τοῦ V, δηλ. εἶναι "καλές" συντεταγμένες στὸ V.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἔστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Ἡ f λέγεται διαφορίσιμης κλάσης <u>C^p</u> ἐὰν ὅλες οἱ μερικὲς παράγωγοι τῆς f τάξεως p ὑπάρχουν καὶ εἶναι συνεχεῖς. Λέγεται τάξεως <u>C^∞</u> ἢ <u>λεία</u> (smooth) ἐὰν ὑπάρχουν ὅλες οἱ

παράγωγοί της καὶ εἶναι συνεχεῖς. Λέγεται τάξεως C^ω ἐάν εἶναι ἀναλυτική, δηλ. ἐάν μπορεῖ νά ἐκφρασθεῖ σάν σειρά Taylor στή γειτονιά ὁποιουδήποτε σημείου της.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἔστω σύνολο M καὶ δύο n-χάρτες (U, ϕ) καὶ (V, Ψ).



Οἱ (U, ϕ) καὶ (V, Ψ) λέγονται C^∞ (ἀντίστοιχα C^p, C^ω) – <u>συμβιβαστοί</u> (compatible) ἐάν

i) $\phi(U\cap V)$ καὶ $\Psi(U\cap V)$ εἶναι ἀνοιχτά σύνολα τοῦ $\mathbb{R}^n$.

ii) οἱ συναρτήσεις

$$\Psi\phi^{-1} : \phi(U\cap V) \longrightarrow \Psi(U\cap V) \quad \text{καὶ}$$
$$\phi\Psi^{-1} : \Psi(U\cap V) \longrightarrow \Psi(U\cap V)$$

εἶναι C^∞ (ἀντίστοιχα C^p, C^ω) συναρτήσεις.

Ἐάν $U\cap V = \emptyset$, οἱ χάρτες θεωροῦνται συμβιβαστοί.

Παρατηρεῖστε ὅτι οἱ $\Psi\circ\phi^{-1}$ καὶ $\phi\circ\Psi^{-1}$ ὑπάρχουν ἐπειδή οἱ ϕ καὶ Ψ εἶναι ἀμφί. Ἐπίσης, ἐπειδή $\phi(U\cap V)$ καὶ $\Psi(U\cap V)$ εἶναι ἀνοιχτά σύνολα τοῦ $\mathbb{R}^n$ μποροῦμε νά λέμε (καὶ νά ἐλέγξουμε) ὅτι οἱ $\Psi\circ\phi^{-1}$ καὶ $\phi\circ\Psi^{-1}$ εἶναι C^p, C^∞ ἤ C^ω.

<u>Ορισμός:</u> <u>C^∞-πολλαπλότητα</u> (C^∞ manifold, smooth manifold) n-διαστάσεων είναι ένα σύνολο M καὶ συλλογή n-χαρτῶν $\{V_\alpha, \phi_\alpha\}$ τέτοια ὥστε:

i) Δύο ὁποιοιδήποτε χάρτες τῆς συλλογῆς εἶναι C^∞-συμβιβαστοί.

ii) Οἱ χάρτες καλύπτουν τὸ M, δηλαδὴ $\bigcup_\alpha V_\alpha = M$

iii) Κάθε n-χάρτης τοῦ M ποὺ εἶναι συμβιβαστὸς μὲ ὅλους τοὺς χάρτες τῆς συλλογῆς ἀνήκει καὶ αὐτὸς στὴ συλλογή.

Παρόμοια ὁρίζονται C^p καὶ C^ω (ἀναλυτικές) πολλαπλότητες.

C^0 πολλαπλότητες λέγονται καὶ <u>τοπολογικὲς πολλαπλότητες</u> (topological manifolds)

<u>Παρατηρήσεις:</u>

1. Ἡ συνθήκη ii) ἐξασφαλίζει ὅτι ἡ γειτονιὰ κάθε σημείου τῆς πολλαπλότητας μπορεῖ νὰ περιγραφεῖ μὲ συντεταγμένες ποὺ εἶναι καλὰ ὁρισμένες (δηλ. ἀμφιμονότιμες). Ἡ συνθήκη i) ἐκφράζει ὅτι στὰ σημεῖα τοῦ M ποὺ ἔχουμε δώσει συντεταγμένες μὲ ἀρκετοὺς διαφορετικοὺς τρόπους οἱ συντεταγμένες "ταιριάζουν" καὶ ὅτι μποροῦμε νὰ πᾶμε ἀπὸ τὸ ἕνα σύστημα στὸ ἄλλο κατὰ ἕνα C^∞ τρόπο (ἀντίστοιχα, C^p, C^ω).
Ἡ συνθήκη iii) εἶναι ἀρκετὰ τεχνική, ἐξασφαλίζει ὅτι οἱ ἰδιότητες τῆς πολλαπλότητας εἶναι ἀνεξάρτητες τῶν συγκεκριμένων συστημάτων συντεταγμένων ποὺ πιθανὸν ἔχουν χρησιμοποιηθεῖ γιὰ τὴ διατύπωσή τους, καὶ μᾶς σώζει ἀπὸ παραδοξολογίες τῆς ἑξῆς μορφῆς:
Ὑποθέτουμε ὅτι καταφέραμε νὰ καλύψουμε ἕνα σύνολο M μὲ τέσσερις χάρτες, συμβιβαστοὺς μεταξύ τους, ὥστε νὰ αἰσθανόμαστε ὅτι καταλαβαίνουμε τὸ $(M, (V_1,\phi_1)\dots(V_4,\phi_4))$ σὰν πολλαπλότητα. Ἔστω τώρα ὅτι βρήκαμε ἄλλους δύο

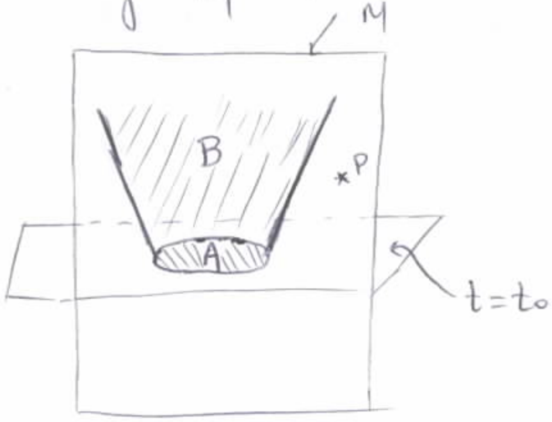
χάρτες τοῦ Μ, (V_5, ϕ_5) καί (V_6, ϕ_6), συμβιβαστούς μέ τούς προηγούμενους καί καταλαβαίνουμε ὅτι πλεονάζουν. Χωρίς τήν συνθήκη iii), ἡ $(M, (V_1, \phi_1), \dots (V_6, \phi_6))$ θά ἦταν μία διαφορετική πολλαπλότητα. Ἐπίσης, ἡ κάλυψη τοῦ Μ μέ δύο διαφορετικά (ἀλλά συμβιβαστά) συστήματα χαρτῶν θά συνεπαγόταν, χωρίς τήν συνθήκη iii), δύο διαφορετικές πολλαπλότητες καί κατά συνέπεια ἡ ἔννοια τῆς πολλαπλότητας θά ἐξαρτῶταν δραστικά ἀπό τά συστήματα συντεταγμένων πού χρησιμοποιήθηκαν.

2. Ὁ ἀκέραιος n πού βρίσκουμε σάν χαρακτηριστικό τοῦ χάρτη, στήν πραγματικότητα χαρακτηρίζει τό σύνολο Μ καί λέγεται διάσταση τῆς πολλαπλότητας. Γιά νά τό καταλάβουμε, ἄς θεωρήσουμε τό σύνολο Μ πού δέχεται n-χάρτες. Ἄν προσπαθήσουμε νά δώσουμε στό Μ ἕναν $(n+1)$-χάρτη, τό $\phi(V)$ δέν εἶναι ἀνοιχτό σύνολο τοῦ $\mathbb{R}^{n+1}$, ἐνῶ ἄν προσπαθήσουμε νά τοῦ δώσουμε ἕναν $(n-1)$-χάρτη, ἡ ϕ δέν εἶναι ἀμφιμονότιμη.
Θά θεωρήσουμε μόνον πολλαπλότητες μέ διάσταση $n \geq 1$.

3. Στά μοντέλα τῆς θεωρητικῆς φυσικῆς συνήθως ἀρκεῖ νά ὑποθέσουμε ὅτι τά φυσικά πεδία πού ὑπεισέρχονται στή θεωρία εἶναι διαφορίσιμης τάξης C^p, ὅπου ὁ p εἶναι 3, 4 ἤ σπάνια 5. Φυσικά ὑπάρχει καί ἡ αἴσθηση μεταξύ τῶν φυσικῶν ὅτι ἡ τάξη διαφορισιμότητας εἶναι μία τεχνική, καθαρά μαθηματική συνθήκη τελείως ἄσχετη πρός τή φυσική, ὅτι τά προβλήματα διαφορισιμότητας παρουσιάζονται μόνον ὅταν ὑπεραπλοποιοῦμε τά μοντέλα μας καί θεωροῦμε πολύ ἐξειδικευμένα σημεῖα τους (π.χ. σημειακά φορτία, ἀκμές) καί γενικά ὅτι χωρίς κανένα ἐνδοιασμό μποροῦμε νά ἀπαιτήσουμε

ὅτι ὅλα τά φυσικά πεδία εἶναι τάξεως C^∞. Θά δοῦμε ὅμως παρακάτω ὅτι γιά νά βρίσκουμε σέ πολλαπλότητα βαθμωτά πεδία τάξεως C^p, ἡ πολλαπλότητα θά πρέπει νά εἶναι τουλάχιστον C^p (ἀπαιτεῖται C^{p+1} πολλαπλότητα γιά C^p διανυσματικά πεδία). Αὐτός εἶναι ὁ λόγος γιά τόν ὁποῖο θά μελετήσουμε κυρίως C^∞-πολλαπλότητες.

Σ' αὐτό τό σημεῖο θά ἤθελα νά προσθέσω ὅτι ὑπάρχει ἕνας πολύ θεμελιώδης φυσικός λόγος γιά τόν ὁποῖο C^ω (ἀναλυτικές) πολλαπλότητες δέν εἶναι κατάλληλες στή μελέτη τῆς σχετικιστικῆς φυσικῆς: ὁ φυσικός νόμος ὅτι ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός εἶναι πεπερασμένη καί ὅτι ἀποτελεῖ τό ἄνω ὅριο τῶν ταχυτήτων μέ τίς ὁποῖες μεταδίδονται οἱ πληροφορίες. Ἡ ἐξήγηση εἶναι τόσο ὄμορφη πού ἀξίζει νά τῆς ἀφιερώσουμε λίγο χρόνο. Στή σχετικότητα ὁ χωρόχρονος, πού περιγράφει ὅλη τήν ἱστορία τοῦ σύμπαντος, εἶναι μία τετραδιάστατη πολλαπλότητα.



Ἡ πολλαπλότητα δέχεται χωροειδεῖς ἐπιφάνειες τριῶν διαστάσεων πού περιγράφουν τήν κατάσταση τοῦ σύμπαντος τήν χρονική στιγμή $t=t_0$. Ἐξέλιξη στό χρόνο περιγράφεται μέ κίνηση "πρός τά ἐπάνω", ἐνῶ τό φῶς ἀκολουθεῖ γραμμές μέ κλίση 45°, τό ὅριο τῆς περιοχῆς B. Τά ὑλικά σώματα πού τήν χρονική στιγμή t_0 ἦταν στήν περιοχή A μποροῦν ἀργότερα νά βρεθοῦν (κινούμενα μέ ταχύτητα τό πολύ c) μέσα στή σκιαγραφημένη περιοχή

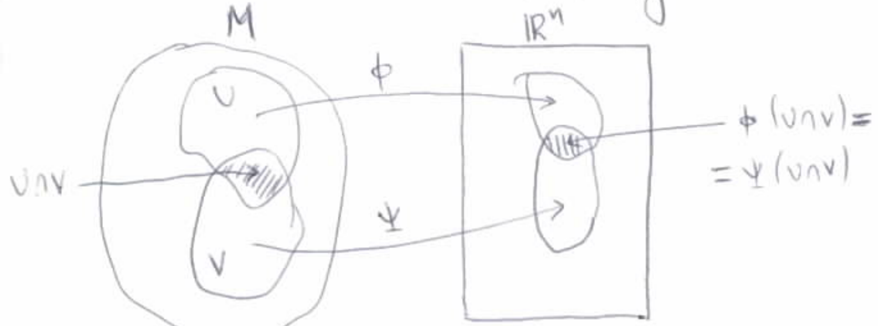
B. Τό σημεῖο P εἶναι τελείως ἀνεπηρέαστο ἀπό τά γεγονότα τοῦ A.

Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι ἡ σχετικότητα περιγράφεται μέ ἀναλυτικά πεδία σέ μία ἀναλυτική (ὑποχρεωτικά) πολλαπλότητα. Δίνουμε ἀρχικές συνθῆκες στό A (πού δέν ἀναπτύσσουν ἀνωμαλίες), π.χ. συνθῆκες πού περιγράφουν κάποια διαταραχή. Τό θεώρημα ἐπεκτάσεως τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων καθορίζει ὅτι οἱ ἀρχικές συνθῆκες, πού δόθηκαν μόνον στό ἀνοιχτό σύνολο A τῆς ἐπιφάνειας $t=t_0$ καί εἶναι ἀναλυτικές, προσδιορίζουν μονοσήμαντα τίς ἀρχικές συνθῆκες σέ κάθε σημεῖο τῆς ἐπιφάνειας $t=t_0$ καί κατά συνέπεια ἐπηρεάζουν καί τό σημεῖο P. Ἡ ἀναλυτικότητα λοιπόν τοῦ χωρόχρονου καί τῶν πεδίων τῆς σχετικότητας ἔρχεται σέ ἀντίθεση μέ τό πεπερασμένο τῆς ταχύτητας διαδόσεως τοῦ φωτός καί πρέπει νά ἐγκαταλειφθεῖ.

Ὁ σκοπός αὐτῆς τῆς παρατήρησης ἦταν νά δικαιολογήσει τήν ἀπόφασή μας νά μελετήσουμε φυσική χρησιμοποιώντας C^∞ (λεῖες) πολλαπλότητες.

4. Ἡ συνθήκη iii) σὲ πρώτη ματιὰ φαίνεται σὰν μία πάρα πολὺ ἄσχημη συνθήκη. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν χαρτῶν ποὺ εἶναι συμβιβαστοὶ μὲ ὁρισμένους χάρτες εἶναι ἄπειρος, ποτὲ δὲν θὰ καταφέρουμε νὰ κατασκευάσουμε (ἤ, ἂν δοθεῖ, νὰ ἀποδείξουμε) **μία πολλαπλότητα!** Μᾶς σώζει τὸ <u>θεώρημα</u>: Ἔστω σύνολο M καὶ $(V_a, \phi_a)_{a\in A}$ χάρτες τοῦ M ποὺ ἱκανοποιοῦν τὶς συνθῆκες i) καὶ ii). Τότε τὸ σύνολο M μαζὶ μὲ ὅλους τοὺς χάρτες ποὺ εἶναι C^∞-συμβιβαστοὶ μὲ ὅλους τοὺς χάρτες τῆς ἀρχικῆς οἰκογένειας A ἀποτελοῦν πολλαπλότητα. Ὥστε λοιπόν, τὸ οὐσιῶδες βῆμα στὴ κατασκευὴ τῆς πολλαπλότητας εἶναι ἡ κατασκευὴ ἐκείνων (τῶν λίγων) χαρτῶν ποὺ καλύπτουν τὸ σύνολο M καὶ εἶναι μεταξύ τους συμβιβαστοί. Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος εἶναι ἁπλῆ, στηρίζεται στὸ ὅτι ἡ συμβιβαστότητα δύο n-χαρτῶν εἶναι μία σχέση ἰσοδυναμίας (δηλ. αὐτοπαθής, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική): Ἂν δύο χάρτες εἶναι συμβιβαστοὶ μ' ὅλους τοὺς χάρτες μιᾶς συλλογῆς ποὺ καλύπτει τὸ σύνολο M τότε εἶναι καὶ μεταξύ τους συμβιβαστοί.

5. Τὸ σύνολο M αὐτόματα γίνεται τοπολογικὸς χῶρος μὲ τοπολογία ποὺ τοπικὰ (δηλ. στὴ γειτονιὰ κάθε σημείου) εἶναι ἡ Εὐκλείδεια τοπολογία τοῦ χώρου n-διαστάσεων.



Πράγματι, ἔστω (U, ϕ) καὶ (V, Ψ) δύο χάρτες τοῦ M. Δίνουμε στὸ U τὴν τοπολογία ἐξ ἐπαγωγῆς ἀπὸ τὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ τὴν ἀπεικόνιση ϕ μὲ τὴν ὁποία, ἐπειδὴ ἡ ϕ εἶναι ἀμφιμονότιμη καὶ ἐπὶ τοῦ $\phi(U)$, τὸ U γίνεται ὁμοιομορφικὸς (homeomorphic) μὲ τὸν $\phi(U)$. Παρόμοια ἡ ἀπεικόνιση Ψ δίνει (ἐξ ἐπαγωγῆς) τοπολογία στό σύνολο V. Ἐπειδή ἐξ ὁρισμοῦ τά $\phi(U\cap V)$ καί $\Psi(U\cap V)$ εἶναι ἀνοιχτά σύνολα τοῦ $\mathbb{R}^n$, τό $U\cap V$ εἶναι ἀνοιχτό ἐξ ἐπαγωγῆς ἀπό τίς ἀπεικονίσεις ϕ καί Ψ, δηλ. οἱ δύο τοπολογίες δέν μπερδεύονται, ἀλλά συμφωνοῦν ἀπόλυτα ὅσο ἀφορᾶ τά ἀνοιχτά σύνολα, στίς ἐπικαλύψεις τῶν δύο χαρτῶν καί ὁρίζουν τοπολογία σ' ὅλο τό σύνολο M. Ἐπειδή κάθε σημεῖο τοῦ M ἀνήκει σέ κάποιο χάρτη (δηλ. κάποιο V), τοπικά ἡ τοπολογία δέν διακρίνεται ἀπό τήν τοπολογία τοῦ $\mathbb{R}^n = E^n$.

Ὁρισμός: Ἡ πολλαπλότητα λέγεται Hausdorff, συναφής, παρασυμπαγής, ... (ὁποιαδήποτε ἄλλη τοπολογική ἰδιότητα) ἐάν σάν τοπολογικός χῶρος εἶναι Hausdorff, συναφής, παρασυμπαγής, ... ἀντίστοιχα.

Θά ἤθελα νά τονίσω σ' αὐτό τό σημεῖο ὅτι ἡ ἐπί πλέον δομή πού ἔχουν οἱ πολλαπλότητες (δηλ. ἡ συλλογή τῶν χαρτῶν) δέν τίς ἐξασφαλίζει αὐτόματα τίς τοπολογικές ἰδιότητες πού θέλουμε στή φυσική, ὅπου μελετοῦμε μόνον Hausdorff, συναφεῖς, παρασυμπαγεῖς πολλαπλότητες.

Παράδειγμα 1ον: Ἔστω τό σύνολο

$$M = \{(x,y,z) \text{ ὅπου } x,y,z \text{ πραγματικοί ἀριθμοί καί } x^2+y^2+z^2=1\}.$$

Ὁρίζουμε τά ὑποσύνολα τοῦ M

$V_x^+ = \{(x,y,z)\in M,\ x>0\}$, $V_x^- = \{(x,y,z)\in M,\ x<0\}$,

$V_y^+ = \{(x,y,z)\in M,\ y>0\}$, παρόμοια τά V_y^-, V_z^+ καί V_z^-.

Ὁρίζουμε καί τίς ἀπεικονίσεις

$$\Psi_x^+ : U_x^+ \ni (x,y,z) \longrightarrow \Psi_x^+(x,y,z) = (y,z) \in (-1,1)\times(-1,1) \subset \mathbb{R}^2$$

$$\Psi_y^- : U_y^- \ni (x,y,z) \longrightarrow \Psi_y^-(x,y,z) = (x,z) \in (-1,1)\times(-1,1) \subset \mathbb{R}^2,$$

παρόμοια καὶ τὶς Ψ_x^-, Ψ_y^+, Ψ_z^+, Ψ_z^-.

Οἱ (U_x^+, Ψ_x^+), (U_x^-, Ψ_x^-), (U_y^+, Ψ_y^+), (U_y^-, Ψ_y^-), (U_z^+, Ψ_z^+), (U_z^-, Ψ_z^-) εἶναι ἕξι χάρτες ποὺ καλύπτουν τὸ M. Ἂς τσεκάρουμε τὴ συμβιβαστότητά τους.

Οἱ (U_x^+, Ψ_x^+) καὶ (U_x^-, Ψ_x^-) εἶναι συμβιβαστοὶ γιατὶ $U_x^+ \cap U_x^- = \emptyset$.
Γιὰ τοὺς (U_x^+, Ψ_x^+) καὶ (U_y^+, Ψ_y^+) ἔχουμε

$$U_x^+ \cap U_y^+ = \{(x,y,z) \in M \text{ ὅπου } x>0 \text{ καὶ } y>0\}.$$

$$\begin{array}{ccc} U_x^+ \ni & (x,y,z) & \in U_y^+ \\ \Psi_x^+ \big\downarrow & & \big\downarrow \Psi_y^+ \\ (y,z) & & (\tilde{x},\tilde{z}) \end{array}$$

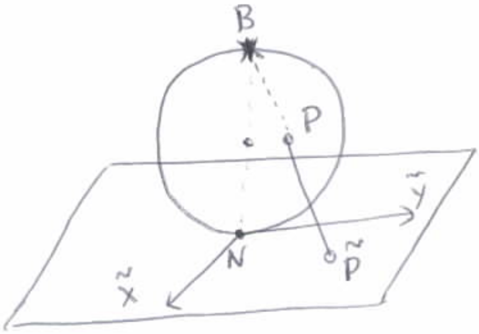
Στὸ ἴδιο σημεῖο (x,y,z) τοῦ M ὁ Ψ_x^+ δίνει συντεταγμένες (y,z) καὶ ὁ Ψ_y^+ $(\tilde{x},\tilde{z})$. Οἱ σχέσεις μεταξὺ αὐτῶν εἶναι

$$\begin{cases} \tilde{z} = z \\ \tilde{x} = \sqrt{1-y^2-z^2} \end{cases}, \quad \begin{array}{l} y \in (0,1) \\ z \in (-1,1) \end{array}$$

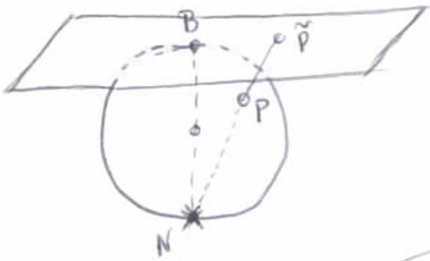
καὶ ἀντιστρόφως,
$$\begin{cases} z = \tilde{z} \\ y = \sqrt{1-\tilde{x}^2-\tilde{z}^2} \end{cases}, \quad \begin{array}{l} x \in (0,1) \\ z \in (-1,1) \end{array},$$

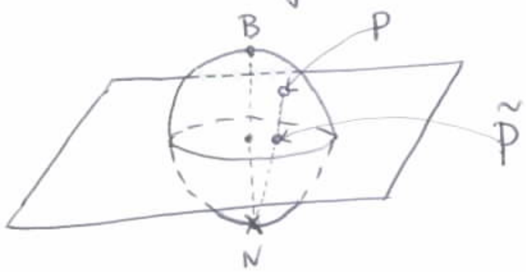
ποὺ καὶ οἱ δύο εἶναι C^∞, καὶ οἱ χάρτες εἶναι C^∞-συμβιβαστοί. Παρόμοια βλέπουμε ὅτι καὶ οἱ ἕξι χάρτες μεταξύ τους εἶναι συμβιβαστοί. Τὸ σύνολο M μὲ ὅλους τοὺς χάρτες ποὺ εἶναι συμβιβαστοὶ μὲ τοὺς ἕξι προηγούμενους χάρτες ἀποτελεῖ πολλαπλότητα, τὴν διδιάστατη μοναδιαία σφαῖρα ποὺ συμβολίζεται μὲ S^2. Παρόμοια ὁρίζονται καὶ οἱ σφαῖρες S^n. S^1 εἶναι ὁ κύκλος.

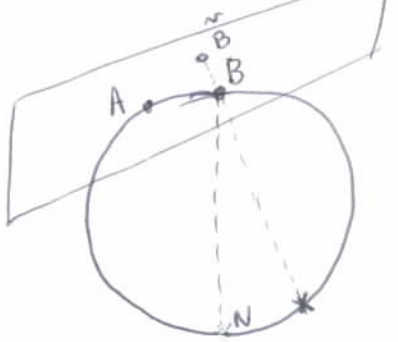
<u>Παράδειγμα 2ον:</u> Τὸ σύνολο M τοῦ προηγουμένου παραδείγματος μπορεῖ νὰ ἐπικαλυφθεῖ καὶ μὲ δύο μόνο χάρτες ἂν χρησιμοποιήσουμε π.χ. στερεογραφικὲς προβολές.



Κάθε σημεῖο τοῦ M ἐκτὸς ἀπὸ τὸ B, π.χ. τὸ P, παρίσταται μὲ τὶς συντεταγμένες $(\tilde{x}, \tilde{y})$ τῆς εἰκόνας του $\tilde{P}$. Τὸ σημεῖο B ὀφείλει νὰ ἐξαιρεθεῖ γιατί διαφορετικὰ ἡ ἀπεικόνιση δὲν εἶναι ἀμφιμονότιμη: τὰ σημεῖα B καὶ N τῆς σφαίρας ἔχουν τὴν ἴδια εἰκόνα, N, στὸ ἐπίπεδο. Γιὰ νὰ καλύψουμε καὶ μία γειτονιὰ τοῦ B χρειαζόμαστε μία ἀκόμη στερεογραφικὴ προβολή. Σχεδιάζουμε μερικὲς ἀπὸ τὶς δυνατὲς ἐπιλογές.







← (τὸ ἐπίπεδο ἐφάπτεται μὲ τὴ σφαῖρα στὸ σημεῖο A).

Μόνον ἕνας ἀπ' αὐτοὺς τοὺς τρεῖς χάρτες ἀρκεῖ γιὰ νὰ καλύψουμε τὴν ὑπόλοιπη σφαῖρα ἀλλὰ ἡ πολλαπλότητα S^2, δηλ. τὸ M μὲ ὅλους τοὺς χάρτες περιέχει ὅλους τοὺς παραπάνω χάρτες καὶ πολλοὺς ἄλλους ἀκόμη.

Παράδειγμα 3ον: Ἔστω $M = \mathbb{R}^n$. Διαλέγουμε χάρτη (V, ϕ) ὅπου $V = \mathbb{R}^n$ καί ϕ εἶναι ἡ ταυτοτική ἀπεικόνιση. Τό $\mathbb{R}^n$ λοιπόν εἶναι πολλαπλότητα πού μάλιστα μπορεῖ νά καλυφθεῖ μ᾽ ἕναν μοναδικό χάρτη.

Παράδειγμα 4ον: Ἔστω $M = \mathbb{R}$. Διαλέγουμε $V = \mathbb{R}$ καί $\phi : V \ni x \longrightarrow \phi(x) = x^5 \in \mathbb{R}$. Ἡ ϕ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη καί ὁ (V, ϕ) εἶναι χάρτης πού καλύπτει τό $M = \mathbb{R}$. Φαίνεται λοιπόν ὅτι μποροῦμε νά κάνουμε τό R πολλαπλότητα κατά ἀρκετούς διαφορετικούς τρόπους. Σ᾽ αὐτό τό ἐρώτημα θά ἐπανέλθουμε στήν ἑπόμενη ἑνότητα.

Θά ἀναφέρουμε τώρα δύο γενικές μεθόδους πού μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν γιά νά κατασκευάζουμε καινούργιες πολλαπλότητες.

1. Καρτεσιανό γινόμενο Πολλαπλοτήτων:

Ἄς εἶναι $(M, (V_\alpha, \Psi_\alpha)_{\alpha \in A})$ καί $(M', (V'_\beta, \Psi'_\beta)_{\beta \in B})$ πολλαπλότητες μέ διαστάσεις n καί n' ἀντίστοιχα. Ὁρίζουμε καινούργιο σύνολο $\hat{M}$, τό καρτεσιανό γινόμενο τῶν M καί M': $\hat{M} = M \times M' = \{ (p, p') \text{ ὅπου } p \in M \text{ καί } p' \in M' \}$.

Στό $\hat{M}$ ὁρίζουμε $(n+n')$-χάρτες ὡς ἑξῆς:

$\hat{V}_\gamma = V_\alpha \times V'_\beta$ καί

$$\hat{\Psi}_\gamma : \hat{V}_\gamma \ni (p, p') \longrightarrow \hat{\Psi}_\gamma (p, p') = (\Psi_\alpha(p), \Psi'_\beta(p')) \in \mathbb{R}^{n+n'},$$

ὅπου $(\Psi_\alpha(p), \Psi'_\beta(p'))$ εἶναι ἡ $(n+n')$-αδα πού ἀποτελεῖται ἀπό τούς n ἀριθμούς $\Psi_\alpha(p)$ ἀκολουθούμενους ἀπό τούς n' ἀριθμούς $\Psi'_\beta(p')$. Εὔκολα ἐλέγχεται ὅτι ὁ $(\hat{V}_\gamma, \hat{\Psi}_\gamma)$ εἶναι $(n+n')$-χάρτης στό $\hat{M}$. Τό $\hat{M}$ μέ ὅλους τούς χάρτες πού προκύπτουν ἀπ' ὅλους τούς χάρτες τῶν M καί M' εἶναι πολλαπλότητα, τό καρτεσιανό γινόμενο τῶν δύο πολλαπλοτήτων. Θά τό συμβολίζουμε μέ τό ἴδιο σύμβολο, ×, πού δηλώνει καί τό καρτεσιανό γινόμενο μόνον τῶν ἀντίστοιχων συνόλων.

Τό $\mathbb{R}^1 \times S^1$ λέγεται κύλινδρος καί τό $S^1 \times S^1$ σαμπρέλα (torus). $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$. Ἀναφέρουμε ὅτι ὅλες οἱ πολλαπλότητες πού ἐμφανίζονται στή Σχετικότητα εἶναι τῆς μορφῆς $\mathbb{R}^n \times S^m$ μέ κατάλληλα m καί n.

2. Ἀφαίρεση τρυπῶν ἀπό πολλαπλότητες.

Ἔστω πολλαπλότητα $(M, (V_\alpha, \phi_\alpha), \alpha \in A)$, ἔστω K κλειστό ὑποσύνολο τοῦ M (πού εἶναι καί τοπολογικός χῶρος). Θεωροῦμε τό σύνολο $\hat{M} = M - K$ (ἐπειδή $M - K = M \cap K^c$, τό $M-K$ εἶναι ἀνοιχτό ὑποσύνολο τοῦ M) καί ἀπό τήν συλλογή τῶν χαρτῶν τοῦ M κρατοῦμε ὅλους τούς χάρτες γιά τούς ὁποίους $K \cap V_\alpha = \phi$. Τό $\hat{M}$ μ' αὐτούς τούς χάρτες εἶναι μία καινούργια πολλαπλότητα. Ἄν δέν ὑποθέσουμε ὅτι τό K εἶναι κλειστό, τό $M-K$ μπορεῖ νά γίνει μία πιό πολύπλοκη δομή πού δέν τήν ἔχουμε ὁρίσει, νά γίνει πολλαπλότητα μέ περίβλημα (manifold with boundary).

7. Λεῖες ἀπεικονίσεις.

Οἱ λεῖες ἀπεικονίσεις (smooth mappings) εἶναι πιθανότατα οἱ σημαντικότερες ὀντότητες πού ζοῦν σέ C^∞ πολλαπλότητες. Σ' αὐτή τήν ἑνότητα, $(M,(V_\alpha,\phi_\alpha)_{\alpha\in A})$ καί $(N,(V_\beta,\psi_\beta)_{\beta\in B})$ θά εἶναι C^∞-πολλαπλότητες.

Ὁρισμός: Ἡ ἀπεικόνιση $f: M\longrightarrow \mathbb{R}$ θά λέγεται λεία (C^∞) ἐάν γιά κάθε χάρτη (V_α,ϕ_α) ἡ ἀπεικόνιση

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_\alpha"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n\supset\phi_\alpha(V_\alpha) \arrow[ur, "f\circ\phi_\alpha^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

$f\circ\phi_\alpha^{-1}:\phi_\alpha(V_\alpha)\longrightarrow\mathbb{R}$ εἶναι C^∞ (προσέξτε ὅτι $\phi_\alpha(V_\alpha)\subset\mathbb{R}^n$ καί συνεπῶς ξέρουμε τί σημαίνει "C^∞").

Ὁρισμός: Ἡ ἀπεικόνιση $M\xrightarrow{f}N$ λέγεται λεία ἐάν γιά κάθε χάρτες (V_α,ϕ_α) καί (V_β,ψ_β) ἡ ἀπεικόνιση (τῶν m πραγματικῶν συναρτήσεων μέ n ἀνεξάρτητες μεταβλητές)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_\alpha"'] & N \arrow[d, "\psi_\beta"] \\ \mathbb{R}^n\supset\phi_\alpha(V_\alpha) \arrow[r, "\psi_\beta\circ f\circ\phi_\alpha^{-1}"] & \psi_\beta(V_\beta)\subset\mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$\psi_\beta\circ f\circ\phi_\alpha^{-1}:\phi_\alpha(V_\alpha)\longrightarrow\psi_\beta(V_\beta)$ εἶναι C^∞.

Ἐπειδή ἡ σύνθεση C^∞ ἀπεικονίσεων ἀπό τόν $\mathbb{R}^n$ στόν $\mathbb{R}^m$ εἶναι C^∞ ἀπεικόνιση, γιά νά ἐλέγξουμε ὅτι μία ἀπεικόνιση εἶναι C^∞ ἀρκεῖ νά τό ἐλέγξουμε μόνον γιά μερικούς χάρτες τῆς πολλαπλότητος πού τήν καλύπτουν.

Οἱ παραπάνω ὁρισμοί δείχνουν ὅτι τό ποιές ἀπεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων θεωροῦνται (= εἶναι) λεῖες ἐξαρτᾶται δραστικά ἀπό τή συλλογή τῶν χαρτῶν τῆς πολλαπλότητας.

Ἀποδεικνύεται μάλιστα ὅτι ἡ δομή τῆς πολλαπλότητας περιέχει ἀκριβῶς τήν πληροφορία "ποιές συναρτήσεις $f: M \to \mathbb{R}$ εἶναι λεῖες". [εἶναι δυνατόν ἡ πολλαπλότητα νά ὁρισθεῖ χωρίς νά ἀναφέρουμε καθόλου χάρτες καί συντεταγμένες, μέ τήν βοήθεια τοῦ δακτυλίου τῶν συναρτήσεων $f: M \to \mathbb{R}$ πού εἶναι C^∞.]. Ἀποφασίζουμε λοιπόν νά θεωροῦμε δύο πολλαπλότητες σάν ἴδιες καί νά μήν τίς ξεχωρίζουμε ἐάν i) Τά ἀντίστοιχά τους σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα καί ii) ὁρίζουν ἀκριβῶς τίς ἴδιες C^∞ συναρτήσεις.

Ἔστω ἡ ἀμφιμονοσήμαντη καί ἐπί ἀπεικόνιση πολλαπλοτήτων $f: M \to N$. Ἡ $g: N \to \mathbb{R}$ ὁρίζει τήν $g \circ f: M \to \mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[drr, "g\circ f" near end] & & N \arrow[ll, shift left, "f^{-1}"] \arrow[d, "g"] \arrow[dll, "h\circ f^{-1}"' near end] \\
\mathbb{R} & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Γιά νά εἶναι ἡ $g \circ f$ C^∞ γιά κάθε C^∞ ἀπεικόνιση g, θά πρέπει καί ἡ f νά εἶναι C^∞.

Παρόμοια ἡ $h: M \to \mathbb{R}$ ὁρίζει τήν $h \circ f^{-1}: N \to \mathbb{R}$ ἡ ὁποία εἶναι C^∞ γιά κάθε C^∞ ἀπεικόνιση h ἐάν ἡ f^{-1} εἶναι C^∞. Ὥστε λοιπόν τά M καί N ὁρίζουν τίς ἴδιες C^∞ ἀπεικονίσεις ἐάν οἱ f καί f^{-1} εἶναι καί οἱ δύο C^∞. Οἱ παρατηρήσεις αὐτές ἦταν προετοιμασία γιά τούς ὁρισμούς πού ἀκολουθοῦν.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἡ ἀπεικόνιση $f: M \to N$ λέγεται <u>διαμορφισμός</u> (diffeomorphism) ἐάν

i) Ἡ f εἶναι ἀμφί καί ἐπί.

ii) Οἱ f καί f^{-1} εἶναι C^∞.

Ὁρισμός: Οἱ πολλαπλότητες M καί N θά λέγονται **διαμορφικές** (diffeomorphic) ἐάν ὑπάρχει ἕνας διαμορφισμός $f : M \longrightarrow N$ μεταξύ τους.

Στά μαθηματικά μελετοῦμε πολλαπλότητες modulo διαμορφισμούς, δηλ. ταυτοποιοῦμε καί δέν ξεχωρίζουμε πολλαπλότητες πού εἶναι διαμορφικές.

Παράδειγμα 1ον: Ἔστω $N = \mathbb{R}$ καί τό κάνουμε πολλαπλότητα μέ τόν χάρτη $V = \mathbb{R}$, $\psi(x) = x$, τήν ταυτότητα.
Θεωροῦμε καί τήν πολλαπλότητα τοῦ 4ου παραδείγματος τῆς σελίδας 39 $[M = \mathbb{R},\ V = \mathbb{R},\ \phi(x) = x^5]$. Ἡ ταυτοτική

$$\begin{tikzcd} N \ni x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & x \in M \arrow[d, "\phi"] \\ \mathbb{R} \ni x & x^5 \in \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

ἀπεικόνιση $f : N \ni x \longrightarrow f(x) = x \in M$ δέν εἶναι διαμορφισμός. Πράγματι, συναρτήσει τῶν χαρτῶν, εἶναι ἡ ἀπεικόνιση

$$\phi \circ f \circ \psi^{-1} : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow (\phi \circ f \circ \psi^{-1})(x) = x^5 \in \mathbb{R},$$

πού εἶναι C^∞ ($\Longrightarrow$ ἡ f εἶναι C^∞) ἐνῶ ἡ ἀντίστροφή της εἶναι ἡ

$$\psi \circ f^{-1} \circ \phi^{-1} : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \sqrt[5]{x} \in \mathbb{R}$$ πού δέν εἶναι

οὔτε κάν διαφορίσιμη στό $x = 0$ ($\Rightarrow$ ἡ f^{-1} δέν εἶναι C^∞).

Προσοχή! Δέν ἔχουμε ἀποδείξει ὅτι οἱ M καί N εἶναι διαφορετικές πολλαπλότητες. Πιθανόν ἡ ταυτοτική ἀπεικόνιση f πού χρησιμοποιήσαμε νά μήν ἦταν ἡ κατάλληλη. Πράγματι μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ $g : N \longrightarrow M$, $g(x) = x^{1/5}$ εἶναι διαμορφισμός καί συνεπῶς οἱ M καί N εἶναι οἱ ἴδιες πολλαπλότητες.

Παράδειγμα 2ον: Ἔστω $M=(-1,1)$ ποὺ τὸ κάνουμε πολλαπλότητα μὲ τὴν ταυτοτικὴ ἀπεικόνιση $\phi(u)=u$. Ἔστω ἐπίσης τὸ $N=\mathbb{R}$, πολλαπλότητα ἐπίσης μὲ τὴν ταυτοτικὴ ἀπεικόνιση $\psi(x)=x$. Ἡ ἀπεικόνιση

$M=(-1,1) \xrightarrow{f} N=\mathbb{R}$. $\quad f(u)=\dfrac{u}{1-u^2}$ εἶναι C^∞ στὸ $(-1,1)$. Ἡ ἀντιστροφή της εἶναι ἡ

$$f^{-1}(x) = \frac{2x}{1+\sqrt{1+4x^2}}$$

(διαλέξαμε τὸ κατάλληλο πρόσημο ὥστε ἡ εἰκόνα τῆς f^{-1} νὰ ἀνήκει στὸ $(-1,1)$). ποὺ εἶναι ἐπίσης C^∞. Οἱ M καὶ N εἶναι λοιπὸν διαμορφικὲς πολλαπλότητες.

Παρόμοια ἡ ἀπεικόνιση

$$g:\ M=(-1,1) \ni u \longrightarrow g(u)=\frac{1}{2}\left[(1+u)b+(1-u)a\right] \in (a,b)$$

ἀποδεικνύει ὅτι τὸ (a,b) εἶναι διαμορφικό, σὰν πολλαπλότητα, μὲ τὸ $(-1,1)$ καὶ συνεπῶς καὶ μὲ τὴν $\mathbb{R}$.

Γενικότερα μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι ὑπάρχουν ἀκριβῶς δύο Hausdorff, συναφεῖς, παρασυμπαγεῖς πολλαπλότητες μιᾶς διαστάσεως, ἡ πραγματικὴ εὐθεία $\mathbb{R}$ καὶ ὁ κύκλος S^1. Γιὰ μεγαλύτερες ὅμως διαστάσεις ὁ ἀριθμὸς τῶν πολλαπλοτήτων εἶναι πολὺ μεγάλος, οὔτε καὶ ὑπάρχει ἱκανοποιητικὴ ταξινόμησή τους.

Ἐντελῶς ἀκαδημαϊκὰ ἀναφέρω καὶ τὰ ἑξῆς:

1. Ἔχει ἀποδειχθεῖ ὅτι γιὰ διάσταση $n \le 4$ κάθε σύνολο M μπορεῖ νὰ γίνει C^∞ πολλαπλότητα κατὰ ἕναν καὶ μοναδικὸ τρόπο [δηλ. ἐὰν $\exists f: M \to N$, εἶναι ἀμφὶ καὶ ἐπὶ καὶ $\dim M = \dim N \le 4$, τότε οἱ M καὶ N εἶναι

διαφορομορφικές (ὁ διαφορομορφισμός δέν εἶναι ἀναγκαστικά ἡ f)]. Αὐτό δέν ἔρχεται σέ ἀντίθεση μέ τήν ἀμέσως προηγούμενη παράγραφο. Π.χ. ἄν ἀφαιρέσουμε ἕνα σημεῖο ἀπό τήν $\mathbb{R}$ παύει νά εἶναι συναφής ἐνῶ μποροῦμε νά ἀφαιρέσουμε πολλές τρύπες ἀπό τό $\mathbb{R}^2$ χωρίς νά χαλάσουμε τίς τοπολογικές ἰδιότητες πού ἀπαιτοῦμε ἀπό τίς πολλαπλότητες.

2. Στό σύνολο $\mathbb{R}^n$ μποροῦμε νά δώσουμε μοναδική λεία δομή $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Ὁ Milnor ἀνακάλυψε τό 1956 ὅτι στήν σφαίρα

$$S^7 = \{ (x_1, x_2, \dots x_8) \in \mathbb{R}^8 \text{ ὅπου } x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_8^2 = 1 \}$$

μποροῦμε νά δώσουμε 28 διαφορετικές λεῖες δομές! Γιά ἄλλες διαστάσεις (πάντοτε σφαῖρες S^n) ἔχουν βρεθεῖ:

διάσταση	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ἀριθμός δομῶν	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16

Οἱ σφαῖρες S^n μέ λεία δομή διαφορετική ἀπ' αὐτήν πού ὁρίζεται ὅπως ἀκριβῶς ὁρίσθηκε ἡ δομή τῆς S^2 στό πρῶτο παράδειγμα τῆς σελίδας 36 λέγονται ἐξωτικές σφαῖρες (exotic spheres) καί ἀποτελοῦν πεδίο ἔρευνας τῶν μαθηματικῶν τῶν ἡμερῶν μας.

Ἔχει ἐπίσης ἀποδειχθεῖ ὅτι $\forall m \in \mathbb{N}$ ὑπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ὥστε ἡ σφαίρα S^n νά μπορεῖ νά γίνει C^∞ πολλαπλότητα κατά περισσότερους ἀπό m διακεκριμένους τρόπους.

8. Διανύσματα

Οἱ πολλαπλότητες εἶναι χῶροι πού χρησιμοποιοῦνται στή θεωρητική φυσική ἀλλά μόνες τους δέν ἀρκοῦν γιά τή μελέτη τῆς θεωρητικῆς φυσικῆς. Ἐπιπλέον χρειαζόμαστε διάφορα πεδία πού "ζοῦν" πάνω στίς πολλαπλότητες. Τά *βαθμωτά πεδία* (scalar fields) τά ἔχουμε ἤδη ὁρίσει, εἶναι ἀπεικονίσεις $f: M \to \mathbb{R}$ πού συνήθως ἀπαιτοῦνται νά εἶναι C^∞. Στίς ἑπόμενες ἑνότητες θά ὁρίσουμε ἀκόμη πιό πολύπλοκα πεδία στίς πολλαπλότητες, θά ὁρίσουμε *τανυστικά πεδία* (tensor fields). Τό δυσκολότερο βῆμα πρός αὐτή τήν κατεύθυνση ἀποτελεῖ ὁ ὁρισμός τῶν *διανυσματικῶν πεδίων* (vector fields), πού ἀποτελεῖ καί τό ἀντικείμενο αὐτῆς τῆς ἑνότητας.

Πρῶτα θά ὁρίσουμε διανύσματα σ' ἕνα σημεῖο τῆς πολλαπλότητας. Ἐπειδή ὁ ὁρισμός συνήθως φαίνεται σέ πρώτη ματιά ἀρκετά παράξενος – τά διανύσματα θά παρουσιαστοῦν σάν ὁρισμένοι τελεστές μέ ἰδιότητες διαφορίσεως – θά δοῦμε πρῶτα τά διανύσματα τοῦ χώρου $\mathbb{R}^n$ ἀπό ἀρκετές διαφορετικές σκοπιές. Φυσικά δέν πρέπει νά ξεχνᾶμε ὅτι *διάνυσμα εἶναι ἕνα στοιχεῖο ἑνός διανυσματικοῦ χώρου.*

Στόν $\mathbb{R}^n$ τό διάνυσμα μποροῦμε νά τό δοῦμε σάν ἕνα ἀντικείμενο πού περιέχει πληροφορία γιά μέγεθος, διεύθυνση καί φορά καί πού περιγράφει, μ' αὐτό τόν τρόπο, μία μετατόπιση. Δυστυχῶς αὐτός ὁ ὁρισμός τῶν διανυσμάτων δέν μπορεῖ νά γενικευθεῖ καί σέ πολλαπλότητες γιατί "τό διάνυσμα μᾶς βγάζει ἔξω ἀπό τήν πολλαπλότητα". Τά διανύσματα τοῦ R^n μποροῦμε ἐπίσης νά τά δοῦμε καί σάν n-άδες $(\xi^1, \xi^2, \dots \xi^n)$. Ὁ ὁρισμός αὐτός εἶναι χρήσιμος γιατί ὁ $\mathbb{R}^n$ συνοδεύεται ἀπό μία κανονική βάση, τήν $e_1 = (1, 0, \dots 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots 0)$, $\dots$ $e_n = (0, 0, \dots 1)$, καί ἔτσι γράφοντας $(\xi^1, \xi^2, \dots \xi^n)$ σκεφτόμαστε τό $\xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \dots + \xi^n e_n$. Οὔτε καί αὐτός ὁ ὁρισμός γενικεύεται εὔκολα σέ πολλαπλότητες ἐπειδή αὐτές δέν συνοδεύονται ἀπό μία κανονική ἐκλογή βάσεως.

Ἄς τά κοιτάξουμε κι ἀπό μία τρίτη σκοπιά, πάντα στόν $\mathbb{R}^n$. Τό διάνυσμα $(\xi^1, \xi^2, \dots \xi^n)$ μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά νά δώσει, γιά κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, μία καινούργια συνάρτηση, τήν $\xi^1 \dfrac{\partial f}{\partial x^1} + \xi^2 \dfrac{\partial f}{\partial x^2} + \dots + \xi^n \dfrac{\partial f}{\partial x^n}$, τήν παράγωγο τῆς f κατά τήν διεύθυνση $(\xi^1, \xi^2, \dots \xi^n)$. Ἄν περιορισθοῦμε σ' ἕνα σημεῖο, τό διάνυσμα ἀντιστοιχεῖ ἕναν ἀριθμό σέ κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Αὐτό τόν τρόπο παρουσίασης τῶν διανυσμάτων θά γενικεύσουμε σέ πολλαπλότητες.

Ἀρχίζουμε τώρα τήν μαθηματική θεμελίωση τῶν διανυσμάτων.

Ἔστω πολλαπλότητα $(M, (V_a, \phi_a))$ καὶ σημεῖο $p \in M$. Θεωροῦμε τὸ σύνολο
$C(M) = \{ f : M \to \mathbb{R}$ ὅπου f εἶναι $C^\infty \}$, δηλ. τὸ σύνολο τῶν C^∞ πραγματικῶν συναρτήσεων στὴν M.

Ὁρισμός: Ἡ ἀπεικόνιση $\xi : C(M) \to \mathbb{R}$ λέγεται δ-p ἀπεικόνιση ἐὰν ἱκανοποιεῖ τὶς συνθῆκες:

i) $\xi(f+g) = \xi(f) + \xi(g)$, $\forall f, g \in C(M)$,

ii) $\xi(fg) = f(p)\xi(g) + g(p)\xi(f)$, $\forall f, g \in C(M)$,

iii) Ἐὰν ἡ $f \in C(M)$ εἶναι σταθερή, $\xi(f) = 0$.

Παριστάνουμε μὲ T_p τὸ σύνολο τῶν δ-p ἀπεικονίσεων. Στὸ σύνολο T_p ὁρίζουμε πρόσθεση ὡς ἑξῆς:
Ἐὰν $\xi \in T_p$, $\zeta \in T_p$, $(\xi+\zeta)(f) = \xi(f) + \zeta(f)$, $\forall f \in C(M)$.
Ἡ $\xi+\zeta$ εἶναι δ-p ἀπεικόνιση γιατί, π.χ., ἱκανοποιεῖ τὴν

$$(\xi+\zeta)(fg) = \xi(fg) + \zeta(fg) = f(p)\xi(g) + g(p)\xi(f) + $$
$$+ f(p)\zeta(g) + g(p)\zeta(f) = f(p)[\xi(g)+\zeta(g)] + g(p)[\xi(f)+\zeta(f)] =$$
$$= f(p)(\xi+\zeta)(g) + g(p)(\xi+\zeta)(f),$$

παρόμοια καὶ γιὰ τὶς ἄλλες συνθῆκες.
Ἐπίσης ὁρίζουμε πολλαπλασιασμό στοιχείων ξ τοῦ T_p μὲ πραγματικοὺς ἀριθμοὺς k ὡς ἑξῆς:
$(k\xi)(f) = k\,\xi(f)$, $\forall f \in C(M)$. Εἶναι εὔκολο νὰ δειχθεῖ ὅτι ὁ T_p μὲ τὶς δύο πράξεις ποὺ μόλις ὁρίσαμε γίνεται διανυσματικὸς χῶρος.
Ὁ T_p θὰ λέγεται ὁ <u>ἐφαπτόμενος χῶρος</u> (tangent space) στὸ σημεῖο p τῆς πολλαπλότητας M καὶ

τὰ στοιχεῖα του, οἱ ~~δ-ρ~~ μέχρι τώρα ἀπεικονίσεις, διανύσματα στὸ σημεῖο p.

Θεώρημα: Ἡ διάσταση τοῦ T_p ἰσοῦται μὲ τὴ διάσταση τῆς πολλαπλότητας M.

Ἀπόδειξη: Ἔστω $\dim M = n$ καὶ (V, ϕ) χάρτης ποὺ περιέχει τὸ σημεῖο p. Ὁ χάρτης δίνει συντεταγμένες $(x^1, x^2, \dots x^n)$ στὰ σημεῖα τοῦ V. Ἔστω $(x_0^1, x_0^2, \dots x_0^n)$ οἱ συντεταγμένες τοῦ p. Ἐπίσης ἐὰν $f \in C(M)$, ὁ περιορισμός της στὸ V εἶναι μία C^∞ συνάρτηση n πραγματικῶν μεταβλητῶν $f(x^1, x^2, \dots x^n)$.

i) Εὔκολα μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ὅτι ὁ τελεστὴς $\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p =$ "πάρε τὴν μερικὴ παράγωγο ὡς πρὸς x^1 καὶ ὑπολόγισέ την στὸ σημεῖο p" ἀνήκει στὸν T_p, παρόμοια καὶ τὰ $\frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p, \dots \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$. (Στὴ πραγματικότητα οἱ συνθῆκες i), ii) καὶ iii) τῆς σελίδας 48 δὲν εἶναι τίποτε παραπάνω ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῶν παραγώγων, γραμμικότητα, κανόνας τοῦ Leibnitz, καὶ μηδενισμὸς τῆς παραγώγου σταθερᾶς).

ii) Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι τὰ $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$, $i = 1, 2, \dots n$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. Πράγματι ἔστω ὅτι

$$\xi = a^1 \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p + \dots + a^n \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p = 0$$

, ὅπου $a^i \in \mathbb{R}$ καὶ $\xi = 0$ σημαίνει ὅτι $\xi(f) = 0$, $\forall f \in C(M)$. Διαλέγουμε τὴ συνάρτηση $f = x^k$, ἡ k-στὴ συντεταγμένη. Προφανῶς $\xi(x^k) = a^k$ καὶ συνεπῶς $a^k = 0$. Διαλέγοντας $k = 1, 2, \dots n$ λοιπὸν ἀποδεικνύουμε τὴ γραμμικὴ ἀνεξαρτησία.

iii) Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι τὰ $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P ,\ i=1,2,\dots n \right\}$ ἀποτελοῦν βάση τοῦ T_P.

Ἔστω τυχαῖο διάνυσμα $\xi \in T_P$, δηλ. μία ἀπεικόνιση $\xi : C(M) \longrightarrow \mathbb{R}$. Οἱ συναρτήσεις $f_1(x^1,\dots x^n)=x^1$, $f_2(x^1,\dots x^n)=x^2, \dots, f_n(x^1,\dots x^n)=x^n$ εἶναι στοιχεῖα τοῦ $C(M)$ καὶ συνεπῶς τὸ ξ ξέρει νὰ ἐπιδράσει σ' αὐτές καὶ νὰ παράγει ἀριθμούς. Ἔστω $\xi(x^i)=\xi^i \in \mathbb{R}$, $i=1,2,\dots n$. Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι

$$\xi = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_P + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_P + \dots + \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_P , \qquad (1)$$

δηλ. ὅτι τὸ τυχαῖο διάνυσμα ξ γράφεται σὰν γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P$, $i=1,2,\dots n$.

Γιὰ νὰ ἀποδείξουμε τὴν (1) φυσικὰ ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξουμε ὅτι τὰ δύο μέλη δίνουν τὸν ἴδιο ἀριθμό ὅταν ἐπιδροῦν στὴν τυχαία συνάρτηση $f \in C(M)$. Ἀναλύουμε τὴν f σὲ σειρὰ Taylor

$$f(x^1,\dots x^n) = f(P_0) + (x^1-x^1_0)\frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_{P_0} + \dots + (x^n-x^n_0)\frac{\partial f}{\partial x^n}\Big|_{P_0} + $$
$$+ \frac{1}{2}(x^1-x^1_0)^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2}\Big|_{P_0} + \dots , \qquad (2)$$

καὶ ἐφαρμόζουμε τὴν ξ στὴν f χρησιμοποιώντας τὴν γραμμικότητα τῆς ξ.

$\xi\,(f(P_0)) = 0$, ἐπειδὴ $f(P_0)$ εἶναι σταθερά.

$$\xi\left[(x^1-x^1_0)\frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_{P_0}\right] = \cancelto{0}{(x^1_0-x^1_0)}\ \cancelto{0}{\xi\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_{P_0}\right)} + \frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_{P_0}\xi(x^1-x^1_0) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_{P_0}\cdot \xi(x^1) = \xi^1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_{P_0} ,$$ παρόμοια καὶ γιὰ τοὺς ὑπόλοιπους γραμμικοὺς ὅρους τῆς (2).

$$\xi\left[(x^1-x_0^1)^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2}\Big|_{p_0}\right] = \dots = 2(x^1-x_0^1)\big|_p \cdot \xi(x^1) \cdot \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2}\Big|_{p_0} = 0,$$

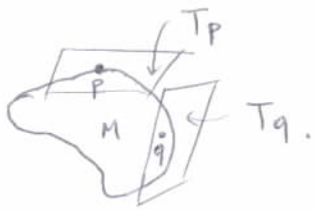
παρόμοια καί γιά όλους τούς μή γραμμικούς όρους τής αναλύσεως (2). Άρα λοιπόν,

$$\xi(f) = \xi^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_p + \dots + \xi^n \frac{\partial f}{\partial x^n}\Big|_p \,.$$

Προφανώς καί τό δεύτερο μέλος τής (1) δίνει τήν ίδια τιμή στήν f καί τό θεώρημα έχει αποδειχθεί. ■

<u>Παρατηρήσεις:</u> 1. Τά διανύσματα τού T_p είναι τελείως ανεξάρτητα από τόν χάρτη (V,ϕ). Ο χάρτης χρησιμοποιήθηκε μόνο στήν απόδειξη τού θεωρήματος. Επειδή καί ή διατύπωση τού θεωρήματος ($\dim T_p = \dim M$) είναι ανεξάρτητη από τόν (V,ϕ), ο (V,ϕ) δέν έχει παίξει κανέναν ρόλο στόν T_p. Τά διανύσματα έχουν νά κάνουν μέ τήν πολλαπλότητα. Η πληροφορία "ποιά είναι ακριβώς ή πολλαπλότητα" περιλαμβάνεται στή γνώση τού συνόλου $C(M)$, πού οπωσδήποτε έχει αποτέλεσμα στό "ποιός είναι ο χώρος T_p".

Επιπλέον όμως ή απόδειξη τού θεωρήματος μάς έδειξε ότι άν δοθεί ένας χάρτης τού p, τότε υπάρχει μία προτιμητέα βάση τού T_p, ή $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$, $i=1,2,\dots n$, καί ότι οί συνιστώσες τού διανύσματος ξ ως πρός αυτή τή βάση είναι οί εικόνες τών συντεταγμένων x^i, οί $\xi(x^i)$.

2. 

Ὅταν ζωγραφίζουμε, συνήθως παριστάνουμε τόν T_p μέ ἕνα "ἐπίπεδο ἐφαπτόμενο στή πολλαπλότητα".

3. Προσοχή, δύο διανύσματα σέ διαφορετικά σημεῖα τῆς πολλαπλότητας δέν μποροῦν νά προστεθοῦν γιατί ἀνήκουν σέ διαφορετικούς διανυσματικούς χώρους. Ἔτσι καί ἡ ὁλοκλήρωση ἑνός διανυσματικοῦ πεδίου πάνω σέ πολλαπλότητα δέν ὁρίζεται (ἀφοῦ κι αὐτό ἐκφράζει ἀθροίσεις), ἐνῶ μπορεῖ νά ὁρισθεῖ τό ὁλοκλήρωμα ἑνός βαθμωτοῦ πεδίου πάνω στήν πολλαπλότητα.

<u>Ὁρισμός:</u> Διανυσματικό πεδίο στήν πολλαπλότητα M εἶναι μία ἀπεικόνιση

$\xi: M \ni p \longrightarrow \xi(p) \in \bigcup_{p\in M} T_p$, τέτοια ὥστε $\xi(p) \in T_p$, δηλαδή εἶναι μία ἐκλογή ἑνός διανύσματος τοῦ T_p, $\forall p \in M$.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἔστω διανυσματικό πεδίο $\xi = \xi(p)$ καί συνάρτηση $f \in C(M)$. Σέ κάθε σημεῖο $p \in M$ τό $\xi|_p(f)$ εἶναι ἕνας ἀριθμός. Ἄρα, τό $\xi(f)$ εἶναι μία ἀπεικόνιση $\xi(f): M \to \mathbb{R}$. Τό διανυσματικό πεδίο ξ λέγεται C^∞ ἐάν ἡ $\xi(f): M \to \mathbb{R}$ εἶναι C^∞ γιά κάθε συνάρτηση $f \in C(M)$.

Τήν ἰδέα νά θεωροῦμε (καί νά ὁρίζουμε) μία ὀντότητα C^∞ ἐάν παράγει κάτι C^∞ ὅταν ἐπιδρᾶ στό τυχόν C^∞ στό ὁποῖο μπορεῖ νά ἐπιδράσει θά τήν χρησιμοποιήσουμε πάρα πολλές φορές.

4. Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος δείχνει μία πολλή σημαντική ἰδιότητα τῶν διανυσμάτων: Τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐπιδράσεως τοῦ διανύσματος ξ στήν συνάρτηση $f \in C_1(M)$ δέν ἐξαρτᾶται ἀπ' ὅλη τήν συμπεριφορά τῆς $f: M \to \mathbb{R}$ ἀλλά μόνον ἀπό τήν συμπεριφορά τῆς f σέ μία γειτονιά τοῦ σημείου $p \in M$ (ἀκριβῶς, ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τόν περιορισμό τῆς f, $f|_U : U \to \mathbb{R}$, ὅπου (U, ϕ) εἶναι χάρτης τοῦ M πού περιέχει τό p). Αὐτή εἶναι ἡ ἔννοια κατά τήν ὁποία τά διανύσματα εἶναι <u>τοπικά</u> (local) ἀντικείμενα. Π.χ. ἄν κάνουμε τήν σφαίρα S^7 C^∞-πολλαπλότητα κατά δύο διαφορετικούς τρόπους, οἱ διανυσματικοί χῶροι T_p καί T'_p στό σημεῖο p πού ἀναφέρονται στίς δύο διαφορετικές πολλαπλότητες εἶναι ἰσόμορφοι (ἀφοῦ καθένας εἶναι ἰσόμορφος καί μέ τόν $\mathbb{R}^7$). Ἐκεῖνα πού μποροῦν νά εἶναι διαφορετικά εἶναι τά C^∞ διανυσματικά πεδία στίς δύο πολλαπλότητες.

5. Ἀρκετές φορές στή βιβλιογραφία τό διάνυσμα ὁρίζεται σάν μιά n-άδα $(\xi^1, \xi^2, \ldots \xi^n)$ ἡ ὁποία κατά τήν ἀλλαγή τοῦ συστήματος συντεταγμένων $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$ μετασχηματίζεται σύμφωνα μέ τή σχέση $\xi^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \xi^j$ (χρησιμοποιοῦμε τήν σύμβαση ὅτι βουβοί δείκτες προστίθενται). Τώρα πού ξέρουμε τί εἶναι διάνυσμα, ἄς καταλάβουμε τόν προηγούμενο "ὁρισμό". Ἔστω πολ-

λαπλότητα M, σημεῖο $p \in M$, διάνυσμα ξ στό p καί δύο χάρτες τῆς M, (V, ϕ) καί (V', ϕ') πού περιέχουν τό p καί δίνουν συντεταγμένες $\{x^i\}$ καί $\{x^{i'}\}$ σέ μία περιοχή τοῦ p. Ἡ συμβιβαστότητα τῶν χαρτῶν συνεπάγεται τήν ὕπαρξη συναρτήσεων $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$, $i = 1, 2, \dots n$ πού εἶναι C^∞. Χρησιμοποιόντας τίς φυσιολογικές παρουσιάσεις τοῦ ξ στούς δύο χάρτες παίρνουμε

$$\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p = \xi = \xi^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\Big|_p . \qquad (3)$$

Γιά τυχοῦσα συνάρτηση $f \in C(M)$, τοπικά $f = f(x^j) = f(x^{i'})$ καί προφανῶς ἔχουμε $\frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$, $\forall f \in C(M)$, ἀπ' τήν ὁποία παίρνουμε τή σχέση μεταξύ τελεστῶν παραγωγίσεως $\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$. Ἄρα, τά φυσιολογικά διανύσματα βάσεως τῶν δύο χαρτῶν συνδέονται μέ

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right)_p \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\Big|_p . \qquad (4).$$

Χρησιμοποιόντας τίς (3) καί (4) καί τό γεγονός ὅτι τά $\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\Big|_p$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα παίρνουμε

$$\xi^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right)_p \xi^j . \qquad (5)$$

Ὥστε λοιπόν ὁ προηγούμενος "ὁρισμός" σημαίνει ὅτι οἱ φυσιολογικές συντεταγμένες ἑνός διανύσματος ὡς πρός δύο χάρτες συνδέονται μέ τή σχέση (5). Τό διάνυσμα δέν ἀλλάζει ὅταν ἀλλάζουμε χάρτη

γιατί δέν ἐξαρτᾶται καθόλου ἀπό τόν χάρτη.
Ἐπειδή $\xi^{i} = \xi(x^{i})$, ἡ σχέση (5) σημαίνει

$$\xi(x^{i'}) = \xi(x^{i'}(x^{j})) = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}}\right)_p \xi(x^{j}) ,$$

πού εἶναι ἀκριβῶς ὁ κανόνας παραγωγίσεως συνθέτου συναρτήσεως, πρᾶγμα συμβιβαστό μέ τό γεγονός ὅτι τό διάνυσμα εἶναι τελεστής διαφορίσεως.

Θά τελειώσουμε τήν ἑνότητα μέ τόν ὁρισμό καί τή μελέτη τῆς <u>ἐφαπτόμενης δέσμης</u> (tangent bundle) πού ἀποτελεῖ τήν πρώτη γνωριμία μας μέ vector bundles καί fibre bundles, δομές πού χρησιμοποιοῦνται πάρα πολύ τά τελευταῖα χρόνια στή θεωρητική φυσική.

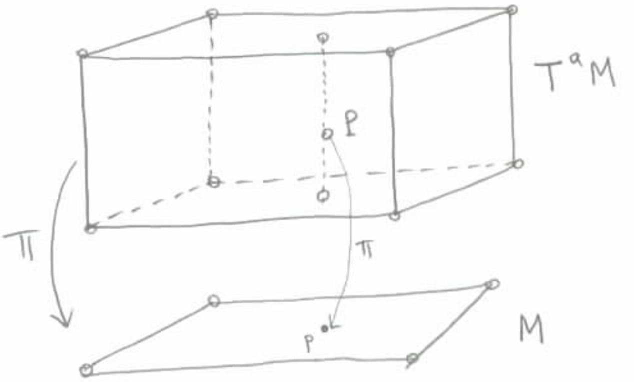
Πρῶτα ἄς τό συζητήσουμε λίγο. Σέ κάθε σημεῖο p τῆς πολλαπλότητας M ἔχουμε "n-διαστάσεις πολλά" διανύσματα. Θεωροῦμε τώρα τό σύνολο $T^{a}M$ ὅλων τῶν διανυσμάτων σ' ὅλα τά σημεῖα τῆς M. Πόσα εἶναι; Γιά νά προσδιορίσουμε ἕνα σημεῖο τοῦ $T^{a}M = \bigcup_{p\in M} T_p$ χρειαζόμαστε νά καθορίσουμε n ἀριθμούς πού καθορίζουν τό σημεῖο τῆς M κι' ἄλλους n πού καθορίζουν τό διάνυσμα σ' αὐτό τό σημεῖο, δηλ. χρειαζόμαστε συνολικά $2n$ ἀριθμούς. Περιμένουμε λοιπόν ὅτι τά σημεῖα τοῦ $T^{a}M$ εἶναι "2n-διαστάσεων πολλά", ἄν καί δέν ξέρουμε τό $T^{a}M$ νά εἶναι κάτι (π.χ. διανυσματικός χῶρος) πού ἔχει διάσταση.

Ὁ σκοπός μας τώρα εἶναι νά ὀργανώσουμε τό σύνολο $T^{a}M$ σέ μία πολλαπλότητα $2n$-διαστάσεων.

Ἔστω (V, ϕ) ἕνας n-χάρτης τῆς M. Ἀπ' αὐτὸν κατασκευάζουμε ἕναν $2n$-χάρτη $(\mathcal{U}, \Phi)$ τοῦ συνόλου T^aM ὡς ἑξῆς: Τὸ σύνολο $\mathcal{U} = \bigcup_{p \in V} T_p$ εἶναι τὸ σύνολο τῶν διανυσμάτων σ' ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ V. Ἂς εἶναι $(x^1, x^2, \dots x^n)$ οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου $p \in V$ ἀναφορικὰ μὲ τὸν χάρτη (V, ϕ) καὶ $(\xi^1, \xi^2, \dots \xi^n)$ οἱ φυσιολογικὲς συνιστῶσες τοῦ διανύσματος στὸ p ξ ὡς πρὸς τὸν ἴδιο χάρτη. Ἡ ἀπεικόνιση Φ εἶναι ἡ

$$\Phi : \mathcal{U} \ni (\xi \text{ στὸ } p) \longrightarrow \Phi(\xi \text{ στὸ } p) = (x^1, x^2, \dots x^n, \xi^1, \xi^2, \dots \xi^n) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Προφανῶς ἡ Φ εἶναι ἀμφιμονότιμη καὶ ὁ $(\mathcal{U}, \Phi)$ εἶναι ἕνας $2n$-χάρτης τοῦ T^aM. Ἐπαναλαμβάνοντας τὴν προηγούμενη κατασκευὴ γιὰ κάθε χάρτη τῆς M παίρνουμε μία συλλογὴ χαρτῶν τοῦ T^aM ποὺ τὸ καλύπτουν. Τέλος, ἡ συμβιβαστότητα τῶν (V_i, ϕ_i) συνεπάγεται τὴν συμβιβαστότητα τῶν $(\mathcal{U}_i, \Phi_i)$ καὶ τὸ σύνολο T^aM γίνεται μία C^∞-πολλαπλότητα $2n$-διαστάσεων, ποὺ λέγεται ἡ <u>ἐφαπτόμενη δέσμη</u> τῆς M. (Ἐὰν ἡ M εἶναι C^p πολλαπλότητα τότε ἡ T^aM εἶναι ἐν γένει C^{p-1} πολλαπλότητα).



Συνήθως τὴν παριστάνουμε μὲ τὸ διπλανὸ σχῆμα.

Ὑπάρχει ἡ ἀπεικόνιση

$$\pi : T^aM \ni (\xi \text{ στό } p) \longrightarrow \pi(\xi \text{ στό } p) = p \in M,$$

πού ξεχνᾶ τό διάνυσμα ξ καί θυμᾶται μόνον τό σημεῖο τῆς M στό ὁποῖο τό διάνυσμα ἀναφέρεται. Ἡ π λέγεται προβολή (projection) τῆς T^aM στήν M. Ἡ $M = \pi(T^aM)$ λέγεται καί βάση τοῦ bundle T^aM. Γιά κάθε σημεῖο $p \in M$, τό σύνολο $\pi^{-1}(p) = T_p$ στή γλώσσα τῶν bundles ἀναφέρεται σάν ἡ ἶνα (fibre) πάνω στό σημεῖο p.
Ἀναφέρουμε ἀκόμη δύο χαρακτηριστικά τῆς ἐφαπτόμενης δέσμης:

i) Ὅλες οἱ ἶνες εἶναι ἰσομορφικές (σάν διανυσματικά χῶροι).

ii) Τοπικά ἡ ἐφαπτόμενη δέσμη — δηλαδή ἡ πολλαπλότητα $\pi^{-1}(U)$ ὅπου (U,ϕ) εἶναι χάρτης τῆς M — εἶναι διαμορφική πρός τό καρτεσιανό γινόμενο τῶν πολλαπλοτήτων U καί $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ εἶναι μία εἰκόνα, ἕνας ἀντιπρόσωπος τῶν ἰνῶν) καί ἐπιπλέον ὑπάρχει διαμορφισμός πού διατηρεῖ τίς ἶνες καί τήν δομή διανυσματικοῦ χώρου πού ἔχουν οἱ ἶνες.
Πράγματι, σύμφωνα μέ τή κατασκευή τῆς προηγούμενης σελίδας, τό σύνολο $\pi^{-1}(U)$ καλύπτεται μέ τόν χάρτη (U,Φ) καί γίνεται ἔνοδα πολλαπλότητα. Δουλεύουμε σ' αὐτό τόν χάρτη. Ἡ ἀπεικόνιση

$$\Psi : U \times \mathbb{R}^n \ni \left((x^1,\dots x^n),(\xi^1,\dots\xi^n)\right) \longrightarrow (x^1,\dots x^n, \xi^1,\dots\xi^n) \in \pi^{-1}(U)$$

εἶναι προφανῶς ἕνας διαμορφισμός τῶν $U \times \mathbb{R}^n$ καί

$\pi^{-1}(V)$. Λέμε ὅτι ὁ διαμορφισμός αὐτός διατηρεῖ τίς ἴνες γιατί ἀπεικονίζει τό σύνολο $\{(p,\xi),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n\}$ στήν ἴνα $\pi^{-1}(p)$. Αὐτή ἡ ἰδιότητα ἐκφράζεται μέ τήν σχέση $(\Pi \circ \Psi)((p,\xi)) = p$. Ἐπιπλέον ὁ Ψ διατηρεῖ τήν δομή τῶν διανυσματικῶν χώρων: ἄν ἡ πράξη $\boxplus$ "πρόσθεση δύο σημείων τοῦ ἐφαπτόμενου χώρου πού ἀνήκουν στήν ἴδια ἴνα" ὁρισθεῖ ἀπό τήν

$$\boxplus : T_p \times T_p \ni (p,\xi)\times(p,\zeta) \longrightarrow (p,\xi+\zeta) \in T_p ,$$

ὁ διαμορφισμός Ψ ἱκανοποιεῖ τή σχέση

$$\Psi(p,\ \xi+\alpha\zeta) = \Psi(p,\xi) \boxplus \alpha\Psi(p,\zeta) .$$

Οἱ παραπάνω παρατηρήσεις ἁπλῶς λένε ὅτι τοπικά ὁ ἐφαπτόμενος χῶρος εἶναι ἀκριβῶς τό ἴδιο πρᾶγμα μέ τό καρτεσιανό γινόμενο ἑνός κομματιοῦ τῆς βάσεως ἐπί τήν ἴνα. Συνολικά (globally) ὅμως, ὁ ἐφαπτόμενος χῶρος μπορεῖ νά εἶναι πολύ πιό πολύπλοκος.

9. Γραμμική Ἄλγεβρα.

(Ἡ Ἑνότητα αὐτή εἶναι τελείως ἀνεξάρτητη ἀπό πολλαπλότητες).

(A) Ἔστω V διανυσματικός χῶρος διαστάσεως n πάνω στό σῶμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $\mathbb{R}$. Ἡ ἀπεικόνιση $f: V \to \mathbb{R}$ λέγεται <u>γραμμική</u> (linear) ἐάν

$$f(x+\alpha y) = f(x) + \alpha f(y), \quad \forall x, y \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Θεωροῦμε τό σύνολο

$$V^* = \{ f: V \to \mathbb{R}, \ f \text{ γραμμική} \}.$$

Στό V^* ὁρίζουμε ἐσωτερική πρόσθεση

$$f+g : V \ni x \to (f+g)(x) = f(x) + g(x) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in V,$$

καί ἐξωτερικό πολλαπλασιασμό μέ πραγματικό ἀριθμό

$$\alpha f : V \ni x \longrightarrow (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Μ' αὐτές τίς πράξεις ὁ V^* γίνεται διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα $\mathbb{R}$ καί λέγεται ὁ <u>δυϊκός χῶρος</u> (dual vector space) τοῦ V.

<u>Θεώρημα:</u> $\dim V^* = \dim V$

<u>Ἀπόδειξη:</u> Ἔστω $\dim V = n$ καί $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ μία βάση τοῦ V. Παρατηροῦμε ὅτι λόγω τῆς γραμμικότητας τό τυχόν στοιχεῖο $f \in V^*$ ὁρίζεται ἄν ὁρισθεῖ ἡ δράση του στά διανύσματα τῆς βάσεως, δηλαδή ἐάν ὁρισθοῦν τά $f(e_j)$, $j = 1, 2, \dots n$. Ὁρίζουμε τίς ἑξῆς n τό πλῆθος γραμμικές ἀπεικονίσεις:

$$f_1 : \quad f_1(e_1) = 1, \quad f_1(e_2) = 0, \ \dots \ f_1(e_n) = 0.$$

f_2: $f_2(e_1) = 0$, $f_2(e_2) = 1, \dots$ $f_2(e_n) = 0$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

καὶ γενικὰ τὴν f_i ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ἐὰν } i=j \\ 0 & \text{ἐὰν } i\neq j \end{cases} = \text{τὸ δέλτα τοῦ Kronecker.}$$

i) Τὰ $\{f_1, f_2, \dots f_n\}$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.
Πράγματι, ἔστω ὅτι $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, δηλ. ὅτι $(a_1 f_1 + \dots + a_n f_n)(x) = 0$, $\forall x \in V$. Γιὰ $x = e_k$ δίνει $a_k = 0$ καὶ γιὰ $k = 1, 2, \dots n$ ἀποδεικνύεται ἡ γραμμικὴ ἀνεξαρτησία.

ii) Τὰ $\{f_1, f_2, \dots f_n\}$ ἀποτελοῦν βάση τοῦ V^*. Πράγματι, ἔστω τυχὸν $f \in V^*$. Ὀνομάζουμε $f(e_i) = a_i \in \mathbb{R}$.
Θὰ δείξουμε ὅτι $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n$.
Τὸ τυχὸν $x \in V$ τὸ γράφουμε $x = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$.
Ἄρα $f(b_1 e_1 + \dots + b_n e_n) = b_1 f(e_1) + \dots + b_n f(e_n) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$.
Ἐπίσης $(a_1 f_1 + \dots + a_n f_n)(b_1 e_1 + \dots + b_n e_n) =$

$= a_1 f_1(b_1 e_1 + \dots + b_n e_n) + \dots + a_n f_n(b_1 e_1 + \dots + b_n e_n) =$

$= \dots = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$. ∎

Οἱ διανυσματικοὶ χῶροι V καὶ V^* εἶναι ἰσόμορφοι σὰν χῶροι μὲ τὴν ἴδια (πεπερασμένη!) διάσταση πάνω στὸ ἴδιο σῶμα, δὲν μπορεῖ νὰ βρεθεῖ ὅμως ἕνας φυσιολογικὸς ἰσομορφισμὸς μεταξὺ τῶν V καὶ V^* (ὑπάρχουν πολλοὶ ἰσομορφισμοί, ἄπειροι μάλιστα, χωρὶς κανεὶς ἀπ' αὐτοὺς νὰ εἶναι προτιμητέος ἔναντι τῶν ὑπολοίπων).

Ἂν ὅμως καθορισθεῖ μία βάση τοῦ V, τότε σ' αὐτήν ἀντιστοιχεῖ μία βάση τοῦ V^*.

Φυσικά μποροῦμε νά κατασκευάσουμε καί τόν $(V^*)^*$, κ.τ.λ.π. Ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ $(V^*)^*$ εἶναι φυσιολογικά ἰσόμορφος (naturally isomorphic) μέ τόν V καί γι' αὐτό δέν τόν διακρίνουμε ἀπό τόν V. Δουλεύουμε λοιπόν μόνον μέ τούς V καί V^*.

(B) Θά καθιερώσουμε τώρα ἕναν συμβολισμό, τόν index notation, πού πρωτοπροτάθηκε ἀπό τόν R. Penrose, καί χρησιμοποιεῖται πολύ στή Σχετικότητα. Εἶναι ἕνας τρόπος νά συμβολίζουμε τανυστές.

Ἄς εἶναι $V^a, V^b, V^c, \ldots$ διάφοροι διανυσματικοί χῶροι πεπερασμένων διαστάσεων, δηλ. διαφορετικοί διανυσματικοί χῶροι διακρίνονται ὅταν ἔχουν διαφορετικό δείκτη. Τά στοιχεῖα τοῦ V^a παριστάνονται μέ $\xi^a, \eta^a, \sigma^a, t^a, \ldots$, δηλαδή μέ ἕνα μικρό γράμμα καί ἀκριβῶς τόν ἴδιο δείκτη πού χαρακτηρίζει καί τόν διανυσματικό χῶρο. Π.χ., ἄν δοθεῖ τό ξ^c ξέρουμε ἀμέσως ὅτι εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ V^c. Ἀποφασίζουμε ἐπίσης νά παριστάνουμε μέ $V_a, V_b, V_c, \ldots$ ἀντίστοιχα τούς δυϊκούς χώρους τῶν $V^a, V^b, V^c, \ldots$, καί μέ $\mu_b, \xi_b, \eta_b, \ldots$, π.χ., τά στοιχεῖα τοῦ V_b. Κατά συνέπεια, "δύο μικρά γράμματα μέ δείκτες" προστίθενται ἐάν ἔχουν ἀκριβῶς τόν ἴδιο δείκτη καί ἀκριβῶς στήν ἴδια θέση, εἴτε πάνω εἴτε κάτω.

Αποφασίζουμε επίσης νά παριστάνουμε τόν άριθμό $\mu_a(\xi^a)$ μέ $\mu_a \xi^a$ ή $\xi^a \mu_a$. Δύο παρατηρήσεις τώρα πού δείχνουν ότι ό συμβολισμός μας είναι άρκετά καλός.

i) Ό συμβολισμός προτείνει ότι

$(\alpha \mu_a + \beta \sigma_a)(\gamma \xi^a + \delta \zeta^a) = \alpha\gamma\, \mu_a \xi^a + \alpha\delta\, \mu_a \zeta^a + \beta\gamma\, \sigma_a \xi^a + \beta\delta\, \sigma_a \zeta^a$

$\forall\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, σχέση πού μπορεί νά άποδειχθεί άν θυμηθούμε τόν τρόπο πού ορίσθηκαν οί πράξεις στόν V^* καί τήν γραμμικότητα τών στοιχείων του.

ii) Ό συμβολισμός μας έπιτρέπει νά δούμε τό $\mu_a(\xi^a) = \mu_a \xi^a = \xi^a \mu_a$ καί σάν $\xi^a(\mu_a)$, δηλαδή νά δούμε τά διανύσματα σάν γραμμικές άπεικονίσεις άπό τόν $V^* \longrightarrow \mathbb{R}$, πού ένισχύει τήν άποψη ότι ό ρόλος τών V καί V^* είναι άπόλυτα δυϊκός.

Τήν άποψη νά βλέπουμε τά διανύσματα σάν γραμμικές άπεικονίσεις θά τήν κρατήσουμε καί θά τήν γενικεύσουμε. Πολύ σύντομα θά ορίσουμε τούς <u>ταννυστές</u> (tensors) σάν πολυγραμμικές άπεικονίσεις άπό διανυσματικούς χώρους $V^a, V^b, \ldots V_a, V_b, \ldots$ στό $\mathbb{R}$.

<u>Όρισμός:</u> Ή άπεικόνιση $f: V^a \times V^b \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται διγραμμική έάν

$$f(\alpha \xi^a + \beta \lambda^a, \mu^b) = \alpha f(\xi^a, \mu^b) + \beta f(\lambda^a, \mu^b) \quad \text{καί}$$

$$f(\xi^a, \alpha \mu^b + \beta \sigma^b) = \alpha f(\xi^a, \mu^b) + \beta f(\xi^a, \sigma^b),$$

$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ καί γιά τυχαία διανύσματα πού άνήκουν στούς άντίστοιχους χώρους, δηλαδή έάν είναι γραμμική ώς πρός κάθε μία άπό τίς μεταβλητές της.

Παρόμοια ὁρίζονται καί οἱ πολυγραμμικές (multilinear) ἀπεικονίσεις: ἀπεικονίσεις ἀπό τό καρτεσιανό γινόμενο πολλῶν διανυσματικῶν χώρων στούς πραγματικούς ἀριθμούς οἱ ὁποῖες εἶναι γραμμικές ὡς πρός κάθε μεταβλητή τους.

Γ Θεωροῦμε τώρα μία τυχαία διατεταγμένη ἐκλογή διανυσματικῶν χώρων πάνω στό σῶμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (γενικότερα πάνω στό ἴδιο σῶμα) τέτοια ὥστε κανείς διανυσματικός χῶρος νά μήν ἐμφανίζεται περισσότερες τῆς μιᾶς φορᾶς στήν ἐκλογή καί κανείς νά μήν ἐμφανίζεται συγχρόνως μέ τόν δυϊκό του. Στόν συμβολισμό πού μόλις καθιερώσαμε αὐτό ἐκφράζεται ἁπλά: κανείς δείκτης δέν ἐμφανίζεται περισσότερο ἀπό μία φορά. Π.χ., $\{V^c, V_a, V_d, V^b, V^e\}$ εἶναι μία ἐπιτρεπτή ἐκλογή. Θεωροῦμε τό σύνολο $V_c{}^{ad}{}_{be}$ τῶν πολυγραμμικῶν ἀπεικονίσεων ἀπό τό καρτεσιανό γινόμενο τῶν παραπάνω διανυσματικῶν χώρων στούς πραγματικούς ἀριθμούς,

$$V_c{}^{ad}{}_{be} = \{T \mid T: V^c \times V_a \times V_d \times V^b \times V^e \longrightarrow \mathbb{R},\ T \text{ πολυγραμμική}\}.$$

Ὁρίζοντας πρόσθεση στό σύνολο $V_c{}^{ad}{}_{be}$ καί πολλαπλασιασμό στοιχείων τοῦ $V_c{}^{ad}{}_{be}$ μέ πραγματικούς ἀριθμούς μέ τόν συνηθισμένο τρόπο, τό σύνολο $V_c{}^{ad}{}_{be}$ γίνεται διανυσματικός χῶρος. Συνεπεῖς μέ τόν νέο μας συμβολισμό, συμβολίζουμε μέ $T_c{}^{ad}{}_{be}$, $\alpha_c{}^{ad}{}_{be}$, $k_c{}^{ad}{}_{be}$, κ.λ.π. τά στοιχεῖα τοῦ $V_c{}^{ad}{}_{be}$.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ διανυσματικοῦ χώρου $V_c{}^{ad}{}_{be}$, καὶ ὅλων τῶν χώρων ποὺ κατασκευάζονται παρόμοια ἀπὸ τοὺς ἀρχικοὺς διανυσματικοὺς χώρους, θὰ λέγονται <u>ταννυστές</u> (tensors). Γιὰ τὶς εἰκόνες τους στοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς θὰ γράφουμε

$$T_c{}^{ad}{}_{be}\left(\left(\kappa^c, \lambda_a, \mu_d, \nu^b, \xi^e\right)\right) = T_c{}^{ad}{}_{be}\,\kappa^c \lambda_a \mu_d \nu^b \xi^e =$$

$$= T_c{}^{ad}{}_{be}\,\mu_d \xi^e \kappa^c \lambda_a \nu^b = \lambda_a \mu_d T_c{}^{ad}{}_{be}\,\kappa^c \xi^e \nu^b =$$

$$= \circ \circ \circ \circ,$$

δηλαδὴ θὰ τὶς γράφουμε σὰν "formal" γινόμενα τοῦ ταννυστῆ μὲ τὰ διανύσματα-μεταβλητές, χωρὶς νὰ ἐνδιαφερόμαστε γιὰ τὴ σειρὰ τῶν ὅρων τοῦ γινομένου. Γιὰ νὰ ποῦμε ὅλη τὴν ἀλήθεια, στὴν ἀρχικὴ ἐπιλογὴ τῶν διατεταγμένων διανυσματικῶν χώρων ἀπαιτήσαμε ὅλοι οἱ χῶροι νὰ εἶναι διαφορετικοὶ γιὰ νὰ μποροῦμε νὰ παριστάνουμε τὶς εἰκόνες τῶν πολυγραμμικῶν ἀπεικονίσεων μὲ τὸν παραπάνω τρόπο. [$T_c{}^{aa}{}_{be}\,\kappa^c \lambda_a \mu_a \nu^b \xi^e$ εἶναι διφορούμενο ὅταν ἡ τάξη τῶν ὅρων δὲν παίζει ρόλο].

<u>Παρατήρηση 1η:</u> Οἱ ταννυστές, σὰν στοιχεῖα κάποιων διανυσματικῶν χώρων, εἶναι καὶ αὐτοὶ διανύσματα. Μόνο ποὺ αὐτοὶ οἱ ἀρκετὰ μπερδεμένοι διανυσματικοὶ χῶροι ἔχουν κατασκευασθεῖ ἀπὸ ἄλλους ἁπλούστερους, καὶ ποὺ ἀποφασίζουμε νὰ βλέπουμε

τούς ταννυστές ὄχι σάν ἁπλά διανύσματα ἀλλά σάν ἀπεικονίσεις μεταξύ αὐτῶν τῶν ἁπλούστερων διανυσματικῶν χώρων. Ἀπό κάθε συλλογή ἀρχικῶν διανυσματικῶν χώρων μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἕνα ἄπειρο πλῆθος ταννυστῶν, ταννυστές κάποιου εἴδους γιά κάθε συλλογή δεικτῶν. Οἱ δείκτες ἔχουν ἕναν μόνον σκοπό: νά μᾶς ὑπενθυμίζουν σέ ποιό διανυσματικό χῶρο ὁ ταννυστής ἀνήκει καί, κατά συνέπεια καί, ποιές ἀπεικονίσεις παριστάνει.

Γιά νά συνεννοούμαστε μέ τόν ὑπόλοιπο κόσμο, ἀναφέρουμε τήν καθιερωμένη ὁρολογία. Οἱ πάνω δείκτες τῶν ταννυστῶν λέγονται <u>ἀνταλλοίωτοι</u> (contravariant), οἱ κάτω δείκτες <u>συναλλοίωτοι</u> (covariant). <u>Ἀνταλλοίωτη τάξη</u> (contravariant rank) τοῦ ταννυστῆ λέγεται ὁ ἀριθμός τῶν ἀνταλλοιώτων δεικτῶν του, συναλλοίωτη τάξη (covariant rank) ὁ ἀριθμός τῶν συναλλοιώτων δεικτῶν του καί ἕνας ταννυστής μέ m ἀνταλλοίωτη καί n συναλλοίωτη τάξη λέγεται καί ταννυστής $\binom{m}{n}$. Ταννυστής τάξεως $\binom{m}{0}$ λέγεται ἀνταλλοίωτος, τάξεως $\binom{0}{n}$ λέγεται συναλλοίωτος, τάξεως $\binom{1}{0}$ διάνυσμα, τάξεως $\binom{0}{1}$ 1-μορφή (one form ἤ covector) καί τάξεως $\binom{0}{0}$ βαθμωτό ἤ ἀριθμός.

(Δ) Θά δοῦμε τώρα ὅτι κάθε ταννυστής, πού ὁρίσθηκε σάν μία ἀπεικόνιση ἀπό κάποιο καρτεσιανό γινόμενο διανυσματικῶν χώρων στούς πραγματικούς ἀριθμούς, παριστάνει συγχρόνως καί πολλές ἄλλες πολυγραμμικές ἀπεικονίσεις.

Ἔστω ὁ ταννυστής

$$T^a{}_{bc}{}^d : V_a \times V^b \times V^c \times V_d \ni (\alpha_a, \beta^b, \gamma^c, \delta_d) \longrightarrow T^a{}_{bc}{}^d \alpha_a \beta^b \gamma^c \delta_d \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Ἀποφασίζουμε νά καθορίσουμε (νά σταθεροποιήσουμε) τά διανύσματα α_a, β^b καί γ^c. Τότε ὅμως μποροῦμε νά δοῦμε τήν ἀπεικόνιση (1) καί σάν ἀπεικόνιση $V_d \longrightarrow \mathbb{R}$, πού εἶναι καί γραμμική, καί πού ξέρουμε ὅτι δέν εἶναι τίποτε παραπάνω ἀπό ἕνα στοιχεῖο τοῦ διανυσματικοῦ χώρου V^d. Τήν ἀπεικόνιση αὐτή θά τήν συμβολίζουμε

$$T^a{}_{bc}{}^d \alpha_a \beta^b \gamma^c : V_d \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (2)$$

Ὥστε, $T^a{}_{bc}{}^d \alpha_a \beta^b \gamma^c \in V^d$. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ἄν κάνουμε τή σύμβαση νά ἀγνοοῦμε τούς δείκτες πού ἐμφανίζονται δύο φορές (πάντοτε μία σάν συναλλοίωτοι καί μία σάν ἀνταλλοίωτοι δείκτες) σέ τυπικά (formal) γινόμενα ταννυστῶν μέ διανύσματα, ὁ συμβολισμός μας μᾶς δείχνει ἀμέσως πού ἀνήκει τό διάνυσμα πού παραμένει.

Αὐτές τίς ἰδέες θά τίς γενικεύσουμε λίγο. Ἀποφασίζουμε τώρα νά καθορίσουμε τά διανύσματα α_a καί β^b καί βλέπουμε τήν ἀπεικόνιση (1) σάν τήν πολυγραμμική ἀπεικόνιση

$$T^{a}{}_{bc}{}^{d}\alpha_a\beta^b : V^c \times V_d \ni (x^c, y_d) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow T^{a}{}_{bc}{}^{d}\alpha_a\beta^b x^c y_d \in \mathbb{R} \quad . \qquad (3)$$

Ἄρα λοιπόν, ἡ $T^{a}{}_{bc}{}^{d}\alpha_a\beta^b$ εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ χώρου $V_c{}^d$, καί ἡ σύμβαση γιά τήν ἀγνόηση τῶν ἐπαναλαμβανόμενων δεικτῶν μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ ἀπό τά διανύσματα καί στούς τανυστές.

Ἄς δοῦμε τώρα τήν ἀπεικόνιση (3) ἀπό μία διαφορετική σκοπιά. Γιά κάθε διανύσματα α_a καί β^b ὁ τανυστής $T^{a}{}_{bc}{}^{d}$ ὁρίζει ἕνα στοιχεῖο τοῦ χώρου $V_c{}^d$. Ὥστε

$$T^{a}{}_{bc}{}^{d} : V_a \times V^b \ni (\alpha_a, \beta^b) \longrightarrow T^{a}{}_{bc}{}^{d}\alpha_a\beta^b \in V_c{}^d, \quad (4)$$

δηλαδή ὁ τανυστής εἶναι καί πολυγραμμική ἀπεικόνιση ἀπό τό καρτεσιανό γινόμενο διανυσματικῶν χώρων (πλήθους μικροτέρου ἀπό τό πλῆθος τῶν δεικτῶν του) σέ ἄλλους χώρους τανυστῶν μέ μικρότερη τάξη. Καί εἶναι προφανές ὅτι ἕναν συγκεκριμένο τανυστή μποροῦμε νά τόν δοῦμε σάν μιά τέτοια ἀπεικόνιση κατά πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Π.χ.

$$T^{a}{}_{bc}{}^{d} : V_a \longrightarrow V_{bc}{}^{d} ,$$
$$T^{a}{}_{bc}{}^{d} : V^b \times V_d \longrightarrow V^a{}_c , \qquad (5).$$
$$T^{a}{}_{bc}{}^{d} : V_a \times V^c \times V_d \longrightarrow V_b , \qquad \text{κ.λ.π.}$$

Οἱ ὁδηγίες γιά τή γραφή αὐτῶν τῶν ἀπεικονίσεων εἶναι φανερές. Τό πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι καρτεσιανό γινόμενο διανυσματικῶν χώρων μέ δείκτες ἀπό τούς δείκτες τοῦ τανυστῆ τοποθετημένους στήν ἀντίθετή τους θέση (πάνω ⇄ κάτω). Τό πεδίο τιμῶν εἶναι χῶρος τανυστῶν μέ ἀκριβῶς τούς ὑπόλοιπους δείκτες διατηρημένους στή θέση πού εἶχαν καί στόν τανυστή.

Οἱ παραπάνω παρατηρήσεις δίνουν καί τήν ἀπάντηση στό ἐρώτημα: "Ἄν δοθῆ ἕνας τανυστικός χῶρος, κατά πόσο μποροῦμε νά κατασκευάσουμε τούς ἀρχικούς διανυσματικούς χώρους "ἐξ ὧν συνετέθη"; Ἐάν δοθοῦν $(n-1)$ ὁποιοιδήποτε ἀπό τούς ἀρχικούς διανυσματικούς χώρους, ὅπου n εἶναι ὁ συνολικός ἀριθμός τῶν δεικτῶν τοῦ τανυστικοῦ χώρου, τότε μποροῦμε νά κατασκευάσουμε τόν n-στό. Ἄν ὅμως μᾶς δοθοῦν $n-p$ μόνον ἀπ' αὐτούς, $1 \leq p \leq n$, τότε μποροῦμε μόνον νά κατασκευάσουμε ἕναν τανυστικό χῶρο μέ συνολική τάξη (= συνολικό ἀριθμό δεικτῶν) p.

(E) Θά ὁρίσουμε τώρα δύο πράξεις μεταξύ τανυστῶν, γινόμενο καί πρόσθεση.

Ἔστω δύο τανυστές, π.χ. $T^a{}_b$ καί $\Sigma_c{}^{de}$ πού δέν ἔχουν κανένα κοινό δείκτη. Τό γινόμενό τους ὁρίζεται νά εἶναι ὁ ἑξῆς τανυστής:

$$M^a{}_{bc}{}^{de} = T^a{}_b \Sigma_c{}^{de} : \quad V_a \times V^b \times V^c \times V_d \times V_e \ni (\alpha_a, \beta^b, \gamma^c, \delta_d, \varepsilon_e) \to$$
$$\longrightarrow (T^a{}_b \alpha_a \beta^b)(\Sigma_c{}^{de} \gamma^c \delta_d \varepsilon_e) \in \mathbb{R} . \qquad (6)$$

Ἡ $M^a{}_{bc}{}^{de}$ εἶναι προφανῶς πολυγραμμική καί κατά συνέπεια ἡ ἀπεικόνιση (6) ὁρίζει τανυστή. Τό γινόμενο τανυστῶν εἶναι προσεταιριστικό $[(T^a{}_b \Sigma^{cd}{}_e) Y^m{}_n = T^a{}_b(\Sigma^{cd}{}_e Y^m{}_n)]$,

ἐπιμεριστικό ὡς πρός τήν πρόσθεση $[T^a{}_b(\Sigma^c{}_d{}^e + M^c{}_d{}^e) =$
$= T^a{}_b \Sigma^c{}_d{}^e + T^a{}_b M^c{}_d{}^e]$ καί ἀντιμεταθετικό κατά μία ἔννοια πού θά γίνει προφανής μόλις δρίσουμε παρακάτω τήν ἑπόμενη πράξη μεταξύ τανυστῶν. Τό γινόμενο ὅπως δρίσθηκε γενικεύει τόν πολλαπλασιασμό τανυστή μέ πραγματικό ἀριθμό. Θά ἤθελα ἐπίσης νά τονίσω ὅτι ὁ δρισμός τοῦ γινομένου δέν κάνει τούς χώρους τανυστῶν ἄλγεβρες γιατί δέν δρίσθηκε τό γινόμενο δύο στοιχείων τοῦ ἴδιου διανυσματικοῦ χώρου, οὔτε καί τό γινόμενο εἶναι στοιχεῖο τοῦ ἴδιου διανυσματικοῦ χώρου.

Ἡ δεύτερη πράξη εἶναι ἡ πρόσθεση δύο τανυστῶν μέ ἀκριβῶς τούς ἴδιους δείκτες καί ἀκριβῶς στήν ἴδια θέση, πάνω ἤ κάτω, ἀλλά, πιθανῶς, διαφορετική σειρά. Γιά νά δρίσουμε τήν πράξη αὐτή κάνουμε χρήση τοῦ γεγονότος ὅτι ὑπάρχει ἕνας φυσιολογικός ἰσομορφισμός μεταξύ τῶν διανυσματικῶν χώρων, π.χ., $V_m{}^p{}_q$, $V^p{}_{mq}$, $V^p{}_{qm}$, $V_{qm}{}^p$ κ.λ.π. Πράγματι, ὁ $T_m{}^p{}_q \in V_m{}^p{}_q$ ἀντιστοιχεῖ στόν $M^p{}_{qm} \in V^p{}_{qm}$ γιά τόν ὁποῖο ἰσχύει

$$T_m{}^p{}_q \, \alpha^m \beta_p \gamma^q = M^p{}_{qm} \, \alpha^m \beta_p \gamma^q , \quad \forall \alpha^m \in V^m,$$
$\forall \beta_p \in V_p$, $\forall \gamma^q \in V^q$. Εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι γιά κάθε τανυστή $T_m{}^p{}_q$ ὑπάρχει μοναδικός τανυστής $M^p{}_{qm}$ πού ἱκανοποιεῖ τήν παραπάνω ταυτότητα καί ὅτι ἡ ἀντιστοιχία πού δρίζεται κατ' αὐτό τόν τρόπο εἶναι ἰσομορφισμός διανυσματικῶν χώρων.

ὁ ἰσομορφισμός εἶναι φυσιολογικός γιατί δέν χρειάζεται κανένα ἐπιπλέον δεδομένο γιά νά δριστῆ. Χρησιμοποιώντας αὐτό τόν ἰσομορφισμό δρίζουμε τήν πρόσθεση $T_m{}^p{}_q + \Sigma^p{}_{qm}$ ὡς ἑξῆς: $T_m{}^p{}_q + \Sigma^p{}_{qm}$ εἶναι τό στοιχεῖο τοῦ $V_m{}^p{}_q$ πού παίρνουμε ἐάν προσθέσουμε τό $T_m{}^p{}_q$ μέ τήν ἰσομορφική εἰκόνα τοῦ $\Sigma^p{}_{qm}$ στόν $V_m{}^p{}_q$ ἤ τό στοιχεῖο τοῦ $V^p{}_{qm}$ πού παίρνουμε ἐάν προσθέσουμε τό $\Sigma^p{}_{qm}$ μέ τήν ἰσομορφική εἰκόνα τοῦ $T_m{}^p{}_q$ στόν $V^p{}_{qm}$ ἤ ..., δηλαδή προσθέτουμε modulo τούς παραπάνω φυσιολογικούς ἰσομορφισμούς.

(2) Μέχρι τώρα δρίσαμε καί μελετήσαμε τανυστές ξεκινώντας ἀπό πολλούς, διάφορους ἐν γένει, διανυσματικούς χώρους. Τώρα θά ἐξειδικεύσουμε λίγο τους τανυστές, πρᾶγμα πού θά μᾶς ἐπιτρέψει νά δρίσουμε δύο ἐπιπλέον πράξεις σ' αὐτούς, ἀντικατάσταση δεικτῶν καί συστολή δεικτῶν. Ὅλοι οἱ τανυστές πού χρησιμοποιοῦνται στή φυσική ἀνήκουν σ' αὐτή τήν ἐξειδικευμένη κατηγορία τανυστῶν. Ἡ βασική παραδοχή εἶναι ὅτι τώρα πλέον ἔχουμε ἕναν μόνον διαθέσιμο διανυσματικό χῶρο ἀπό τόν ὁποῖο θέλουμε νά κατασκευάσουμε τανυστές.

Ἔστω διανυσματικός χῶρος V καί $V^a, V^b, V^c, \ldots$ διάφορα ἀντίτυπα αὐτοῦ, ἀπαιτοῦμε δηλαδή ὅτι μᾶς δόθηκαν καί ἰσομορφισμοί $i^a : V \longrightarrow V^a$, $i^b : V \longrightarrow V^b, \ldots$ μεταξύ τοῦ ἀρχικοῦ διανυσματικοῦ χώρου καί τῶν ἀντιτύπων του. Καθιερώνουμε τόν συμβολισμό $i^a(\xi) = \xi^a$, $i^b(\xi) = \xi^b, \ldots$, δηλαδή οἱ εἰκόνες τοῦ $\xi \in V$ ἀπό τούς διάφορους ἰσομορφισμούς ἀπεικονίζονται μέ τό ἴδιο μικρό γράμμα καί διαφορετικό πάνω δείκτη πού δηλώνει membership. Παρόμοια συμβολίζουμε καί τά στοιχεῖα τῶν δυϊκῶν χώρων $\mu \in V^*$, $\mu_a \in V_a$, $\mu_b \in V_b$, ὑποθέτοντας ὅτι βρήκαμε μία ἀπεικόνιση $g: V \longrightarrow V^*$ καί μετά, χρησιμοποιώντας τήν g, ἐπεκτείναμε τούς ἀρχικούς ἰσομορφισμούς καί σέ ἰσομορφισμούς μεταξύ τῶν V^* καί $V_a, V_b, \dots$ Εἴμαστε ἕτοιμοι τώρα νά βροῦμε **ἀντικατάσταση δεικτῶν** (index substitution).

Θεωροῦμε χῶρο τανυστῶν, π.χ. $V^a{}_{bc}{}^d$ καί στοιχεῖο του $T^a{}_{bc}{}^d$. Διαλέγουμε δύο δείκτες, ἕναν ἀπό τή συλλογή τῶν δεικτῶν τοῦ $T^a{}_{bc}{}^d$, π.χ. d, καί ἕναν πού δέν ἀνήκει στή συλλογή, π.χ. m. Ὁ ἰσομορφισμός μεταξύ τῶν V^d καί V^m (ὁ $i^m \circ (i^d)^{-1}$) μπορεῖ (ὄχι φυσιολογικό!) νά χρησιμοποιηθεῖ γιά νά βρεῖ ἰσομορφισμό μεταξύ τῶν $V^a{}_{bc}{}^d$ καί $V^a{}_{bc}{}^m$, τόν $V^a{}_{bc}{}^d \ni T^a{}_{bc}{}^d \longrightarrow T^a{}_{bc}{}^m \in V^a{}_{bc}{}^m$ ὅπου

$$T^a{}_{bc}{}^d \xi_d = T^a{}_{bc}{}^m \xi_m, \quad \forall \xi_d \in V_d, \quad \xi_m = (i_m (i_d)^{-1})(\xi_d).$$

Ὁ $T^a{}_{bc}{}^m$ πού βρέθηκε ἀπό τόν $T^a{}_{bc}{}^d$ καί αὐτή τήν πράξη λέγεται ὅτι κατασκευάσθηκε ἀπό τόν $T^a{}_{bc}{}^d$ μέ ἀντικατάσταση τοῦ δείκτη d μέ τόν δείκτη m. Προσοχή! Δέν γράφουμε ὅτι $T^a{}_{bc}{}^d = T^a{}_{bc}{}^m$.

Παράδειγμα: Ἔστω ὁ τανυστής T^{ab}. Κάνοντας ἀντικατάσταση δεικτῶν μποροῦμε νά πάρουμε διαδοχικά $T^{ab} \longrightarrow T^{am}$, $T^{am} \longrightarrow T^{nm}$, $T^{nm} \longrightarrow T^{bm}$, $T^{bm} \longrightarrow T^{ba}$. Ἐν γένει λοιπόν δέν ἰσχύει ὅτι $T^{ab} = T^{ba}$. Ἄν ἰσχύει $T^{ab} = T^{ba}$ τότε ὁ τανυστής $T^{ab} \in V^{ab}$ λέγεται **συμμετρικός**. Αὐτό εἶναι ἰδιότητα τοῦ στοιχείου T^{ab} καί ὄχι τοῦ χώρου V^{ab}.

Ὁρίζουμε τώρα τή συστολή δεικτῶν (contraction). Ἔστω ταυνυστής, π.χ. $T^{abc}{}_{d}$, μέ ἕναν τουλάχιστον συναλλοίωτο κι ἕναν ἀνταλλοίωτο δείκτη. Διαλέγουμε δύο δείκτες του, ἕναν συναλλοίωτο κι ἕναν ἀνταλλοίωτο, π.χ. b καί d. Ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ ταυνυστής γράφεται σάν πεπερασμένο ἄθροισμα γινομένων ταυνυστῶν τῆς μορφῆς

$$T^{abc}{}_{d} = \lambda^{ac}\alpha^{b}\beta_{d} + \mu^{ac}\gamma^{b}\delta_{d} + \dots + \nu^{ac}\varepsilon^{b}\eta_{d}, \quad (7)$$

ὅπου κάθε ὅρος τοῦ ἀθροίσματος εἶναι (ταυνυστικό) γινόμενο δύο διανυσμάτων μέ τούς δείκτες πού ξεχωρίσαμε ἐπί ἕναν ταυνυστή πού "κουβαλᾶ" ὅλους τούς ὑπόλοιπους δείκτες. Τό στοιχεῖο

$$\lambda^{ac}(\alpha^{b}\beta_{b}) + \mu^{ac}(\gamma^{b}\delta_{b}) + \dots + \nu^{ac}(\varepsilon^{b}\eta_{b}) \quad (8)$$

τοῦ χώρου λ^{ac} (ἀφοῦ $\alpha^{b}\beta_{b}$ κ.λ.π. εἶναι ἀριθμοί) λέγεται συστολή τοῦ $T^{abc}{}_{d}$ πάνω στούς δείκτες b καί d καί συμβολίζεται $T^{abc}{}_{b} = T^{amc}{}_{m} = T^{apc}{}_{p}$ κ.λ.π. Ἄν καί ἡ ἀνάλυση τοῦ ταυνυστῆ $T^{abc}{}_{d}$ στή μορφή (7) δέν εἶναι μοναδική ἐπιπλέον ἀποδεικνύεται ὅτι τό ἀποτέλεσμα (8) εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τήν ἀρχική ἀνάλυση καί συνεπῶς ἡ πράξη τῆς συστολῆς εἶναι καλῶς ὁρισμένη (δηλ. δίνει ἕνα ἀκριβῶς ἀποτέλεσμα).

Παρατήρηση 2η: Ἡ συστολή ἐλαττώνει κατά δύο τήν τάξη τοῦ ταυνυστῆ. Ἀπό ἕναν ταυνυστή $\binom{m}{n}$ παίρνουμε ἕναν ταυνυστή $\binom{m-1}{n-1}$. Ἐάν κάνουμε ὁ ἕναν τανυστή δύο ἤ περισσότερες συστολές, θά τίς συμβολίζουμε μέ διαφορετικούς ἐπαναλαμβανόμενους δείκτες. Μ' αὐτή τήν ἐπιπλέον σύμβαση ὁ συμβολισμός μας ἐπαρκεῖ γιά νά ἐκφράσει τίς διάφορες πράξεις.

Παρατήρηση 3η: Ἀπ' ἐδῶ κι ἐμπρός θά ἐπιτρέπουμε καί τανυστές τῆς μορφῆς $\alpha_{ab}{}^{m}\beta_{dm}{}^{g}$ πού θά παριστάνουν τήν συστολή τοῦ τανυστῆ $\alpha_{ab}{}^{c}\beta_{de}{}^{g}$ πάνω στούς δείκτες c καί e. Σ' αὐτή τή περίπτωση λέμε ὅτι κάναμε πολλαπλασιασμό τανυστῶν μέ (σύγχρονη) συστολή. Εὔκολα μποροῦμε νά διαπιστώσουμε ὅτι οἱ συμβολισμοί μας $\mu_a\xi^a$ καί $T_{ab}{}^{c}\xi^a\eta^b\gamma_c$ γιά τίς εἰκόνες τῶν στοιχείων τοῦ δυϊκοῦ χώρου καί τῶν τανυστῶν εἶναι συμβιβαστοί μέ τόν συμβολισμό μας γιά γινόμενο τανυστῶν μέ συστολή.

Παράδειγμα 2ον: Ὁ τανυστής $T_a{}^b$ παριστάνει τή γραμμική ἀπεικόνιση

$$T_a{}^b : V^a \ni \eta^a \longrightarrow T_a{}^b\eta^a \in V^b . \qquad (9)$$

Ἐπειδή V^a καί V^b εἶναι ἀντίτυπα τοῦ ἴδιου διανυσματικοῦ χώρου V, ὁ $T_a{}^b$ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ καί ὅτι παριστάνει ἕνα γραμμικό μετασχηματισμό τοῦ V στόν ἑαυτό του. Γι' αὐτό οἱ τανυστές $\binom{1}{1}$ λέγονται καί γραμμικοί μετασχηματισμοί.

$$\begin{tikzcd} V^a \arrow[r, "T_a{}^b"] \arrow[rr, bend right, "M_a{}^c = T_a{}^m \Sigma_m{}^c"'] & V^b \arrow[r, "\Sigma_b{}^c"] & V^c \end{tikzcd}$$

Ἔστω δύο τέτοιοι γραμμικοί μετασχηματισμοί. Ἡ σύνθεσή τους $\Sigma \circ T$ παριστάνεται μέ τό γινόμενο μέ συστολή $T_a{}^m \Sigma_m{}^c$.

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "i^a"'] \arrow[dr, "i^b"] & \\
V^a \arrow[rr, "i^b \circ (i^a)^{-1}", "\delta_a{}^b"'] & & V^b
\end{tikzcd}$$

Ὁ τανυστής $\binom{1}{1}$ πού παριστάνει τή γραμμική ἀπεικόνιση
$$V^a \ni \xi^a \longrightarrow \left(i^b \circ (i^a)^{-1}\right)(\xi^a) = \xi^b \in V^b,$$
πού εἶναι ἡ σύνθεση τῶν δοσμένων ἰσομορφισμῶν, λέγεται τανυστής τοῦ Kronecker καί παριστάνεται συνήθως μέ $\delta_a{}^b$:

$$\delta_a{}^b : V^a \ni \xi^a \longrightarrow \delta_a{}^b \xi^a = \xi^b \in V^b. \quad (10)$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι, π.χ., $\delta^a{}_b T^{cb}{}_{pq} = T^{ca}{}_{pq}$, δηλ. ὅτι πολλαπλασιασμός μέ συστολή μέ τόν τανυστή τοῦ Kronecker ἰσοδυναμεῖ μέ ἀντικατάσταση δείκτη. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι εὔκολη: Ἁπλῶς γράφουμε τόν $T^{cb}{}_{pq}$ σάν ἄθροισμα γινομένων τανυστῶν τοῦ χώρου $V^c{}_{pq}$ μέ διανύσματα τοῦ χώρου V^b καί ἀφήνουμε τόν $\delta^a{}_b$ νά δράσει στά διανύσματα τοῦ V^b. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται ὅτι $\delta^a{}_a = \dim V$.

(Η) Ὁρίζουμε τώρα συνιστῶσες τανυστῶν. Ἔστω $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \dots n$ μία βάση τοῦ V καί ἔστω $(e^a)_i$, $(e^b)_i$, $(e^c)_i$, …, $i = 1, 2, \dots n$ οἱ ἀντίστοιχες βάσεις τῶν $V^a, V^b, V^c, \dots$ πού προκύπτουν ἀπό τούς ἰσομορφισμούς $i^a, i^b, i^c, \dots$ καί $(e_a)_i$, $(e_b)_i$, $(e_c)_i$ οἱ δυϊκές τῶν παραπάνω βάσεων [δηλ. βάσεις τῶν ἀντίστοιχων δυϊκῶν χώρων γιὰ τὶς ὁποῖες ἰσχύει $(e_a)_i (e^a)_j = \delta_{ij}$ = δέλτα τοῦ Kronecker, ποὺ δὲν πρέπει νὰ συγχέεται μὲ τὸν τανυστὴ τοῦ Kronecker]. Γιὰ τὸν τανυστικὸ χῶρο, π.χ., $V^a{}_b{}^c$ θεωροῦμε τὰ ἑξῆς, $(\dim V)^3 = n^3$ τὸ πλῆθος, στοιχεῖα του $\{(f^a{}_b{}^c)_i{}^j{}_k\ ,\ i,j,k = 1,2,\dots n\}$

$$(f^a{}_b{}^c)_i{}^j{}_k : V_a \times V^b \times V_c \ni \big((e_a)_\lambda, (e^b)_\mu, (e_c)_\nu\big) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \big((f^a{}_b{}^c)_i{}^j{}_k\big)\big((e_a)_\lambda, (e^b)_\mu, (e_c)_\nu\big) = \delta_{i\lambda}\,\delta_{j\mu}\,\delta_{k\nu} \in \mathbb{R},$$

ποὺ εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι ἀποτελοῦν μία βάση τοῦ $V^a{}_b{}^c$. Οἱ συνιστῶσες τοῦ τανυστῆ $T^a{}_b{}^c$ ὡς πρὸς τὴ βάση $(f^a{}_b{}^c)_i{}^j{}_k$,

$$T^a{}_b{}^c = \sum_{i,j,k}^{1,n} [T^a{}_b{}^c]^i{}_j{}^k \,(f^a{}_b{}^c)_i{}^j{}_k\,, \qquad (11)$$

λέγονται συνιστῶσες τοῦ τανυστῆ ὡς πρὸς τὴν ἀρχικὴ βάση $\{e_i,\ i=1,2,\dots n\}$ τοῦ χώρου V.

Γενικὰ ἕνας $\binom{m}{n}$ τανυστὴς ἔχει $(\dim V)^{m+n}$ συνιστῶσες.

Προφανῶς ἔχουμε $\mu_a \xi^a =$

$$= \Big(\sum_{i=1}^n (\mu_a)_i (e_a)_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^n (\xi^a)^j (e^a)^j\Big) = \sum_{i,j} (\mu_a)_i (\xi^a)^j (e_a)_i\big((e^a)^j\big) =$$

$$= \sum_{i,j} (\mu_a)_i (\xi^a)^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n (\mu_a)_i (\xi^a)^i\,.$$ Ὥστε

τὸ γινόμενο δύο διανυσμάτων μὲ συστολὴ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀντιστοίχων συντεταγμένων τους, ἐφ' ὅσον τὰ δύο διανύσματα ἔχουν ἐκφραστεῖ σὲ δύο δυϊκὲς βάσεις. Ἐπειδὴ ὅμως καὶ ἡ συστολὴ τανυστῶν οὐσιαστικὰ ἔχει ἀναχθεῖ, μὲ τὴν ἀνάλυση (8), σὲ συστολὴ διανυσμάτων συμπεραίνουμε ὅτι οἱ συντεταγμένες τῆς συστολῆς ἑνὸς τανυστῆ εὔκολα προσδιορίζονται ἀπὸ τὴν

$$(T^{amc}{}_{m})^{ij} = \sum_{k=1}^{n} (T^{abc}{}_{d})^{ikj}{}_{k} \qquad (12).$$

Π.χ. ἰσχύει $(T^{a}{}_{b}\xi^{b})^{i} = \sum_{j=1}^{n} (T^{a}{}_{b})^{i}{}_{j}(\xi^{b})^{j}$. (13)

Χρησιμοποιώντας τὴν (13) εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ συνιστῶσες τοῦ τανυστῆ τοῦ Kronecker ὡς πρὸς ὁποιαδήποτε βάση εἶναι τὰ δέλτα τοῦ Kronecker: $(\delta_{a}{}^{b})_{i}{}^{j} = \delta_{ij}$.

Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι ἀρχίζουμε ἀπὸ μία ἄλλη βάση τοῦ χώρου V, $\{\tilde{e}_i, i=1,2,\dots n\}$, καὶ ὑπολογίζουμε τὶς συντεταγμένες ἑνὸς τανυστῆ ὡς πρὸς τὴν καινούργια βάση. Προφανῶς τὰ διανύσματα $(\tilde{e}^{a})_i$ εἶναι γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων $(e^{a})_i$, ἔστω

$$(\tilde{e}^{a})_i = A_{ik}(e^{a})_k \,, \qquad (14)$$

ὅπου A_{ik} εἶναι ἕνας $n\times n$ πίνακας καὶ οἱ ἐπαναλαμβανόμενοι δείκτες (ὄχι τανυστικοὶ δείκτες!) δηλώνουν ἄθροιση. Ἔστω ἐπίσης $(\tilde{e}_a)_j = B_{lj}(e_a)_l$ ἡ σχέση μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων δυϊκῶν βάσεων. Ἡ ἀπαίτηση ὅτι $(\tilde{e}^a)_i (\tilde{e}_a)_j = \delta_{ij}$ δίνει

$A_{ik} B_{kj} = \delta_{ij}$, δηλαδή ὅτι ὁ πίνακας B_{ij} εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ A_{ij}, καί ἡ ἀπαίτηση ὅτι $(\tilde{f}^a{}_b{}^c)_i{}^j{}_k (\tilde{e}_a)_\lambda (\tilde{e}^b)_\mu (\tilde{e}_c)_\nu = \delta_{i\lambda} \delta_{j\mu} \delta_{k\nu}$ δίνει ὅτι ἡ καινούργια βάση δίνεται ἀπό τόν ἑξῆς γραμμικό συνδυασμό τῶν στοιχείων τῆς παλιᾶς βάσεως:

$$(\tilde{f}^a{}_b{}^c)_i{}^j{}_k = A_{i\rho} B_{\sigma j} A_{k\tau} (f^a{}_b{}^c)_\rho{}^\sigma{}_\tau . \quad (15)$$

Τέλος ἀπό τή σχέση $[T^a{}_b{}^c]^{\tilde{i}}{}_{\tilde{j}}{}^{\tilde{k}} (\tilde{f}^a{}_b{}^c)_i{}^j{}_k = T^a{}_b{}^c = [T^a{}_b{}^c]^\rho{}_\sigma{}^\tau (f^a{}_b{}^c)_\rho{}^\sigma{}_\tau$ βρίσκουμε ὅτι

$$[T^a{}_b{}^c]^{\tilde{i}}{}_{\tilde{j}}{}^{\tilde{k}} = B_{\rho i} A_{j\sigma} B_{\tau k} [T^a{}_b{}^c]^\rho{}_\sigma{}^\tau , \quad (16)$$

ὅπου οἱ περισπωμένες πάνω στούς δείκτες ἁπλῶς δηλώνουν ὅτι οἱ συνιστῶσες τοῦ τανυστῆ ἀναφέρονται ὡς πρός τήν περισπώμενη βάση. Ἡ σχέση (16), καί παρόμοιες σχέσεις γιά τανυστές μέ περισσότερους δείκτες, δίνουν τίς σχέσεις μεταξύ τῶν συνιστωσῶν ἑνός τανυστῆ ὡς πρός διαφορετικές βάσεις τοῦ ἀρχικοῦ διανυσματικοῦ χώρου.

10. Τανυστικά πεδία.

Στήν ἑνότητα 8 διαπιστώσαμε ὅτι σέ κάθε σημεῖο p πολλαπλότητας M μποροῦμε νά κατασκευάσουμε τόν ἐφαπτόμενο χῶρο T_p [ἀπ' ἐδῶ κι' ἔμπρός θά τόν συμβολίζουμε $T(p)$] πού εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος ἴδιας διαστάσεως μέ τήν πολλαπλότητα M. Στήν ἑνότητα 9 διαπιστώσαμε ὅτι ξεκινώντας ἀπό κάθε διανυσματικό χῶρο V μποροῦμε νά κατασκευάσουμε μία πρακτικά ἄπειρη συλλογή τανυστικῶν χώρων $V^{ab}{}_{c}{}^{d}{}_{e}\ldots$, ἕναν τανυστικό χῶρο γιά κάθε συλλογή δεικτῶν. Ὁ στόχος μας τώρα εἶναι νά συνδυάσουμε αὐτές τίς δύο κατασκευές. Ἀφήνοντας σέ κάθε σημεῖο p τῆς πολλαπλότητας τόν χῶρο $T(p)$ νά παίξει τόν ρόλο πού ἔπαιξε ὁ V στήν ἑνότητα 9, κατασκευάζουμε τανυστικούς χώρους σέ κάθε σημεῖο τῆς πολλαπλότητας. Οἱ χῶροι αὐτοί θά παριστάνονται $T^{a}_{(p)}$, $T_{(p)a}$, $T_{(p)}{}^{ab}{}_{cd}{}^{e}$, … . Οἱ τέσσερεις γνωστές πράξεις μεταξύ τανυστῶν ἐφαρμόζονται φυσικά καί σ' αὐτούς τούς χώρους.

Ὁρισμός: Τανυστικό πεδίο σέ πολλαπλότητα M εἶναι ἕνας καθορισμός ἑνός τανυστῆ σέ κάθε σημεῖο τῆς πολλαπλότητας τέτοιος ὥστε ὅλοι οἱ τανυστές νά ἔχουν ἀκριβῶς τούς ἴδιους δεῖκτες καί ἀκριβῶς στήν ἴδια θέση. Π.χ. ἡ ἀπεικόνιση

$$T^{a}{}_{b}{}^{c} : M \ni p \longrightarrow T^{a}{}_{b}{}^{c}(p) \in \bigcup_{p\in M} T_{(p)}{}^{a}{}_{b}{}^{c},$$

ὅπου $T^{a}{}_{b}{}^{c}(p) \in T_{(p)}{}^{a}{}_{b}{}^{c}$, $\forall p \in M$ εἶναι ἕνα τανυστικό πεδίο. Οἱ τέσσερες πράξεις μεταξύ τανυστῶν ἐφαρμοζόμενες σημεῖο κατά σημεῖο μποροῦν νά ἐπεκταθοῦν καί σέ πράξεις μεταξύ τανυστικῶν πεδίων.

Σύμφωνα μέ ὅσα ἔχουμε πεῖ μέχρι τώρα, τά C^∞-διανυσματικά πεδία εἶναι ἀπεικονίσεις ἀπό τίς C^∞-συναρτήσεις στίς C^∞-συναρτήσεις στήν πολλαπλότητα. Τά συναλλοίωτα διανυσματικά πεδία εἶναι γραμμικές ἀπεικονίσεις ἀπό τά ἀνταλλοίωτα διανυσματικά πεδία στά βαθμωτά πεδία. Τό πεδίο $\mu_a(p)$ λέγεται C^∞ ἐάν γιά κάθε C^∞ διανυσματικό πεδίο $\xi^a(p)$, $\mu_a(p)\xi^a(p) = (\mu_a\xi^a)(p)$ εἶναι C^∞-βαθμωτό πεδίο. Τά τανυστικά πεδία εἶναι πολυγραμμικές ἀπεικονίσεις ἀπό τό (κατάλληλο) καρτεσιανό γινόμενο διανυσματικῶν πεδίων στά βαθμωτά πεδία. Τό τανυστικό πεδίο λέγεται C^∞ ἐάν γιά κάθε C^∞ διανυσματικά πεδία παίρνουμε ἕνα C^∞-βαθμωτό πεδίο. Σύμφωνα μέ τίς παρατηρήσεις τῆς σελίδας 67 τά τανυστικά πεδία εἶναι καί πολυγραμμικές ἀπεικονίσεις ἀπό καρτεσιανά γινόμενα διανυσματικῶν πεδίων σέ ἄλλα τανυστικά πεδία μέ λιγότερους δείκτες καί εἶναι C^∞ ἐάν γιά κάθε C^∞-διανυσματικά πεδία δίνουν ξανά C^∞-τανυστικά πεδία. Τέλος χρησιμοποιώντας καί πολλαπλασιασμό τανυστῶν μέ συστολή μποροῦμε νά δοῦμε τά τανυστικά πεδία σάν ἀπεικονίσεις ἀπό τανυστικά πεδία σέ τανυστικά πεδία καί νά τά θεωροῦμε C^∞ ἐάν "δέν καταστρέφουν τήν C^∞-τότητα (λειότητα) τῶν ἄλλων τανυστικῶν πεδίων." Π.χ. τό τανυστικό πεδίο $T^a{}_b{}^c$ παριστάνει τίς ἀπεικονίσεις

$$T^a{}_b{}^c : \alpha_c{}^{pq} \longrightarrow T^a{}_b{}^c \alpha_c{}^{pq},$$
$$\beta^b{}_{cm} \longrightarrow T^a{}_b{}^c \beta^p{}_{cm},$$
$$f \longrightarrow f\, T^a{}_b{}^c,$$

καί ἄλλες πολλές.

<u>Παρατήρηση:</u> Στήν τελευταία παράγραφο ἡ γραμμικότητα (καί ἡ πολυγραμμικότητα) ἐννοεῖται λίγο γενικότερα ἀπ' ὅτι συνήθως. Π.χ. ἡ F ἡ γραμμική εἶναι ἐάν $\forall$ διανυσματικά πεδία ξ^a καί μ^a καί $\forall$ βαθμωτό πεδίο $f(p)$ ἰσχύει

$$F(\xi^a + f\mu^a) = F(\xi^a) + f\,F(\mu^a).$$

Αὐτή ἡ γενίκευση εἶναι ἐπιτρεπτή γιατί ἀπαιτοῦμε γραμμικότητα σέ κάθε σημεῖο τῆς πολλαπλότητας καί σ' ἕνα συγκεκριμένο σημεῖο $f(p)$ εἶναι ἀριθμός.

Θά τελειώσουμε τήν ἑνότητα ἀναφέροντας τίς σχέσεις μετασχηματισμοῦ τῶν συνιστωσῶν ἑνός τανυστῆ σέ δύο συστήματα συντεταγμένων. Ἔστω σημεῖο p πολλαπλότητας M, δύο χάρτες (V,ϕ) καί $(\tilde V,\tilde\phi)$ πού περιέχουν τό p, x^i καί $\tilde x^i$ τά συστήματα συντεταγμένων πού ὁρίζουν οἱ χάρτες σέ μία περιοχή τοῦ p καί $x^i = x^i(\tilde x^j)$ καί $\tilde x^i = \tilde x^i(x^j)$ οἱ σχέσεις μετασχηματισμοῦ αὐτῶν. Σέ κάθε χάρτη χρησιμοποιοῦμε τὴ φυσικὴ βάση (σελ. 49) $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ γιὰ τὸν χῶρο T_p. Οἱ συνιστῶσες ἑνὸς τανυστικοῦ πεδίου ὡς πρὸς τὴ βάση $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ λέγονται συνιστῶσες τοῦ τανυστῆ στὸν ἀντίστοιχο χάρτη ἤ, συνηθέστερα, στὸ ἀντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων. Χρησιμοποιώντας ὅτι $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} = \delta_{ik}$, $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^k} = \delta_{ik}$ καὶ τὴ σχέση (4) τῆς σελίδας 54 στὸ συμβολισμὸ τῆς σελίδας 76 ἐξίσωση 14 καὶ παρακάτω, ἔχουμε

$$A_{ij} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \quad \text{καὶ συνεπῶς}$$

$$B_{pj} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^p}.$$

Ἀντικατάσταση αὐτῶν στὴ σχέση (16) τῆς σελίδας 77 δίνει

$$[T^a{}_b{}^c]^{\tilde{i}}{}_{\tilde{j}}{}^{\tilde{k}} = \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^p}\right)\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^j}\right)\left(\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^\varphi}\right)[T^a{}_b{}^c]^p{}_\sigma{}^\varphi, \quad (1)$$

τὴ σχέση "μετασχηματισμοῦ τῶν συνιστωσῶν τανυστῆ ὅταν ἀλλάξει τὸ σύστημα συντεταγμένων". Ὁ κανόνας τῆς σχέσεως (1) εἶναι προφανής, μνημονεύεται εὔκολα καὶ εὔκολα γενικεύεται σὲ τανυστικὰ πεδία μὲ περισσότερους δείκτες.

11. Τελεστές παραγωγίσεως.

Στήν Ἑνότητα 8 ὁρίσαμε τά διανυσματικά πεδία σάν τελεστές διαφορίσεως πού ξέρουν νά διαφορίζουν C^∞ βαθμωτά πεδία. Στήν Ἑνότητα αὐτή θά ὁρίσουμε γενικότερους τελεστές διαφορίσεως πού ξέρουν νά διαφορίζουν κάθε C^∞ τανυστικό πεδίο.

Λίγη συζήτηση πρῶτα. Ἄν φανταστοῦμε μία πολλαπλότητα n-διαστάσεων σάν ἐπιφάνεια n-διαστάσεων σέ κάποιο χῶρο, ἡ πεῖρα μᾶς λέει ὅτι ὑπάρχουν n διευθύνσεις κατά μῆκος τῶν ὁποίων μποροῦμε νά διαφορίσουμε. Περιμένουμε λοιπόν ὅτι ἡ διαφόριση ἑνός τανυστικοῦ πεδίου θά εἶναι ἕνα καινούργιο τανυστικό πεδίο μέ ἕναν δείκτη ἐπιπλέον. Τί δείκτη ὅμως, συναλλοίωτο ἤ ἀνταλλοίωτο; Γιά κάθε βαθμωτό πεδίο f προσπαθοῦμε νά καταλάβουμε τί πρέπει νά εἶναι ἡ παράγωγός του ∇f. Γιά κάθε διανυσματικό πεδίο ξ^a, (ξ^a καί ∇f) παράγουν ἕνα ἄλλο βαθμωτό πεδίο, δηλ. ἡ ∇f φαίνεται νά εἶναι ἀπεικόνιση ἀπό διανυσματικά πεδία σέ βαθμωτά πεδία. Ἡ ∇f λοιπόν συμπεριφέρεται σάν συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο πράγμα πού προτείνει ὅτι ἡ παραγώγιση προσθέτει ἕνα συναλλοίωτο δείκτη σέ κάθε τανυστικό πεδίο. Μετά τίς παραπάνω παρατηρήσεις θά προχωρήσουμε ἀξιωματικά.

<u>Ὁρισμός:</u> <u>Τελεστής παραγωγίσεως</u> (derivative operator) ∇_a εἶναι μία ἀπεικόνιση ἀπό C^∞-τανυστικά πεδία σέ C^∞-τανυστικά πεδία μέ ἕνα

ἐπιπλέον συναλλοίωτο δείκτη πού ἱκανοποιεῖ τίς συνθῆκες :

i) Εἶναι γραμμικά. Π.χ. ἰσχύει $\nabla_a (\beta_p{}^q{}_r + \gamma_p{}^q{}_r) =$
$= \nabla_a \beta_p{}^q{}_r + \nabla_a \gamma_p{}^q{}_r$, γιά τυχόντα ταννυστικά πεδία. Προσοχή. Δέν ἀπαιτοῦμε (καί δέν ἔχουμε) γραμμικότητα κατά τή γενικευμένη ἔννοια τῆς παραγώγισης τῆς σελ. 80.

ii) Ἰσχύει ὁ κανόνας τοῦ Leibnitz γιά τό γινόμενο ταννυστικῶν πεδίων. Π.χ.
$$\nabla_a (\beta_m{}^n \gamma_{pq}{}^s) = (\nabla_a \beta_m{}^n) \gamma_{pq}{}^s + \beta_m{}^n (\nabla_a \gamma_{pq}{}^s).$$

iii) Η ∇_a ἀντιμετατίθεται μέ τίς πράξεις τῆς συστολῆς καί τῆς ἀντικαταστάσεως δεικτῶν. Π.χ. Ἐάν $\alpha_{pq}{}^r = \nabla_p \beta_q{}^r$ τότε $\alpha_{pm}{}^m = \nabla_p (\beta_q{}^q)$. Ἐπίσης ἐάν $\alpha_{mp}{}^q = \nabla_m \beta_p{}^q$ τότε $\alpha_{mp}{}^s = \nabla_m \beta_p{}^s$.

iv) Γιά κάθε C^∞ βαθμωτό πεδίο f,
$\xi^m \nabla_m f = \xi^m (f) = \xi (f)$, ὅπου τό δεύτερο μέλος $\xi(f)$ παριστάνει τήν ἐπίδραση τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου ξ^m στό βαθμωτό f πού ὁρίσε τό ξ^m.

v) Δύο διαδοχικοί τελεστές παραγωγίσεως ἀντιμετατίθενται ὅταν ἐνεργοῦν σέ βαθμωτά πεδία, δηλαδή $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$, $\forall$ C^∞-βαθμωτό πεδίο f.

Ἡ συνθήκη v), πού θά συζητηθεῖ λεπτομερῶς στό τέλος τῆς ἑνότητας, δέν εἶναι καθολικῶς παραδεκτή.

Παρατήρηση 1η: Ἐάν f = σταθερά, τότε $\nabla_a f = 0$.
Πράγματι, ἀπό τήν συνθήκη iii) τῆς σελ. 48 καί τήν προηγούμενη συνθήκη iv) παίρνουμε ὅτι
$\xi^a \nabla_a f = 0$, $\forall$ διανυσματικό πεδίο ξ^a, πού εἶναι ἀκριβῶς ὁ ὁρισμός τοῦ μηδενικοῦ συναλλοίωτου διανυσματικοῦ πεδίου.

Παρατήρηση 2η: Ἡ ἔννοια τοῦ σταθεροῦ τανυστικοῦ πεδίου δέν ὑπάρχει γιατί δύο τανυστές σέ διαφορετικά σημεῖα τῆς πολλαπλότητας εἶναι στοιχεῖα διαφορετικῶν διανυσματικῶν χώρων καί κατά συνέπεια δέν μποροῦν νά συγκριθοῦν. [Σ' αὐτή τή περίπτωση ἡ πεῖρα μας ἀπό τόν χῶρο $\mathbb{R}^n$ δέν μᾶς καθοδηγεῖ σωστά. Στόν $\mathbb{R}^n$ οἱ διάφοροι ἐφαπτόμενοι χῶροι μποροῦν νά ταυτοποιηθοῦν γιατί εἶναι ὅλοι τους φυσιολογικά ἰσόμορφοι μέ τόν ἴδιο τόν $\mathbb{R}^n$. Αὐτή ἡ ταυτοποίηση ἐπεκτείνεται καί στούς τανυστικούς χώρους σέ διαφορετικά σημεῖα μέ τούς ἴδιους ἀκριβῶς δείκτες πρᾶγμα πού μᾶς ἐπιτρέπει νά μιλοῦμε στόν $\mathbb{R}^n$ καί – μόνον στόν $\mathbb{R}^n$! – γιά σταθερά τανυστικά πεδία.

Ἀπ' ἐναντίας, ὑπάρχει ἡ ἔννοια τοῦ μηδενικοῦ τανυστικοῦ πεδίου σέ πολλαπλότητα, ἡ ἐκλογή τοῦ οὐδέτερου στοιχείου τοῦ τανυστικοῦ χώρου σέ κάθε σημεῖο τῆς πολλαπλότητας. Ἀπό τήν ἰδιότητα i) παίρνουμε εὔκολα ὅτι ἡ παράγωγος κάθε μηδενικοῦ τανυστικοῦ πεδίου εἶναι μηδέν.

Θά ἀσχοληθοῦμε τώρα μέ τήν ὕπαρξη καί τήν μοναδικότητα τελεστῶν παραγωγίσεως σέ μία πολλαπλότητα.

Θεώρημα: Ἡ πολλαπλότητα M δέχεται ἕνα τελεστή παραγωγίσεως ἐάν καί μόνον ἐάν ἡ M εἶναι παρασυμπαγής.

[Ὁ ὁρισμός τοῦ παρασυμπαγοῦς τοπολογικοῦ χώρου καί οἱ παρατηρήσεις πού ἔγιναν στήν σελίδα 19 εἶναι λάθος. Τά σωστά εἶναι τά ἑξῆς:

Ἡ οἰκογένεια $\{U_\alpha, \alpha\in A\}$ λέγεται κάλυμμα (cover) τοῦ χώρου X ἐάν $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = X$.

Ἡ οἰκογένεια $\{V_\beta, \beta\in B\}$ λέγεται ὑποκάλυμμα (subcover) τοῦ $\{U_\alpha, \alpha\in A\}$ ἐάν $\bigcup_{\beta\in B} V_\beta = X$ καί ἐπιπλέον $\forall \beta\in B, \exists \alpha\in A$ ὥστε $V_\beta = U_\alpha$.

Ἡ οἰκογένεια $\{W_\gamma, \gamma\in\Gamma\}$ λέγεται λέπτυνση (refinement) τῆς $\{U_\alpha, \alpha\in A\}$ ἐάν $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} W_\gamma = X$ καί $\forall \gamma\in\Gamma, \exists \alpha\in A$ ὥστε $W_\gamma \subset U_\alpha$.

Ὥστε καί τό ὑποκάλυμμα καί ἡ λέπτυνση εἶναι καλύμματα τοῦ χώρου. Τό ὑποκάλυμμα ἀποτελεῖται ἀπό μερικά ἀπό τά στοιχεῖα (ὑποσύνολα τοῦ X) τοῦ καλύμματος. Στήν λέπτυνση μποροῦμε νά παίρνουμε μερικά μόνον ἀπό τά στοιχεῖα τοῦ καλύμματος ἤ καί ὑποσύνολα αὐτῶν.

Στήν περίπτωση πού ὁ X εἶναι τοπολογικός χῶρος, τό κάλυμμα, τό ὑποκάλυμμα, ἡ λέπτυνση λέγονται ἀνοικτά (open) ἐάν ὅλα τά στοιχεῖα τους εἶναι ἀνοικτά ὑποσύνολα τοῦ τοπολογικοῦ χώρου.

Ὁ τοπολογικός χῶρος X λέγεται παρασυμπαγής ἐάν γιά κάθε ἀνοικτό κάλυμμά του μποροῦμε νά βροῦμε μία ἀνοικτή λέπτυνση τέτοια ὥστε κάθε σημεῖο τοῦ X νά ἀνήκει τό πολύ σέ πεπερασμένου πλήθους στοιχεῖα τῆς λέπτυνσης.

Ὁ τοπολογικός χῶρος τοῦ τρίτου παραδείγματος τῆς σελίδας 6 δέν εἶναι παρασυμπαγής. Δέν εἶναι ὅμως καί Hausdorff.

εἶναι πολύ δύσκολο νά κατασκευάσουμε τοπολογικό χῶρο ὁ ὁποῖος εἶναι Hausdorff καί δέν εἶναι παρασυμπαγής.

Σέ ἀρκετά βιβλία ἡ παρασυμπαγότητα προαπαιτεῖ ὅτι ὁ χῶρος εἶναι καί Hausdorff.]]

Ὅλες οἱ πολλαπλότητες πού ἐμφανίζονται στή φυσική εἶναι παρασυμπαγεῖς (καί Hausdorff) καί συνεπῶς δέχονται τελεστές παραγωγίσεως.

Θά μελετήσουμε τώρα τή μοναδικότητα τῶν τελεστῶν παραγωγίσεως σέ πολλαπλότητα. Θά διαπιστώσουμε ὅτι οἱ τελεστές παραγωγίσεως δέν εἶναι ποτέ μοναδικοί καί ὅτι ξέρουμε πολύ καλά πόσοι τέτοιοι ὑπάρχουν. Ἡ μή μοναδικότητά τους εἶναι ἀρκετά εὐχάριστη: πολλές φορές θά μᾶς ἐπιτρέψει νά διαλέξουμε καί νά δουλέψουμε μέ ἕνα κατάλληλο τελεστή πού ἐξυπηρετεῖ κάποιον ἐπιπλέον σκοπό. Ἡ ἀνάπτυξή μας θά γίνει σέ ἕξι βήματα.

1) Ἄς εἶναι ∇_a καί $\tilde{\nabla}_a$ δύο τελεστές παραγωγίσεως καί f ἕνα τυχόν C^∞ βαθμωτό πεδίο. Θέλουμε νά ὑπολογίσουμε τό $\tilde{\nabla}_a f - \nabla_a f$. Γιά τυχόν διανυσματικό πεδίο ξ^a,

$$\xi^a(\tilde{\nabla}_a f - \nabla_a f) = \xi^a \tilde{\nabla}_a f - \xi^a \nabla_a f = \xi(f) - \xi(f) = 0$$

(χρησιμοποιήσαμε γραμμικότητα καί τή συνθήκη iv)).

Ὥστε
$$\boxed{\tilde{\nabla}_a f = \nabla_a f}, \quad \forall f \text{ βαθμωτό}, \qquad (1)$$

δηλ. ὅλοι οἱ τελεστές παραγωγίσεως ἔχουν τήν ἴδια δράση στά βαθμωτά πεδία.

2) Μελετοῦμε τώρα τό $\tilde{\nabla}_a \xi^b - \nabla_a \xi^b$ γιά τυχόν ἀνταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο ξ^b. Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι ὁ $\tilde{\nabla}_a - \nabla_a$ δρᾶ γραμμικά στό ξ^b, μέ τή γενικευμένη μάλιστα ἔννοια τῆς γραμμικότητας πού περιγράψαμε

στὴ παρατήρηση τῆς σελίδας 80. Πράγματι,

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(f\xi^b + \eta^b) = \cancel{(\tilde{\nabla}_a f)\xi^b} + f\tilde{\nabla}_a\xi^b + \tilde{\nabla}_a\eta^b - \cancel{(\nabla_a f)\xi^b} - f\nabla_a\xi^b - \nabla_a\eta^b =$$

$$= f(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\xi^b + (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\eta^b.$$

Ἀλλὰ γραμμικές ἀπεικονίσεις ἀπό τανυστικά πεδία σέ τανυστικά πεδία εἶναι τανυστικά πεδία. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι ὑπάρχει τανυστικό πεδίο $C_{am}^{\ \ b}$ ὥστε $\tilde{\nabla}_a\xi^b - \nabla_a\xi^b = C_a{}^b{}_m\xi^m$. Ὥστε οἱ τελεστές παραγωγίσεως διαφωνοῦν στή δράση τους σέ ἀνταλλοίωτα διανυσματικά πεδία καί τό μέγεθος τῆς διαφωνίας τους μετρᾶται μέ τό τανυστικό πεδίο $C_{am}^{\ \ b}$:

$$\boxed{\tilde{\nabla}_a\xi^b = \nabla_a\xi^b + C_{am}^{\ \ b}\xi^m}, \quad \forall\xi^b. \qquad (2)$$

3) Ὑπολογίζουμε τώρα τό $\tilde{\nabla}_a\eta_b - \nabla_a\eta_b$ γιά τυχόν συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο η_b. Γιά τυχόν ἀνταλλοίωτο x^b χρησιμοποιώντας τόν κανόνα τοῦ Leibnitz καί τή σχέση (1) ἔχουμε

$$x^b(\tilde{\nabla}_a\eta_b - \nabla_a\eta_b) = \cancel{\tilde{\nabla}_a(x^b\eta_b)} - (\tilde{\nabla}_a x^b)\eta_b - \cancel{\nabla_a(x^b\eta_b)} +$$

$$+ (\nabla_a x^b)\eta_b = -[\tilde{\nabla}_a x^b - \nabla_a x^b]\eta_b =$$

$$= -C_a{}^b{}_m x^m\eta_b = -C_a{}^p{}_m x^m\eta_p = -C_a{}^p{}_b x^b\eta_p = -C_{ab}^{\ \ m}x^b\eta_m.$$

Ὥστε $x^b(\tilde{\nabla}_a\eta_b - \nabla_a\eta_b + C_{ab}^{\ \ m}\eta_m) = 0, \quad \forall x^b \Rightarrow$

$$\boxed{\tilde{\nabla}_a\eta_b = \nabla_a\eta_b - C_{ab}^{\ \ m}\eta_m}, \quad \forall\eta_b. \qquad (3)$$

Τό πεδίο $C_{ab}^{\ \ m}$ προκύπτει ἀπό τό $C_{am}^{\ \ b}$ μέ ἀντικατάσταση δεικτῶν καί κατά συνέπεια περιέχει ἀκριβῶς τήν ἴδια πληροφορία μέ τό $C_{am}^{\ \ b}$. Μποροῦμε λοιπόν νά τό θεωρήσουμε κατά μία γενικευμένη ἔννοια σάν τό "ἴδιο" τανυστικό πεδίο. Ἡ σχέση (3) λοιπόν λέει ὅτι τό "ἴδιο" τανυστικό πεδίο $C_{ab}^{\ \ m}$ ἐκφράζει καί τό μέτρο τῆς διαφωνίας τῶν δύο τελεστῶν καί στὰ συναλλοίωτα διανυσματικὰ πεδία.

4) Θὰ ἀποδείξουμε τώρα μία ἰδιότητα τοῦ C^m_{ab}.

Γιὰ τυχὸν βαθμωτὸ πεδίο f, $\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b f - \nabla_a\nabla_b f = \tilde{\nabla}_a\nabla_b f - \nabla_a\nabla_b f = (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(\nabla_b f) = -\, C^m_{ab}(\nabla_m f)$, ἀφοῦ τὸ $\nabla_b f$ εἶναι ἕνα συναλλοίωτο διανυσματικὸ πεδίο. Σύμφωνα μὲ τὴν ἰδιότητα ν) ἡ πρώτη ἔκφραση ἰσοῦται καὶ μὲ $\tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_a f - \nabla_b\nabla_a f = \cdots = -\, C^m_{ba}(\nabla_m f)$. Σύγκριση δίνει ὅτι

$$\boxed{C^m_{ab} = C^m_{ba}} , \qquad (4)$$

ὅτι δηλαδὴ τὸ C^m_{ab} εἶναι συμμετρικὸ ὡς πρὸς τοὺς δύο συναλλοίωτους δείκτες του. Ἡ (4) εἶναι ὁ μόνος περιορισμὸς ποὺ ὑπάρχει στὸ C^m_{ab}. Συμφωνοῦμε ὅτι ἡ σύγκριση τῶν τανυστῶν C^m_{ab} καὶ C^m_{ba} γίνεται σύμφωνα μὲ τὴν ἰδέα ποὺ ἀναπτύχθηκε στὶς σελίδες 69 καὶ 70.

5) Τέλος ἀποδεικνύουμε ὅτι τὸ C^m_{ab} (καὶ τὰ πεδία ποὺ παίρνουμε ἀπ' αὐτὸ μὲ ἀντικατάσταση δεικτῶν) ἀρκοῦν γιὰ νὰ ἐκφράσουμε τὴ διαφορὰ τῆς δράσεως τῶν δύο τελεστῶν σὲ τυχὸν τανυστικὸ πεδίο. Ἡ ἰδέα περιγράφεται στὸ τανυστικὸ πεδίο $T_{bc}{}^{d}$. Θέλουμε νὰ ὑπολογίσουμε τὸ $\tilde{\nabla}_a T_{bc}{}^{d} - \nabla_a T_{bc}{}^{d}$. Γιὰ τυχόντα πεδία x^b, y^c καὶ w_d ἔχουμε:

$$x^b y^c w_d \left(\tilde{\nabla}_a T_{bc}{}^{d} - \nabla_a T_{bc}{}^{d}\right) =$$

$$= \cancel{\tilde{\nabla}_a (x^b y^c w_d T_{bc}{}^{d})} - T_{bc}{}^{d}\, \tilde{\nabla}_a (x^b y^c w_d) -$$

$$- \cancel{\nabla_a (x^b y^c w_d T_{bc}{}^{d})} + T_{bc}{}^{d}\, \nabla_a (x^b y^c w_d) =$$

$$= -T_{bc}{}^{d}\left[(\tilde{\nabla}_a x^b) y^c w_d + x^b (\tilde{\nabla}_a y^c) w_d + x^b y^c (\tilde{\nabla}_a w_d)\right] +$$

$$+ T_{bc}{}^{d}\left[(\nabla_a x^b) y^c w_d + x^b (\nabla_a y^c) w_d + x^b y^c (\nabla_a w_d)\right] =$$

$$= - T_{bc}{}^{d} \left(\tilde{\nabla}_a x^b - \nabla_a x^b\right) y^c w_d - T_{bc}{}^{d} x^b \left(\tilde{\nabla}_a y^c - \nabla_a y^c\right) w_d -$$

$$- T_{bc}{}^{d} x^b y^c \left(\tilde{\nabla}_a w_d - \nabla_a w_d\right) = - T_{bc}{}^{d} C_a{}^{b}{}_{p} x^p y^c w_d -$$

$$- T_{bc}{}^{d} x^b C_a{}^{c}{}_{p} y^p w_d + T_{bc}{}^{d} x^b y^c C_{ad}^{p} w_p =$$

$$= \left(- T_{mc}{}^{d} C_{ab}^{m} - T_{bm}{}^{d} C_a{}^{m}{}_{c} + T_{bc}{}^{m} C_{am}^{d}\right) x^b y^c w_d ,$$

καί συνεπώς

$$\boxed{\tilde{\nabla}_a T_{bc}{}^{d} = \nabla_a T_{bc}{}^{d} - C_{ab}^{m} T_{mc}{}^{d} - C_{ac}^{m} T_{bm}{}^{d} + C_{am}^{d} T_{bc}{}^{m}} . \quad (5)$$

Ὥστε λοιπόν ἡ διαφορά τῶν ἐπιδράσεων τῶν δύο τελεστῶν περιλαμβάνει ἕναν ὅρο ἀνάλογο πρός τό C^{p}_{qr} γιά κάθε δείκτη τοῦ τανυστικοῦ πεδίου μέ πρόσημο "+" γιά τούς ἀνταλλοίωτους καί "−" γιά τούς συναλλοίωτους δείκτες. Ὁ τύπος (5) εὔκολα γενικεύεται καί μνημονεύεται γιά τανυστές μέ περισσότερους δείκτες.

6) Εὔκολα ἀποδεικνύεται καί τό ἀντίστροφο. Ἔστω ∇_a ἕνας τελεστής παραγωγίσεως καί ἔστω C^{m}_{ab} ἕνα τυχόν C^∞ συμμετρικό ὡς πρός τούς συναλλοίωτους δείκτες τανυστικό πεδίο. Ὁρίζουμε μία καινούργια ἀπεικόνιση – τήν παριστάνουμε $\tilde{\nabla}_a$ –, ἀπό C^∞-τανυστικά πεδία πού δέν περιέχουν τόν δείκτη a σέ τανυστικά πεδία πού περιέχουν τόν "a" σάν ἕναν ἐπιπλέον συναλλοίωτο δείκτη, ἀπό τή σχέση (1) γιά βαθμωτά πεδία, ἀπό τήν (2) γιά ἀνταλλοίωτα διανυσματικά, ἀπό τήν (3) γιά συναλλοίωτα διανυσματικά, ἀπό τή γενίκευση τῆς (5) γιά τυχόντα τανυστικά πεδία. Εὔκολα μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ἀπεικόνιση $\tilde{\nabla}_a$ εἶναι ἕνας καινούργιος τελεστής παραγωγίσεως.

Συνοψίζουμε: Τελεστές παραγωγίσεως δέν εἶναι ποτέ μοναδικοί σέ μία πολλαπλότητα (ἐκτός ἀπό πολλαπλότητες μέ διάσταση μηδέν!) ἀλλά καταλαβαίνουμε πάρα πολύ καλά κατά πόσο δέν εἶναι μοναδικοί. Κάθε C^∞ τανυστικό πεδίο μέ ἕναν ἀνταλλοίωτο καί δύο συναλλοίωτους δείκτες καί συμμετρικό ὡς πρός τούς συναλλοίωτους δείκτες ὁρίζει ἕνα τελεστή παραγωγίσεως. Ὑπάρχουν λοιπόν ἄπειροι τελεστές παραγωγίσεως. Ἄν μᾶς δοθεῖ ἕνας ξέρουμε νά κατασκευάσουμε ὅλους τούς ὑπόλοιπους. Ἡ μή μοναδικότητά τους μᾶς ἐπιτρέπει νά διαλέγουμε καί νά δουλεύουμε μέ τόν τελεστή πού εἶναι ὁ πλέον κατάλληλος γιά τήν ἀντιμετώπιση τοῦ συγκεκριμένου προβλήματος. Σέ τέτοιες περιπτώσεις ξεκινᾶμε ἀπό ἕναν τυχαῖο τελεστή (πού τίς περισσότερες φορές εἶναι ὁ τελεστής τοῦ παραδείγματος πού ἀκολουθεῖ), ἀντιστοιχοῦμε τόν ζητούμενο τελεστή μέ κάποιο πεδίο $C^m{}_{ab}$, ἐκφράζουμε τίς ἐπιπλέον ἐπιθυμητές συνθῆκες σάν συνθῆκες στό $C^m{}_{ab}$ καί τελικά προσδιορίζουμε τό $C^m{}_{ab}$.

Παράδειγμα: Ἔστω πολλαπλότητα M καί χάρτης της (V,ϕ) πού δίνει συντεταγμένες $\{x^1, x^2, \dots x^n\}$ στά σημεῖα τοῦ V. Ἔστω τυχόν τανυστικό πεδίο, π.χ. $T^a{}_b{}^c$, μέ συνιστῶσες σ' αὐτό τόν χάρτη $[T^a{}_b{}^c]^i{}_j{}^k$. Ὑπολογίζουμε τίς n^4 συναρτήσεις n μεταβλητῶν $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\{[T^a{}_b{}^c]^i{}_j{}^k\}$ καί τίς μεταχειριζόμαστε σάν τίς συνιστῶσες $[\Sigma_m{}^a{}_b{}^c]_\lambda{}^i{}_j{}^k = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\{[T^a{}_b{}^c]^i{}_j{}^k\}$ ἑνός καινούργιου τανυστικοῦ πεδίου

$\Sigma_m{}^a{}_b{}^c$. Ἐπαναλαμβάνοντας τὴν ἴδια κατασκευὴ γιὰ κάθε τανυστικὸ πεδίο ὁρίζουμε μία ἀπεικόνιση ἀπὸ C^∞-τανυστικὰ πεδία σὲ τανυστικὰ πεδία μ' ἕναν ἐπιπλέον συναλλοίωτο δείκτη. Εὔκολα ἐλέγχεται ὅτι ἡ ἀπεικόνιση αὐτὴ εἶναι ἕνας τελεστὴς παραγωγίσεως.

Θεωροῦμε τώρα $\frac{n^2(n+1)}{2}$ τυχαῖες C^∞ συναρτήσεις τῶν n μεταβλητῶν $x^1, x^2, \dots x^n$ καὶ τὶς ἀφήνουμε νὰ παίζουν τὸν ρόλο τῶν συνιστωσῶν $[C^m{}_{ab}]^i{}_{jk}$ τοῦ $C^m{}_{ab}$. [$C^m{}_{ab} = C^m{}_{ba}$ ἐὰν $[C^m{}_{ab}]^i{}_{jk} = [C^m{}_{ab}]^i{}_{kj}$. Χρειάζονται $\frac{n(n+1)}{2}$ γιὰ τοὺς δύο συμμετρικοὺς κάτω δείκτες καὶ ὅλοι αὐτοὶ μποροῦν νὰ συνδυασθοῦν κατὰ n τρόπους μὲ τὸν ἐπάνω δείκτη i.] Χρησιμοποιώντας τώρα τὶς συνιστῶσες τῶν σχέσεων (2), (3) καὶ (5) μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε, μὲ τὴ βοήθεια συνιστωσῶν, τὸν τυχόντα τελεστὴ παραγωγίσεως στὸ χάρτη (U, ϕ).

Ὥστε λοιπὸν ἡ ἀφθαρεσία στὴν ἐπιλογὴ ἑνὸς τελεστῆ παραγωγίσεως εἶναι ἀκριβῶς ἴση μὲ τὴν ἀφθαρεσία στὴν ἐπιλογὴ $\frac{n^2(n+1)}{2}$ C^∞ βαθμωτῶν πεδίων στὴν πολλαπλότητα. (Προσοχή, κάθε βαθμωτὸ πεδίο ἔχει ἄπειρους "βαθμοὺς ἐλευθερίας". Ἔχει ἕνα μόνο βαθμὸ ἐλευθερίας σ' ἕνα σημεῖο).

Παράδειγμα 2ον: Στὴν ἑνότητα 9Ζ ὁρίσαμε τὸν τανυστὴ τοῦ Kronecker σὰν τὸν $\binom{1}{1}$ τανυστὴ ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν

$$\delta_a{}^b \xi^a = \xi^b \quad , \quad \forall \xi^a \tag{6}$$

καὶ ἀποδείξαμε ὅτι $\delta_a{}^b T^{ca}{}_{d\ldots}^{\ldots} = T^{cb}{}_{d\ldots}^{\ldots}$, γιὰ τυχόντα τανυστή. Διαλέγοντας τὸν τανυστὴ τοῦ Kronecker σὲ κάθε σημεῖο μιᾶς πολλαπλότητας ἔχουμε τὸ τανυστικὸ πεδίο τοῦ Kronecker, ποὺ τὸ συμβολίζουμε ἐπίσης $\delta_a{}^b$. Γιὰ τυχόντα τελεστὴ παραγωγίσεως ἡ (6) δίνει

$(\nabla_m \delta_a{}^b)\xi^a + \delta_a{}^b(\nabla_m \xi^a) = (\nabla_m \xi^b)$, καὶ ἐπειδὴ $\delta_a{}^b(\nabla_m \xi^a) = \nabla_m \xi^b$ παίρνουμε ὅτι $(\nabla_m \delta_a{}^b)\xi^a = 0, \forall \xi^a \Rightarrow$

$$\nabla_m \delta_a{}^b = 0 \quad , \quad \forall \nabla_m . \tag{7}$$

Ἡ σχέση (7) δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν τελεστὴ παραγωγίσεως ποὺ χρησιμοποιήθηκε! Ἐλέγχουμε αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα καὶ διαφορετικά. Γιὰ ὁποιονδήποτε ἄλλο $\tilde{\nabla}_m$, $\tilde{\nabla}_m \delta_a{}^b = \nabla_m \delta_a{}^b - C^p_{ma}\delta_p{}^b + C^b_{mp}\delta_a{}^p =$
$= \nabla_m \delta_a{}^b - C^b_{ma} + C^b_{ma} = \nabla_m \delta_a{}^b$. Δηλαδή, γιὰ τὸν τανυστὴ τοῦ Kronecker ὅλοι οἱ ὅροι οἱ ἀνάλογοι τῶν C^a_{bc} ἀλληλοαναιροῦνται.

Παρατήρηση 3η: Τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ ὅροι τῆς σχέσεως (5) ἀφαιροῦνται ὅταν ἀναφέρονται σὲ συναλλοίωτους δείκτες καὶ προστίθενται ὅταν ἀναφέρονται σὲ ἀνταλλοίωτους δείκτες δὲν εἶναι οὔτε οὐσιώδες, οὔτε καὶ καθολικῶς παραδεκτὸ στὴ βιβλιογραφία. Π.χ. χρησιμοποιώντας τὸ $-C^a_{bc}$ στὴ θέση τοῦ C^a_{bc} θὰ εἴχαμε "+" γιὰ τοὺς συναλλοίωτους καὶ "−" γιὰ τοὺς ἀνταλλοίωτους δείκτες. Ἁπλῶς πρέπει νὰ καθορίσουμε τὴ σύμβασή μας γράφονται τίς σχέσεις (2) καί (3) καί μετά νά παραμείνουμε συνεπεῖς μ' αὐτήν.

<u>Παρατήρηση 4η:</u> Ἡ συνθήκη $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$, $\forall$ C^∞ βαθμωτό πεδίο περιελήφθηκε στίς συνθῆκες τοῦ ὁρισμοῦ μας γιά νά γενικεύση τήν $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ πού ἰσχύει γιά συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν μέ συνεχεῖς μερικές παραγώγους. Στή μελέτη τῆς μοναδικότητας τῶν τελεστῶν παραγωγίσεως ἔπαιξε ἕνα μόνο ρόλο: ἔκανε τό $C^m{}_{ab}$ συμμετρικό ὡς πρός τούς δύο κάτω δείκτες του. Πολλές φορές οἱ τελεστές παραγωγίσεως ἀπαιτοῦνται νά ἱκανοποιοῦν μόνο τίς συνθῆκες i)–iv). Σ' αὐτή τή περίπτωση ἡ ἀνάλυσή μας ἐξακολουθεῖ νά ἰσχύει μέ μία μόνο διαφορά: τό πεδίο $C^m{}_{ab}$ δέν ἀπαιτεῖται πλέον νά εἶναι συμμετρικό. Λέμε τότε ὅτι μελετοῦμε τελεστές παραγωγίσεως μέ <u>στρέψη</u> (torsion). Αὐτή τή γενίκευση δέν θά τήν θεωρήσουμε γιατί δέν μᾶς χρειάζεται στή Σχετικότητα. Ἀναφέρουμε ὅμως ὅτι ὑπάρχει μία θεωρία βαρύτητος (γενίκευση τῆς Σχετικότητας), ἡ θεωρία τῶν Einstein–Cartan, πού χρησιμοποιεῖ καί στρέψη. Σ' αὐτή τή περίπτωση τό συμμετρικό κομμάτι τοῦ $C^m{}_{ab}$ σχετίζεται μέ τή μάζα καί τό ἀντισυμμετρικό του κομμάτι μέ τό spin.

Στήν ἑπόμενη ἑνότητα θά διαπιστώσουμε ὅτι ἄν ἀντί γιά τή συνθήκη v) ἀπαιτήσουμε τήν ἀντιμεταθετικότητα δύο διαδοχικῶν παραγωγίσεων κάθε τανυστικοῦ πεδίου τότε ἀποκλείονται σχεδόν ὅλες οἱ ἐνδιαφέρουσες πολλαπλότητες καί οἱ ἐνδιαφέροντες τελεστές παραγωγίσεως.

12. Τανυστὴς τοῦ Riemann. Καμπυλότητα.

Στὴν ἑνότητα αὐτὴ θὰ βροῦμε τὸ τανυστικὸ πεδίο τοῦ Riemann σὰν τὸ τανυστικὸ πεδίο ποὺ μετρᾶ κατὰ πόσο δύο διαδοχικὲς παραγωγίσεις τοῦ τυχόντος τανυστικοῦ πεδίου δὲν ἀντιμετατίθενται. Ἀργότερα θὰ παρουσιάσουμε καὶ ἐπιχειρήματα ποὺ ὑποδεικνύουν ὅτι αὐτὸ τὸ τανυστικὸ πεδίο μετρᾶ καὶ τὴ "καμπυλότητα" τῆς πολλαπλότητας.

Ἔστω τυχὼν τελεστὴς παραγωγίσεως ∇_a καὶ τυχὸν C^∞ διανυσματικὸ πεδίο ξ_c. Μελετοῦμε τὸ τανυστικὸ πεδίο $(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\xi_c$. Ἀποδεικνύουμε πρῶτα ὅτι ὁ $\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a$ ἐπιδρᾶ γραμμικὰ στὸ ξ_c μὲ τὴ γενικευμένη ἔννοια τῆς γραμμικότητας τῆς σελ. 80. Πράγματι γιὰ τυχόντα f C^∞-βαθμωτὸ καὶ η_c C^∞-διανυσματικὸ ἔχουμε:

$$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)(\eta_c+f\xi_c)=$$

$$=\nabla_a\left[\nabla_b\eta_c+(\nabla_b f)\xi_c+f(\nabla_b\xi_c)\right]-\nabla_b\left[\nabla_a\eta_c+(\nabla_a f)\xi_c+f(\nabla_a\xi_c)\right]=$$

$$=\left[\nabla_a\nabla_b\eta_c+\cancel{(\nabla_a\nabla_b f)\xi_c}+\cancel{(\nabla_b f)(\nabla_a\xi_c)}+\cancel{(\nabla_a f)(\nabla_b\xi_c)}+f\,\nabla_a\nabla_b\xi_c\right]-$$

$$-\left[\nabla_b\nabla_a\eta_c+\cancel{(\nabla_b\nabla_a f)\xi_c}+\cancel{(\nabla_a f)(\nabla_b\xi_c)}+\cancel{(\nabla_b f)(\nabla_a\xi_c)}+f\,\nabla_b\nabla_a\xi_c\right]=$$

$$=(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\eta_c+f\,(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\xi_c\,.$$

Συμπεραίνουμε λοιπὸν ὅτι ὑπάρχει τανυστικὸ πεδίο $R_{abc}{}^{m}$ ὥστε

$$\boxed{(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\xi_c=R_{abc}{}^{m}\xi_m\,,\quad\forall\,\xi_c}\quad(1).$$

Τό $R_{abc}{}^{m}$ λέγεται τό τανυστικό πεδίο τοῦ Riemann τῆς πολλαπλότητας M πού ἀντιστοιχεῖ στόν τελεστή παραγωγίσεως ∇_a. [Γιά κάποιο λόγο πού δέν τόν καταλαβαίνω, τίς περισσότερες φορές ἀναφέρεται σάν ὁ τανυστής τοῦ Riemann τῆς M γιά τόν ∇_a].

Ὑπολογίζουμε τώρα τό $(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\xi^c$, $\forall\, \xi^c$. Γιά τυχόν x_c ἔχουμε

$$0=(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)(\xi^c x_c)=$$
$$=\nabla_a\left[(\nabla_b\xi^c)x_c+\xi^c(\nabla_b x_c)\right]-\nabla_b\left[(\nabla_a\xi^c)x_c+\xi^c(\nabla_a x_c)\right]=$$
$$=\left[(\nabla_a\nabla_b\xi^c)x_c+\cancel{(\nabla_b\xi^c)(\nabla_a x_c)}+\cancel{(\nabla_a\xi^c)(\nabla_b x_c)}+\xi^c(\nabla_a\nabla_b x_c)\right]-$$
$$-\left[(\nabla_b\nabla_a\xi^c)x_c+\cancel{(\nabla_a\xi^c)(\nabla_b x_c)}+\cancel{(\nabla_b\xi^c)(\nabla_a x_c)}+\xi^c(\nabla_b\nabla_a x_c)\right]=$$
$$=\left[(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\xi^c\right]x_c+\underbrace{\xi^c(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)x_c}_{=\ \xi^c R_{abc}{}^{m}x_m\ =\ \xi^m R_{abm}{}^{c}x_c},$$

$\forall\, x_c$. Ἄρα,

$$\boxed{(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\xi^c=-R_{abm}{}^{c}\xi^m,\quad \forall\,\xi^m} \qquad (2)$$

Παρόμοια βρίσκουμε γιά τό τυχόν τανυστικό πεδίο ὅτι

$$\boxed{(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)T_{cd}{}^{e}=R_{abc}{}^{m}T_{md}{}^{e}+R_{abd}{}^{m}T_{cm}{}^{e}-R_{abm}{}^{e}T_{cd}{}^{m}} \qquad (3)$$

δηλ. κάθε δείκτης τοῦ τανυστῆ δίνει καί ἀπό ἕνα ὅρο στό δεξιό μέλος.

Θά δρίσουμε τώρα λίγο συμβολισμό πού θά μᾶς ἐπιτρέψη νά ἐκφράσουμε ὄμορφα τίς ἰδιότητες τοῦ τανυστῆ τοῦ Riemann. Ἀναφέρεται στό συμμετρικό καί τό ἀντισυμμετρικό τμῆμα ἑνός τανυστῆ.

Ἔστω ὁ T_{ab}. Ὁρίζουμε

$$T_{(ab)} = \frac{1}{2!}\left(T_{ab}+T_{ba}\right) = \text{συμμετρικό τμῆμα τοῦ } T_{ab}.$$

Προφανῶς $T_{(ab)} = T_{ab} \iff T_{ab}=T_{ba}$.

Γενικά ἕνας τανυστής μέ δύο ἤ περισσότερους δεῖκτες σέ μία θέση (πάνω ἤ κάτω) λέγεται ὁλικά συμμετρικός (ὡς πρός τούς δεῖκτες αὐτῆς τῆς θέσεως) ἐάν δέν ἀλλάζει κατά τήν ἐναλλαγή δύο ὁποιωνδήποτε ἀπ' αὐτούς τούς δεῖκτες. Παρόμοια δρίζεται καί ὁ ὁλικά ἀντισυμμετρικός τανυστής.

Δουλεύοντας, π.χ., μέ συναλλοίωτους μόνο δεῖκτες ὁρίζουμε

$$T_{(abc)} = \frac{1}{3!}\left(T_{abc}+T_{bca}+T_{cab}+T_{cba}+T_{bac}+T_{acb}\right),$$

$$T_{(a_1 a_2 \cdots a_n)} = \frac{1}{n!}\left(\sum_{(i_1,i_2,\cdots i_n)} T_{a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n}}\right), \quad \text{ὅπου τό}$$

ἄθροισμα γίνεται σ' ὅλες τίς μεταθέσεις τῶν $1, 2, \ldots n$.

Παρόμοια δρίζουμε

$$T_{[ab]} = \frac{1}{2!}\left(T_{ab}-T_{ba}\right)$$

$$T_{[abc]} = \frac{1}{3!}\left(T_{abc}+T_{bca}+T_{cab}-T_{cba}-T_{bac}-T_{acb}\right)$$

$$T_{[a_1 a_2 \cdots a_n]} = \frac{1}{n!}\left(\sum_{(i_1,\cdots i_n)} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} T_{a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n}}\right),$$

ὅπου

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_m} = \begin{cases} +1 & \text{ἐάν } (i_1, \dots i_m) \text{ εἶναι ἄρτια μετάθεση τῶν } 1,2,\dots n \\ -1 & \text{ἐάν } (i_1, \dots i_m) \text{ εἶναι περιττή μετάθεση τῶν } 1,2,\dots n. \end{cases}$$

Εὔκολα ἀποδεικνύονται, π.χ., οἱ :

$T_{(abc)} = T_{abc} \Leftrightarrow$ ὁ T_{abc} εἶναι ὁλικά συμμετρικός,

$T_{[abcd]} = T_{abcd} \Leftrightarrow$ ὁ T_{abcd} εἶναι ὁλικά ἀντισυμμετρικός,

$T_{((abc))} = T_{(abc)} = T_{((ab)c)}$,

$T_{[[abc]]} = T_{[abc]} = T_{[a[bc]]}$,

$T_{[(ab)cd]} = 0$, $\quad T_{(a[bc]d)} = 0$.

Γενικά, ὅταν παρενθέσεις περιβάλλουν παρενθέσεις ἤ ὅταν ἀγκύλες περιβάλλουν ἀγκύλες, οἱ ἐσωτερικές παρενθέσεις ἤ ἀγκύλες μποροῦν νά ἀγνοηθοῦν. Ὅταν ὅμως παρενθέσεις περιβάλλουν ἀγκύλες ἤ ὅταν ἀγκύλες περιβάλλουν παρενθέσεις τό ἀποτέλεσμα εἶναι ὁ μηδενικός τανυστής.

Μέ τόν καινούργιο μας συμβολισμό ἡ ταυτότητα πού ὁρίζει τόν τανυστή τοῦ Riemann, ἐξ. (1), γράφεται

$$\nabla_{[a}\nabla_{b]}\xi_c = \frac{1}{2} R_{abc}{}^{m}\xi_m \,, \qquad (4)$$

παρόμοια καί οἱ ταυτότητες (2) καί (3).

Ἀναφέρουμε τώρα τίς βασικές ἰδιότητες τοῦ τανυστῆ τοῦ Riemann.

1. $R_{[ab]c}{}^{d} = R_{abc}{}^{d}$, Προφανῶς ἀπό τόν ὁρισμό.

2. $R_{[abc]}{}^{d} = 0$.

<u>Ἀπόδειξη:</u> Γιά τυχόν C^∞ βαθμωτό πεδίο f ἔχουμε

$$\nabla_{[a}\nabla_{b]}\nabla_c f = \frac{1}{2} R_{abc}{}^{m} (\nabla_m f) \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2} R_{[abc]}{}^{m} (\nabla_m f) = \nabla_{[[a}\nabla_{b]}\nabla_{c]} f = \nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]} f = \nabla_{[a}\nabla_{(b}\nabla_{c)]} f = 0,$$

δηλ. $R_{[abc]}{}^{m}(\nabla_m f) = 0$, $\forall$ C^∞ βαθμωτό $f \Longrightarrow$

$R_{[abc]}{}^{m} = 0$, ἐπειδή σέ κάθε σημεῖο τῆς πολλαπλότητας τά $\nabla_m f$ γιά ὅλα τά βαθμωτά ἀπαρτίζουν ἕνα διανυσματικό χῶρο n διαστάσεων, πού εἶναι ὁ ἴδιος μέ τόν διανυσματικό χῶρο τῶν τιμῶν τῶν συναλλοιώτων διανυσματικῶν πεδίων στό ἴδιο σημεῖο.

3. $\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^{e} = 0$. Ἡ ἰδιότητα αὐτή λέγεται ταυτότητα τοῦ Bianchi. [Πολλές φορές ἀναφέρονται "οἱ ταυτότητες" τοῦ Bianchi. Δέν ὑπάρχουν ἄλλες, αὐτή πού δώσαμε εἶναι ἡ μοναδική. Πολλές εἶναι οἱ συνιστῶσες τοῦ τανυστικοῦ πεδίου $\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^{e}$ πού δίνει πολλές βαθμωτές ἀλλά μία μόνο τανυστική ταυτότητα].

Ἀπόδειξη: Γιά τυχόν διανυσματικό πεδίο ξ_a θα ἔχουμε:

$$\nabla_a\nabla_{[b}\nabla_{c]}\xi_d = \nabla_a\left(\frac{1}{2} R_{bcd}{}^{m}\xi_m\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla_a R_{bcd}{}^{m})\xi_m + \frac{1}{2} R_{bcd}{}^{m}(\nabla_a\xi_m) \Longrightarrow$$

$$\nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]}\xi_d = \frac{1}{2}\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^{m}\xi_m + \frac{1}{2} R_{[bc|d|}{}^{m}(\nabla_{a]}\xi_m), \quad (5)$$

ὅπου χρησιμοποιήσαμε τίς δύο κάθετες γραμμοῦλες "||" γιά νά δηλώσουμε ὅτι στόν τελευταῖο ὅρο ὁ δείκτης d δέν συμμετέχει στήν πράξη "πάρε τό ἀντισυμμετρικό τμῆμα".

Χρησιμοποιώντας τώρα τή σχέση (3) γιά τό τανυστικό πεδίο $\nabla_c\xi_d$ παίρνουμε

$$\nabla_{[a}\nabla_{b]}\nabla_c\xi_d = \frac{1}{2}R_{abc}{}^{m}\nabla_m\xi_d + \frac{1}{2}R_{abd}{}^{m}\nabla_c\xi_m \Rightarrow$$

$$\nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]}\xi_d = \frac{1}{2}\cancel{R_{[abc]}{}^{m}}\nabla_m\xi_d + \frac{1}{2}R_{[ab|d|}{}^{m}\nabla_{c]}\xi_m . \quad (6)$$

Οἱ τελευταῖοι ὅροι τῶν (5) καὶ (6) εἶναι ἴσοι γιατί (bca) εἶναι ἄρτια μετάθεση τῶν (abc). Ἀφοῦ καὶ τὰ πρῶτα μέλη εἶναι ἴσα συμπεραίνουμε ὅτι

$\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^{m}\xi_m = 0$, $\forall\, \xi_m$ ἀπ' ὅπου προκύπτει ἡ ταυτότητα τοῦ Bianchi.

<u>Παράδειγμα 1ον:</u> Ἔστω ∇_a καὶ $\tilde{\nabla}_a$ δύο τελεστὲς παραγωγίσεως σὲ πολλαπλότητα καὶ $R_{abc}{}^{d}$, $\tilde{R}_{abc}{}^{d}$ οἱ ἀντίστοιχοι τανυστὲς τοῦ Riemann. Ἐὰν ἡ σχέση μεταξὺ τῶν ∇_a καὶ $\tilde{\nabla}_a$ ἐκφράζεται ἀπὸ τὸ τανυστικὸ πεδίο C^{a}_{bc} θέλουμε νὰ βροῦμε τὴ σχέση μεταξὺ τῶν $R_{abc}{}^{d}$ καὶ $\tilde{R}_{abc}{}^{d}$ συναρτήσει τοῦ C^{a}_{bc}.

Γιὰ τυχὸν διανυσματικὸ πεδίο ξ_c ὑπολογίζουμε τὸ

$$\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\xi_c = \tilde{\nabla}_a\left(\nabla_b\xi_c - C^{m}_{bc}\xi_m\right) =$$

$$= \tilde{\nabla}_a(\nabla_b\xi_c) - \left(\tilde{\nabla}_a C^{m}_{bc}\right)\xi_m - C^{m}_{bc}(\tilde{\nabla}_a\xi_m) =$$

$$= \nabla_a\nabla_b\xi_c - C^{m}_{ab}(\nabla_m\xi_c) - C^{m}_{ac}(\nabla_b\xi_m) -$$

$$-\left[\nabla_a C^{m}_{bc} - C^{s}_{ab}C^{m}_{sc} - C^{s}_{ac}C^{m}_{bs} + C^{m}_{as}C^{s}_{bc}\right]\xi_m -$$

$$-C^{m}_{bc}\left(\nabla_a\xi_m - C^{s}_{am}\xi_s\right) =$$

$$= \nabla_a\nabla_b\xi_c - C^{m}_{ab}\nabla_m\xi_c - 2C^{m}_{c(a}(\nabla_{b)}\xi_m) - (\nabla_a C^{m}_{bc})\xi_m +$$

$$+ 2C^{s}_{c(a}C^{m}_{b)s}\xi_m + C^{s}_{ab}C^{m}_{sc}\xi_m - C^{m}_{as}C^{s}_{bc}\xi_m .$$

Παίρνουμε τώρα τὸ ἀντισυμμετρικὸ τμῆμα τῶν δύο μελῶν ὡς πρὸς τοὺς δεῖκτες "a" καὶ "b".

Τό πρῶτο μέλος δίνει $\frac{1}{2}\tilde{R}_{abc}{}^{m}\xi_m$.

Στό δεύτερο μέλος ὁ δεύτερος, τρίτος, πέμπτος καί ἕκτος ὅρος δίνουν μηδέν γιατί εἶναι συμμετρικοί ὡς πρός a καί b, ὁ πρῶτος δίνει $\frac{1}{2}R_{abc}{}^{m}\xi_m$ καί ὁ τέταρτος καί ἕβδομος ἀντισυμμετρίζονται ὡς πρός a καί b. Ἐξαλείφοντας τό ξ_m παίρνουμε τή ζητούμενη σχέση

$$\tilde{R}_{abc}{}^{m} = R_{abc}{}^{m} - 2\nabla_{[a}C^{m}_{b]c} - 2\,C^{m}_{s[a}C^{s}_{b]c}\,. \qquad (7).$$

<u>Παράδειγμα 2ον:</u> Συστολή τῶν δεικτῶν b καί m τοῦ τανυστικοῦ πεδίου τοῦ Riemann $R_{abc}{}^{m}$ δίνει τό τανυστικό πεδίο τοῦ Ricci

$$R_{ac} = R_{amc}{}^{m} \qquad (8)$$

(ἀναφορικά μέ τόν τελεστή παραγωγίσεως ∇_a πού ὅρισε τόν τανυστή τοῦ Riemann). Προσοχή! Πρός τό παρόν ὁ τανυστής τοῦ Ricci δέν ἔχει καμμία συμμετρία.

13. Μετρικός τανυστής.

Σ' αὐτή τήν ἑνότητα θά μελετήσουμε πολλαπλότητες μέ μία ἐπιπλέον δομή, ἕνα προτιμητέο τανυστικό πεδίο $\binom{0}{2}$. Θά διαπιστώσουμε ὅτι σ' αὐτή τή περίπτωση ἡ γεωμετρία τῆς πολλαπλότητας μπορεῖ νά μελετηθεῖ πολύ λεπτομερῶς, π.χ. θά διαπιστώσουμε ὅτι ἔχουμε κάτι σάν ἀπόσταση μεταξύ σημείων τῆς πολλαπλότητας, ἔχουμε τίς γεωδαισιακές πού εἶναι τά "ποιό εὐθύγραμμα τμήματα" πού μποροῦν νά ὑπάρξουν στή πολλαπλότητα, ἔχουμε μοναδικό προτιμητέο τελεστή παραγωγίσεως, ἐπιπλέον ἰδιότητες τοῦ τανυστῆ τοῦ Riemann καί γενικά ἔχουμε ὅ,τι μᾶς χρειάζεται γιά νά κάνουμε φυσική. Ἡ μελέτη πολλαπλοτήτων μέ μετρικό τανυστή ἀναφέρεται συνήθως σάν γεωμετρία τοῦ Riemann.

Ὁρισμός: Ἔστω πολλαπλότητα M. Μετρικός τανυστής (metric) στήν M λέγεται ἕνα C^{∞}-$\binom{0}{2}$ τανυστικό πεδίο g_{ab} πού εἶναι

i) συμμετρικό, δηλ. $g_{ab} = g_{ba}$, καί

ii) ἀντιστρεπτό (invertible), δηλ. ὑπάρχει τανυστικό πεδίο g^{ac} ὥστε $g_{ab}\, g^{ac} = \delta_b{}^c =$ τό τανυστικό πεδίο τοῦ Kronecker.

Προσοχή!, πρός τό παρόν ἡ συστολή γίνεται ὡς πρός τούς πρώτους δεῖκτες.

Ἀποδεικνύουμε πρῶτα δύο ἄλλες ἰδιότητες τοῦ g_{ab}.

1. Ὁ g^{ab} εἶναι συμμετρικός. Πράγματι,

$$g^{ma}\, g^{nb}\, g_{mn} = \delta_n{}^a\, g^{nb} = g^{ab},$$

ἐνῶ τό πρῶτο μέλος ἰσοῦται καί μέ

$g^{ma} g^{nb} g_{nm} = g^{ma} \delta_m{}^b = g^{ba}$. Συνεπώς, μεταξύ ἄλλων, δέν χρειάζεται πλέον νά σκοτιζόμαστε γιά τή θέση τῶν δεικτῶν μέ τούς ὁποίους κάνουμε πολλαπλασιασμό μέ συστολή.

2. Ὁ ἀντίστροφος g^{ab} τοῦ g_{ab} εἶναι μοναδικός. Πράγματι, ἔστω $\tilde{g}^{ab}$ ἕνας ἀκόμη ἀντίστροφος τοῦ g_{ab}. Τότε, $(g^{ab} - \tilde{g}^{ab}) g_{am} = \delta_m{}^b - \delta_m{}^b = 0 \Rightarrow$

$$0 = (g^{ab} - \tilde{g}^{ab}) g_{am} g^{mc} = (g^{ab} - \tilde{g}^{ab}) \delta_a{}^c =$$

$$= g^{ac} - \tilde{g}^{ac} \Rightarrow \tilde{g}^{ac} = g^{ac}.$$

Συνεπώς σέ κάθε πολλαπλότητα μέ μετρικό τανυστή g_{ab} θά θεωροῦμε πάντοτε καί τόν <u>ἀντίστροφό</u> του (inverse) g^{ab} πού εἶναι μονοσήμαντα ὁρισμένος.

Ἀποφασίζουμε νά χρησιμοποιήσουμε τήν ὕπαρξη καί τή γνώση τῶν g_{ab} καί g^{ab} γιά νά ἁπλοποιήσουμε τό συμβολισμό μας. Καθιερώνουμε τή σύμβαση: Πολλαπλασιασμός τανυστῶν (καί τανυστικῶν πεδίων) μέ g_{ab} ἤ g^{ab} μέ σύγχρονη συστολή θά ὑποδηλώνεται μέ κατέβασμα ἤ ἀνέβασμα τοῦ συστελλόμενου δείκτη τοῦ τανυστή. Π.χ. θά γράφουμε

$$T_{ab}{}^c g^{bd} = T_a{}^{dc} = g_{am} T^{mdc} = g^{ck} T_a{}^d{}_k = \dots$$

Μ' αὐτή τή σύμβαση ὁ μετρικός τανυστής πολύ λίγο ἐμφανίζεται ἀναλυτικά στίς σχέσεις πού γράφουμε, ἄν καί συνήθως ἔχει ἤδη παίξει ἀρκετό ρόλο. Εὔκολα ἐλέγχει κανείς ὅτι τό διαδοχικό ἀνέβασμα καί κατέβασμα ἑνός δείκτη ἀφήνει τόν τανυστή ἀμετάβλητο καί συνεπώς ἡ σύμβασή μας δέν ὁδηγεῖ σέ ἀντινομίες.

Ἀποδεικνύουμε πρῶτα τὸ παρακάτω πολὺ σημαντικό.

Θεώρημα: Ἔστω (M, g_{ab}) παρασυμπαγὴς πολλαπλότητα μὲ μετρικὸ τανυστή. Ὑπάρχει ἕνας καὶ μόνον ἕνας τελεστὴς παραγωγίσεως ∇_a ὥστε $\nabla_a g_{bc} = 0$.

Ἀπόδειξη: Ἔστω $\tilde{\nabla}_a$ τυχαῖος τελεστὴς παραγωγίσεως (περιμένουμε λοιπὸν ὅτι $\tilde{\nabla}_a g_{bc} \neq 0$) καὶ ∇_a ὁ τελεστὴς ποὺ ἀναζητοῦμε. Ἔστω ὅτι οἱ ∇_a καὶ $\tilde{\nabla}_a$ σχετίζονται μὲ τὸ πεδίο $\tilde{C}^a{}_{bc}$, ὁπότε ἔχουμε

$$\nabla_a g_{bc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - \tilde{C}^m{}_{ab}\, g_{mc} - \tilde{C}^m{}_{ac}\, g_{bm} .$$

Ἀναζητοῦμε τὸ $\tilde{C}^a{}_{bc}$ ὥστε $\nabla_a g_{bc} = 0$, δηλ. ἀπαιτοῦμε

$$\tilde{C}^m{}_{ab}\, g_{mc} + \tilde{C}^m{}_{ac}\, g_{mb} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} . \qquad (1)$$

Γράφουμε καὶ τὶς δύο σχέσεις ποὺ προκύπτουν μὲ διαδοχικὲς κυκλικὲς ἐναλλαγὲς τῶν a, b, c :

$$\tilde{C}^m{}_{bc}\, g_{ma} + \tilde{C}^m{}_{ba}\, g_{mc} = \tilde{\nabla}_b g_{ca} , \qquad (2)$$

$$\tilde{C}^m{}_{ca}\, g_{mb} + \tilde{C}^m{}_{cb}\, g_{ma} = \tilde{\nabla}_c g_{ab} . \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τὶς (2) καὶ (3), ἀφαιρώντας τὴν (1) καὶ χρησιμοποιώντας τὴ συμμετρία τοῦ $\tilde{C}^a{}_{bc}$ παίρνουμε

$$2\, \tilde{C}^m{}_{bc}\, g_{ma} = \tilde{\nabla}_b g_{ca} + \tilde{\nabla}_c g_{ab} - \tilde{\nabla}_a g_{bc} \qquad (4)$$

καὶ πολλαπλασιάζοντας τὴν (4) μὲ g^{an} βρίσκουμε, μετὰ κι ἀπὸ ἀντικατάσταση δεικτῶν,

$$\tilde{C}^a{}_{bc} = \frac{1}{2}\, g^{am} \left(\tilde{\nabla}_b g_{cm} + \tilde{\nabla}_c g_{bm} - \tilde{\nabla}_m g_{bc} \right) . \qquad (5)$$

Ὁρίζοντας λοιπὸν τὸν τελεστὴ ∇_a ἀπὸ τὸν $\tilde{\nabla}_a$ καὶ τὸ $\tilde{C}^a{}_{bc}$ τῆς (5) ἔχουμε προσδιορίσει ἕνα τελεστὴ ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν $\nabla_a g_{bc} = 0$.

Πρέπει νά δείξουμε τώρα, γιά τή μοναδικότητα, ὅτι ὁ ∇_a δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τόν ἀρχικό $\tilde{\nabla}_a$. Υποθέτουμε λοιπόν ὅτι χρησιμοποιήσαμε τόν $\tilde{\tilde{\nabla}}_a$ σάν βοηθητικό τελεστή, υπολογίσαμε τό $\tilde{\tilde{C}}^a_{bc}$ ἀπό τήν ἀντίστοιχη τῆς (5) σχέση καί κατασκευάσαμε τόν ∇_a πού γιά νά εἴμαστε ἀκριβεῖς τόν συμβολίζουμε $\underset{\approx}{\nabla}_a$. Ὁ προηγούμενος εἶναι ὁ $\underset{\sim}{\nabla}_a$. Ἔστω ἐπίσης K^a_{bc} τό τανυστικό πεδίο πού δίνει τή σχέση τῶν $\tilde{\nabla}_a$ καί $\tilde{\tilde{\nabla}}_a$. Γιά τυχαῖο διανυσματικό ξ_b ἔχουμε

$$\underset{\sim}{\nabla}_a \xi_b - \underset{\approx}{\nabla}_a \xi_b = \tilde{\nabla}_a \xi_b - \tilde{C}^r_{ab}\xi_r - \tilde{\tilde{\nabla}}_a \xi_b + \tilde{\tilde{C}}^r_{ab}\xi_r =$$

$$= (\tilde{\nabla}_a - \tilde{\tilde{\nabla}}_a)\xi_b + (\tilde{\tilde{C}}^r_{ab} - \tilde{C}^r_{ab})\xi_r =$$

$$= -K^m_{ab}\xi_m + \frac{1}{2} g^{rm}\Big(\tilde{\tilde{\nabla}}_a g_{bm} + \tilde{\tilde{\nabla}}_b g_{am} - \tilde{\tilde{\nabla}}_m g_{ab} -$$

$$- \tilde{\nabla}_a g_{bm} - \tilde{\nabla}_b g_{am} + \tilde{\nabla}_m g_{ab}\Big)\xi_r =$$

$$= -K^m_{ab}\xi_m + \frac{1}{2} g^{rm}\Big(K^s_{ab} g_{sm} + K^s_{am} g_{bs} + K^s_{ba} g_{sm} +$$

$$+ K^s_{bm} g_{as} - K^s_{ma} g_{sb} - K^s_{mb} g_{as}\Big)\xi_r =$$

$$= -K^m_{ab}\xi_m + \underbrace{\frac{1}{2} g^{rm}\cdot 2K^s_{ab} g_{sm}\xi_r}_{= \delta_s^r K^s_{ab}\xi_r = K^s_{ab}\xi_s} = 0 .$$

Ὥστε οἱ δύο τελεστές πού κατασκευάσαμε συμφωνοῦν ὅταν ἐπιδροῦν στό τυχόν συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο. Ἀλλά τότε πρέπει νά συμφωνοῦν κι ὅταν ἐπιδροῦν στό τυχόν τανυστικό πεδίο. Πράγματι. Ἡ διαφορά τῶν ἐπιδράσεων τῶν $\underset{\sim}{\nabla}_a$ καί $\underset{\approx}{\nabla}_a$ ἐκφράζεται ἀπό κάποιο τανυστικό πεδίο $\underline{C}^a_{bc}$. Συνεπῶς

$$0 = \underset{\sim}{\nabla}_a \xi_b - \underset{\approx}{\nabla}_a \xi_b = \underline{C}^m_{ab}\xi_m , \quad \forall \xi_m \Longrightarrow \underline{C}^m_{ab} = 0. \blacksquare$$

<u>Ὁρισμός:</u> Ὁ τελεστὴς παραγωγίσεως ∇_a ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν $\nabla_a g_{bc} = 0$ θὰ ἀναφέρεται ἐὰν ὁ τελεστὴς παραγωγίσεως (ἢ ἡ παράγωγος) ποὺ εἶναι <u>συμβιβαστὸς μὲ τὸν μετρικὸ τανυστή</u> (compatible with the metric). Σὲ πολλὰ συγγράμματα ἀναφέρεται καὶ ὡς "ἡ συναλλοίωτη παράγωγος". Ἡ ὁρολογία αὐτὴ χρησιμοποιήθηκε γιὰ νὰ δηλώσει ὅτι ἡ παράγωγος αὐτὴ δίνει ἕνα καινούργιο τανυστικὸ πεδίο σὲ ἀντίθεση μὲ τὶς "μερικὲς παραγώγους" ποὺ δὲν δίνουν τανυστικὰ πεδία. Νομίζω ὅτι ἡ ὁρολογία "συναλλοίωτη παράγωγος" δὲν εἶναι πλέον πετυχημένη γιατὶ ἤδη ξέρουμε ὅτι ὅλοι οἱ τελεστὲς ∇_a δίνουν τανυστικὰ πεδία. Ἐκεῖνο ποὺ ξεχωρίζει τὸν ἕνα, τὸν προτιμητέο τελεστὴ παραγωγίσεως εἶναι ἡ ἰδιαίτερή του σχέση μὲ τὸν μετρικὸ τανυστή.

<u>Παράδειγμα 1ον:</u> Ἔστω πολλαπλότητα M μὲ μετρικὸ τανυστὴ g_{ab} καὶ τελεστὴ ∇_a συμβιβαστὸ μὲ τὸν g_{ab}. Ἔστω ἐπίσης (U,ϕ) ἕνας χάρτης τῆς M ποὺ δίνει συντεταγμένες x^i στὰ σημεῖα τῆς περιοχῆς U. Ἀναφορικὰ μὲ τὸν (U,ϕ) κατασκευάζουμε καὶ τὸν τελεστὴ παραγωγίσεως τοῦ παραδείγματος τῆς σελίδας 90 (συνιστῶσες $\longrightarrow$ μερικὲς παραγώγους $\longrightarrow$ καινούργιες συνιστῶσες) ποὺ τὸν συμβολίζουμε $\overset{\phi}{\nabla}_a$. Οἱ τελεστὲς ∇_a καὶ $\overset{\phi}{\nabla}_a$ σχετίζονται μὲ κάποιο τανυστικὸ πεδίο $C^a_{\ bc}$ ποὺ ἔχει συνιστῶσες στὸν χάρτη (U,ϕ) $[C^a_{\ bc}]^i_{\ jk}$. Συμβολίζουμε

$\Gamma^i_{jk} = [C^a_{\ bc}]^i_{\ jk}$ καὶ ὀνομάζουμε τὰ Γ^i_{jk} <u>σύμβολα Christoffel δευτέρου εἴδους</u>. Ἐπειδὴ τὸ $C^a_{\ bc}$ εἶναι συμμετρικὸ ἰσχύει $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος μᾶς ἔδωσε ἤδη τόν τρόπο ὑπολογισμοῦ τῶν συμβόλων τοῦ Christoffel: διαλέγουμε τόν βοηθητικό τελεστή ∇_a τῆς ἀποδείξεως νά εἶναι ὁ τελεστής "πάρε τίς μερικές παραγώγους τῶν συνιστωσῶν" καί παίρνουμε τίς συνιστῶσες τῆς σχέσεως (5).

Ἔστω τώρα $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ ἕνας ἄλλος χάρτης τῆς M, μέ συντεταγμένες $\tilde{x}^i$, ὥστε $U \cap \tilde{U} \neq \phi$. Περιοριζόμαστε στή κοινή τους περιοχή. Οἱ g_{ab} καί ∇_a δέν ἐξαρτῶνται ἀπό τούς χάρτες ἐνῶ ὅλα τά ἄλλα, $\overset{\phi}{\nabla}_a$, $[C^a_{bc}]^i_{jk}$, $\overset{\tilde{\phi}}{\nabla}_a$ = "μερικές παράγωγοι συνιστωσῶν ὡς πρός τόν καινούργιο χάρτη", $[\tilde{C}^a_{bc}]^{\tilde{i}}_{\tilde{j}\tilde{k}} = \tilde{\Gamma}^i_{jk}$ = σύμβολα Christoffel ὡς πρός τόν $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$, ἐξαρτῶνται. Προφανῶς τά $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ δέν εἶναι ἁπλῶς οἱ συνιστῶσες τοῦ C^a_{bc} στόν καινούργιο χάρτη γιατί οἱ τελεστές $\overset{\phi}{\nabla}_a$ καί $\overset{\tilde{\phi}}{\nabla}_a$ εἶναι ἐν γένει διάφοροι. Συνήθως ἀναφέρεται ὅτι "τά σύμβολα τοῦ Christoffel δέν μετασχηματίζονται σάν συνιστῶσες τανυστῆ". Ὁ μετασχηματισμός τους ὅμως βρίσκεται ἀπό τίς συνιστῶσες τῆς σχέσεως (5).

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\alpha}\right)\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^j}\right)\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^k}\right)+\left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{x}^k}\right)\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\mu}\right). \quad (6)$$

Ὁ μηδενισμός τοῦ τελευταίου ὅρου $\left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{x}^k}\right)\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\mu}\right)$ δίνει τήν ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ὥστε οἱ τελεστές παραγωγίσεως πού ὁρίζονται ὅπως στό παράδειγμα τῆς σελίδας 90 νά συμπίπτουν. Π.χ., ὅταν οἱ σχέσεις τῶν συντεταγμένων εἶναι γραμμικές, οἱ δύο τελεστές εἶναι οἱ ἴδιοι.

Παρατήρηση 1η: Ἔστω τυχόν τανυστικό πεδίο T_{bcd} καί τυχόν τελεστής ∇_a. Θέτουμε $M_{abcd} = \nabla_a T_{bcd}$. Ποιό εἶναι τό τανυστικό πεδίο $M_a{}^b{}_{cd}$; Ἐάν πρῶτα παραγωγίσαμε καί μετά ἀνεβάσαμε τόν δείκτη εἶναι $M_a{}^b{}_{cd} = g^{bm} \nabla_a T_{mcd}$. Ἐάν ὅμως πρῶτα ἀνεβάσαμε τόν δείκτη καί μετά παραγωγίσαμε εἶναι τό

$$M_a{}^b{}_{cd} = \nabla_a (g^{bm} T_{mcd}) = g^{bm} \nabla_a T_{mcd} + (\nabla_a g^{bm}) T_{mcd}.$$

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι ὁ συμβολισμός πού καθιερώσαμε στήν ἀρχή τῆς ἑνότητας γίνεται διφορούμενος ὅταν ὑπεισέρχονται καί παραγωγίσεις. Δέν εἶναι διφορούμενος μόνον ὅταν $\nabla_a g^{bm} = 0$, δηλ. ὅταν χρησιμοποιοῦμε τόν τελεστή τόν συμβιβαστό μέ τόν μετρικό τανυστή! Ἐκτός κι ἄν ἀναφέρουμε τό ἀντίθετο, ἀπ' ἐδῶ κι ἐμπρός πάντα σέ πολλαπλότητες μέ μετρικό τανυστή θά χρησιμοποιοῦμε τόν τελεστή παραγωγίσεως πού εἶναι συμβιβαστός μέ τόν μετρικό τανυστή.

Παρατήρηση 2η: Ἡ ἐλευθερία στήν ἐπιλογή ἑνός τελεστῆ παραγωγίσεως εἶναι ἡ ἐλευθερία τῶν C^a_{bc}. Ἡ συνθήκη πού ἐπιβάλαμε εἶναι ἡ $\nabla_a g_{bc} = 0$. Τά C^a_{bc} καί $\nabla_a g_{bc}$ ἔχουν τήν "ἴδια δομή δεικτῶν", τρεῖς δείκτες, συμμετρικά ὡς πρός τούς δύο. Αὐτό ἦταν καλή ἔνδειξη ὅτι θά καταφέρουμε νά βροῦμε τόν ∇_a ὥστε $\nabla_a g_{bc} = 0$. Πρακτικά, εἴχαμε $\frac{n^2(n+1)}{2}$ βαθμούς ἐλευθερίας καί $\frac{n^2(n+1)}{2}$ συνθῆκες νά ἐπιβάλουμε.

Παρατήρηση 3η: Ἔχει ἀποδειχθεῖ (δύσκολο!) ὅτι ἐάν ἡ πολλαπλότητα δέχεται (globally) μετρικό τανυστή τότε εἶναι παρασυμπαγής. Ἔτσι, ἡ συνθήκη "παρασυμπαγής" στό θεώρημα δέν χρειάζεται.

Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας με διαγράμματα.

Βασίλης Ξανθόπουλος
Φυσικό Τμήμα Πανεπιστημίου Κρήτης.

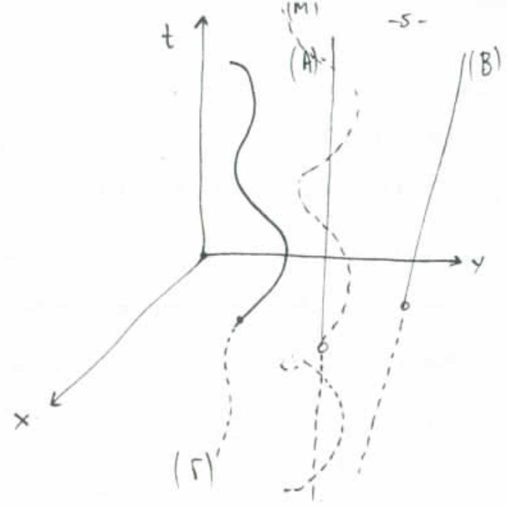
Οι παρούσες φοιτητικές σημειώσεις αποτελούν συμπλήρωμα στο βιβλίο του A.P. French "Ειδική Θεωρία Σχετικότητας" και γράφτηκαν για τις ανάγκες του μαθήματος "Ειδικά Θέματα Φυσικής ΙΙ".

Απρίλης 1984.

1. Μέτρηση μήκους.

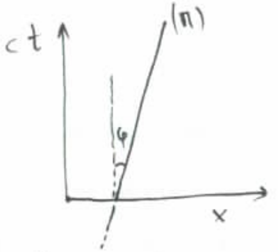
Τί πρέπει να κάνουμε για να προσδιορίσουμε το μήκος μιάς ράβδου; Προφανώς, πρέπει να μετρήσουμε τις συντεταγμένες της αρχής και του τέλους της ράβδου (για ευκολία υποθέτουμε ότι η ράβδος κείται κατά μήκος του άξονα των x) και να τις αφαιρέσουμε, $\ell = x_2 - x_1$. Κι άν η ράβδος κινείται; Τότε προφανώς θα πρέπει να προσδιορίσουμε τη συντεταγμένη του τέλους της $x_2(t_0)$ κάποια χρονική στιγμή, τη συντεταγμένη της αρχής της $x_1(t_0)$ την ίδια χρονική στιγμή και να τις αφαιρέσουμε, $\ell = x_2(t_0) - x_1(t_0)$. Αν δεν είμαστε προσεκτικοί ώστε οι μετρήσεις των συντεταγμένων της αρχής και του τέλους της ράβδου να γίνουν ταυτόχρονα, το εξαγόμενο της μέτρησής μας δεν θα έχει καμμία σχέση με το μήκος της ράβδου.

Το συμπέρασμα από τα παραπάνω είναι ότι κάθε μέτρηση μήκους προϋποθέτει την έννοια του ταυτόχρονου, δηλαδή τη γνώση του συνόλου των γεγονότων που συμβαίνουν ταυτόχρονα με κάποιο συγκεκριμένο γεγονός. Φυσικά, η οποιαδήποτε έννοια του ταυτόχρονου – όπως και κάθε έννοια της φυσικής – θα πρέπει να μπορεί να ελεγχθεί με κάποιο, τουλάχιστον κατ' αρχήν πραγματοποιήσιμο, πείραμα. Η έννοια του ταυτόχρονου, όπως και οι περισσότερες έννοιες της θεωρίας της Σχετικότητας, περιγράφονται καλύτερα με διαγράμματα χωρόχρονου, που τα πραγματευόμαστε αμέσως παρακάτω.



(Σχ. 1)

προς τη διεύθυνση του άξονα των y παρίσταται με την κεκλιμένη ευθεία (Β) του διπλανού σχήματος. Ένας παρατηρητής που κινείται μπρός και πίσω με μεταβαλλόμενη ταχύτητα παρίσταται, π.χ., από την καμπύλη (Γ) ενώ μία μύγα που στριφογυρίζει γύρω από το κεφάλι του ακίνητου Α παρίσταται με την ελικοειδή (διακεκομμένη) γραμμή (Μ). Οι καμπύλες που παριστάνουν σημειακούς παρατηρητές ή αντικείμενα σ' ένα διάγραμμα χωρόχρονου αναφέρονται σαν οι <u>κοσμικές</u> τους <u>γραμμές</u>.



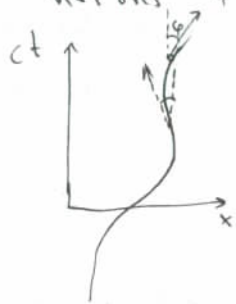
(Σχ. 2)

Η κλίση της κοσμικής γραμμής ενός παρατηρητή ως προς τον άξονα των t προσδιορίζει αμέσως την ταχύτητά του. Για έναν παρατηρητή που κινείται με σταθερή ταχύτητα (συνεπώς η κοσμική του γραμμή είναι ευθεία) διαλέγουμε

κατάλληλα τις μονάδες στους άξονες του χώρου και του χρόνου ώστε να ισχύει

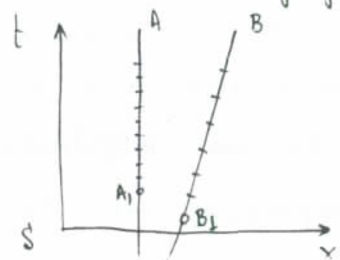
$$\tan\varphi = \frac{v}{c}.$$

Αυτό μπορεί να εκφρασθεί και με τη χρήση στον άξονα των χρόνων ως μονάδας της μονάδας μήκους ct, όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός. Εφ' όσον $\tan 45^\circ = 1$, κίνηση με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός εκφράζεται με κοσμική γραμμή κλίσης 45°.



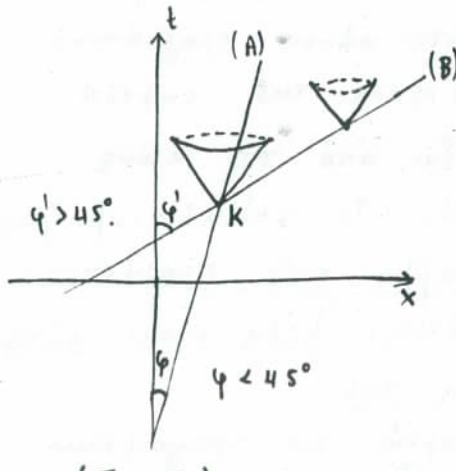
Για παρατηρητή μεταβλητής ταχύτητας, η στιγμιαία του ταχύτητα μπορεί να προσδιορισθεί στο διάγραμμα χωρόχρονου από την κλίση της εφαπτόμενης της κοσμικής του γραμμής ως προς τον άξονα των χρόνων.

Η κοσμική γραμμή ενός παρατηρητή εκφράζει την κίνησή του μέσα στο χρόνο. Έτσι, το μήκος της κοσμικής του γραμμής από κάποιο σημείο της και πέρα εκφράζει και μετρά το χρόνο που αισθάνεται ο παρατηρητής αυτός ότι πέρασε από το γεγονός αυτό της ζωής του και πέρα.



Θα κάνουμε δύο παρατηρήσεις σ' αυτό το σημείο. Πρώτον, όπως κώνοι φωτός; Εφ' όσον η μετάπτωση διάδοση του φωτός είναι ανεξάρτητη από την κινητική κατάσταση της πηγής, και στους δύο παρατηρητές αντιστοιχεί ο ίδιος κώνος φωτός για το γεγονός O. Καταλήγουμε λοιπόν στο πολύ σημαντικό συμπέρασμα ότι οι κώνοι φωτός σε κάθε σημείο του χωρόχρονου είναι κοινοί για όλους τους παρατηρητές που περνούν από το σημείο αυτό, ότι δηλαδή αντιστοιχεί ακριβώς ένας κώνος φωτός σε κάθε σημείο του χωρόχρονου, που χαρακτηρίζει τον χωρόχρονο και όχι τους διάφορους παρατηρητές που πιθανόν περνούν από το γεγονός αυτό. Μ' αυτόν τον πολύ απλό γεωμετρικό τρόπο – την αντιστοιχία ενός κώνου φωτός σε κάθε σημείο του χωρόχρονου – εκφράζουμε την βασική αρχή της φυσικής – που τίθεται σαν αξίωμα στη σχετικότητα – ότι η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερή και ανεξάρτητη από την κινητική κατάσταση της πηγής που το εξέπεμψε.

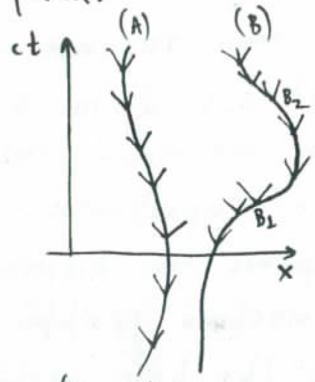
Θα εκφράσουμε τώρα παραστατικά την άλλη θεμελιώδη αρχή της σχετικότητας, το ότι δηλαδή τίποτα δεν μπορεί να κινηθεί πιό γρήγορα από το φώς. Προφανώς, από τους αδρανειακούς παρατηρητές A και B που περνούν



(Σχ. 4)

από το K, ο A κινείται με ταχύτητα μικρότερη και ο B με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός, εφόσον οι κοσμικές τους γραμμές έχουν κλίσεις ως προς τον άξονα του χρόνου μικρότερη και μεγαλύτερη από 45° αντίστοιχα.

Έτσι η κοσμική γραμμή του A βρίσκεται μέσα στον κώνο φωτός κάθε γεγονότος του παρατηρητή ενώ η κοσμική γραμμή του B είναι πάντοτε έξω από τον κώνο φωτός. Αμέσως λοιπόν μπορούμε να πούμε, κυττάζοντας το σχήμα 4, ότι ο B δεν μπορεί να παριστάνει κάποιο πραγματικό παρατηρητή, εφόσον η κοσμική του γραμμή βρίσκεται έξω από τον κώνο φωτός σε κάποιο γεγονός του παρατηρητή.



(Σχ. 5)

Πιό γενικά, εφόσον η στιγμιαία ταχύτητα ενός παρατηρητή δίνεται από την κλίση της εφαπτομένης της κοσμικής του γραμμής ως προς τον άξονα του χρόνου, διαπιστώνουμε αμέσως από το σχήμα 5 ότι η κοσμική γραμμή χρόνια αργότερα γίνει (όχι δούμε) μιά έκρηξη στο γαλαξία της Ανδρομέδας (η απόσταση μεταξύ των δύο γαλαξιών είναι 2 εκατομμύρια έτη φωτός) είμαστε σίγουροι ότι οι δύο εκρήξεις είναι ανεξάρτητες και ασυσχέτιστες μεταξύ τους, γιατί κανένα από τα αποτελέσματα της έκρηξης του δικού μας Γαλαξία (ούτε και το ότι συνέβη) δεν έγιναν γνωστά στο Γαλαξία της Ανδρομέδας πριν περάσουν δύο εκατομμύρια χρόνια.

Παρόμοια, το γεγονός Γ στο σχήμα 6 μπορεί να έχει επηρεάσει το Λ ενώ το Δ δεν μπορεί με κανένα τρόπο να το έχει επηρεάσει. Τα Λ και Γ έχουν χρονοειδή συσχέτιση και τα Λ και Δ χωροειδή συσχέτιση. Στο σχήμα 6 οι δύο γραμμοσκιασμένες περιοχές (κατάλληλα επεκτεταμένες) παριστάνουν την περιοχή επηρεασμού (domain of influence) του γεγονότος Κ και την περιοχή εξάρτησης (domain of dependence) του γεγονότος Λ.

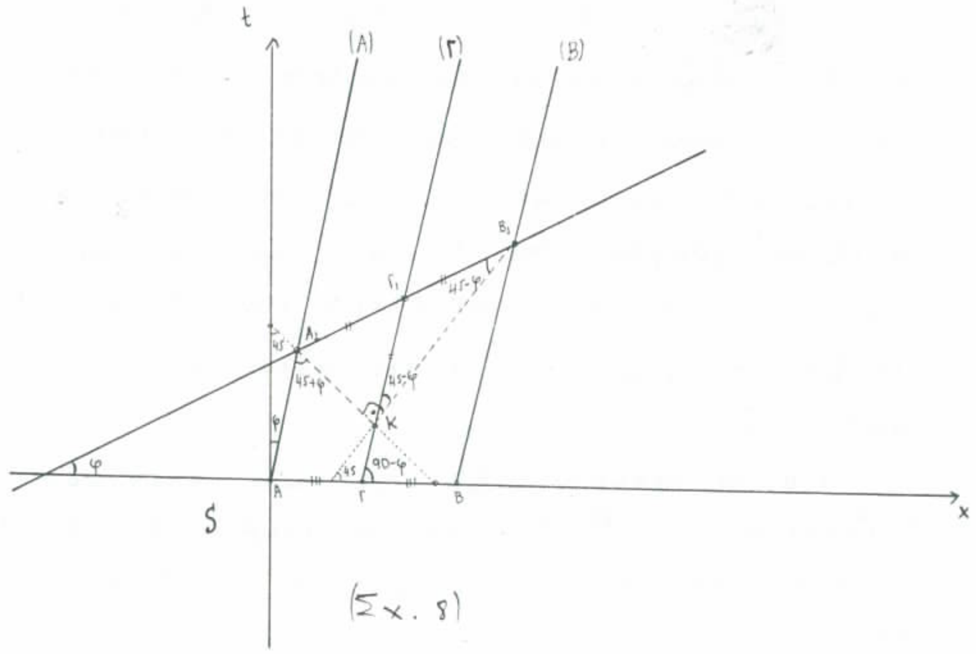
4. Ο χώρος

Από την κατασκευή του διαγράμματος Minkowski είναι φανερό ότι ο χώρος θα πρέπει να είναι κάποιο υποσύνολο του χωρόχρονου. Ποιό όμως; Και είναι μόνον ένα, ή πολλά; Ας σκεφτούμε πιό προσεκτικά. Ο χωρόχρονος απαρτίζεται από όλα τα γεγονότα που συμβαίνουν οποτεδήποτε, σ' όλα τα σημεία του σύμπαντος. Περιμένουμε λοιπόν ότι ο χωρόχρονος θα είναι η ένωση ενός άπειρου πλήθους τρισδιάστατων υποσυνόλων του, ομοίων μεταξύ τους, που το καθένα θα είναι ένα αντίτυπο του χώρου. Φανταστείτε, για μιά παρομοίωση, ένα χοντρό βιβλίο που παρομοιάζεται με τον χωρόχρονο, με τον χρόνο να μεταβάλλεται κατά τη διεύθυνση του πάχους του βιβλίου. Τα διάφορα φύλλα του βιβλίου μπορούν τότε να παρομοιαστούν με τα διαδοχικά αντίτυπα του χώρου, ένα για κάθε χρονική στιγμή, που καθορίζεται από τον αριθμό του φύλλου.

Το συμπέρασμα από τους παραπάνω συλλογισμούς είναι ότι για να προσδιορίσουμε τον χώρο μέσα στον χωρόχρονο θα πρέπει να διαλέξουμε ένα γεγονός Α, που συμβαίνει κάποια χρονική στιγμή t_0, και κατόπιν να βρούμε το σύνολο των γεγονότων του χωρόχρονου που συμβαίνουν ταυτόχρονα με το Α: όλα αυτά τα γεγονότα αποτελούν τον χώρο τη

Επαναλαμβάνοντας την κατασκευή του σχήματος 7 και για άλλους παρατηρητές, προσδιορίζουμε το σύνολο των γεγονότων που είναι ταυτόχρονα με το γεγονός A_1, όπως το αισθάνεται ο παρατηρητής (A). Το σύνολο αυτό αποτελεί τον χώρο του παρατηρητή (A) τη χρονική στιγμή A_1. Στο δισδιάστατο χωρόχρονο του σχήματος 7 ο χώρος αυτός παριστάνεται από την ευθεία A_1B_1, που είναι παράλληλη προς τον άξονα των x. Διαπιστώνουμε ότι η διαδικασία της σελίδας 15 (με τη βοήθεια των φωτεινών σημάτων) δίνει το αποτέλεσμα που περιμένουμε για το τί είναι ο χώρος μέσα στον χωρόχρονο.

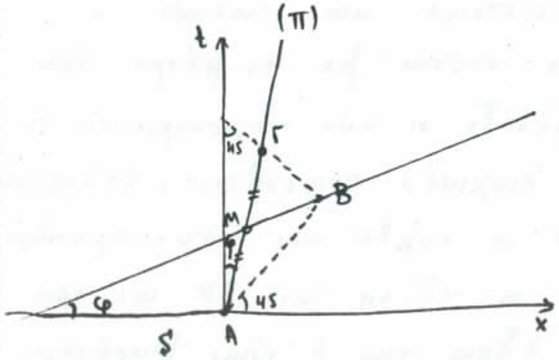
Επαναλαμβάνουμε τώρα την προηγούμενη κατασκευή για τους δύο παρατηρητές (A) και (B) του σχήματος 8. Οι (A) και (B) είναι ακίνητοι ο ένας ως προς τον άλλον αλλά περιγράφονται σ' ένα σύστημα συντεταγμένων S ως προς το οποίο κινούνται με ταχύτητα v, που προσδιορίζεται από τη γωνία φ του σχήματος, $\tan\varphi = v/c$. Οι (A) και (B) είναι αδρανειακοί παρατηρητές. Συνεπώς δεν αισθάνονται ότι κινούνται, ούτε και είναι διατεθειμένοι να το αναγνωρίσουν. Είναι λογικό λοιπόν να επαναλάβουν τη διαδικασία του σχήματος 7 για να συγχρονίσουν τα ωρολόγια τους. Βρίσκουν τον (Γ), ακίνητο ως προς αυτούς, μεταξύ τους, και σε ίση απόσταση από τους (A) και (B), ο



(Σχ. 8)

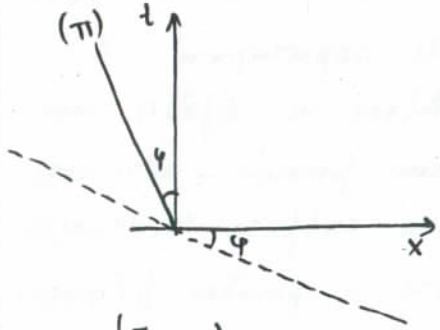
οποίος και στέλνει στο γεγονός K τα φωτεινά σήματα KA_1 και KB_1. Συνεπώς, ο (A) βρίσκει ότι τα γεγονότα A_1 και B_1 είναι ταυτόχρονα.

Θα μελετήσουμε τώρα τη γεωμετρία του σχήματος 8. Το ότι οι (A), (B) και (Γ) δεν κινούνται προς αλλήλους σημαίνει ότι οι AA_1, $\Gamma\Gamma_1$ και BB_1 είναι παράλληλες, ενώ το ότι ο (Γ) ισαπέχει από τους (A) και (B) σημαίνει ότι $A\Gamma = \Gamma B$, άρα και $A_1\Gamma_1 = \Gamma_1 B_1$. Τέλος το ότι η επικοινωνία έγινε με φωτεινά σήματα σημαίνει ότι οι KA_1 και KB_1 σχηματίζουν γωνίες 45° ως προς τους άξονες των x και t και συνεπώς εξαρτώμενος από τον συγκεκριμένο παρατηρητή.



(Σχ. 10)

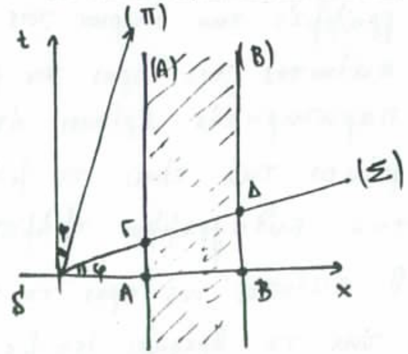
Το σχήμα 10 περιγράφει ένα λίγο διαφορετικό συλλογισμό για τον προσδιορισμό του χώρου του κινούμενου ως προς το S παρατηρητή (Π). Στο γεγονός Α στέλνει ένα φωτεινό σήμα που ανακλάται στο Β και γυρίζει στον (Π) στο Γ. Εάν Μ είναι το μέσον της ΑΓ, ο (Π) θεωρεί ότι τα Μ και Β είναι ταυτόχρονα. Εύκολα πάλι προσδιορίζεται ότι η κλίση της ΜΒ (τον χώρου του (Π) τη χρονική στιγμή Μ) ως προς τον άξονα των x είναι πάλι φ.



(Σχ. 11)

Τέλος σημειώνουμε ότι ο παρατηρητής (Π) του σχήματος 11, που κινείται προς τα αρνητικά του x, αισθάνεται σαν χώρο του διευθύνσεις που έχουν κλίση $-φ$ ως προς τον άξονα των x.

5. Το μήκος δεν είναι απόλυτο.



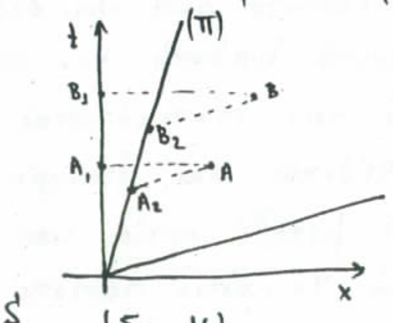
(Σχ. 12)

Θεωρούμε μιά ράβδο που στο διάγραμμα του σχήματος 12 παριστάνεται από τη διδιάστατη γραμμοσκιασμένη επιφάνεια. (Α) και (Β) είναι οι κοσμικές γραμμές της αρχής και του τέλους της αντίστοιχα. Η ράβδος είναι ακίνητη στο σύστημα S. Ένας παρατηρητής επί της ράβδου (συνεπώς ακίνητος ως προς το S) έχει κοσμική γραμμή παράλληλη προς τις (Α) και (Β), αισθάνεται ως χώρο διευθύνσεις παράλληλες προς τον άξονα των x, και βρίσκει ότι το μήκος της ράβδου είναι ίσο με το μέτρο του διαστήματος ΑΒ. Αντιθέτως, ένας κινούμενος ως προς το S (και τη ράβδο) παρατηρητής (Π) αισθάνεται σαν χώρο κατά τη διεύθυνση (Σ), βρίσκει ότι τα Γ και Δ είναι δύο ταυτόχρονα γεγονότα στα δύο άκρα της ράβδου, και διακηρύσσει ότι το μήκος της ράβδου είναι το μέτρο του διαστήματος ΓΔ. Προφανώς, οι δύο παρατηρητές, που βρίσκονται σε σχετική κίνηση, βρίσκουν το μήκος της ράβδου διαφορετικό.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η ράβδος κινείται ως προς το S (Σχήμα 13). (Α) και (Β)

6. Ο χρόνος δεν είναι απόλυτος

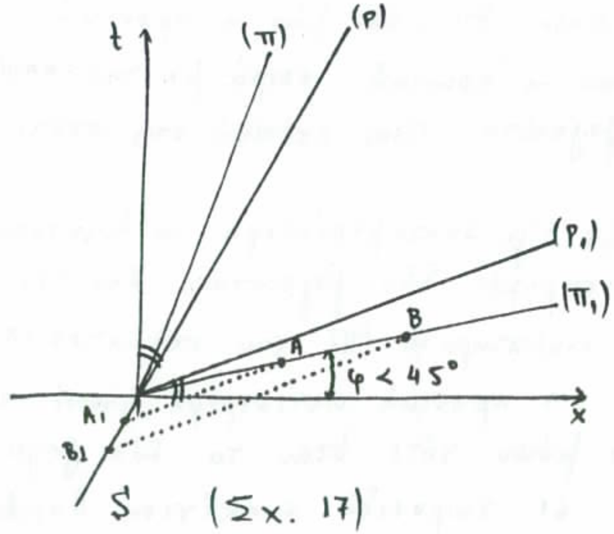
Θεωρούμε τα γεγονότα Α και Β του σχήματος 16. Πόσο απέχουν χρονικά μεταξύ τους; Ο παρατηρητής του συστήματος S' θεωρεί ότι τα Α και Β είναι ταυτόχρονα με τα γεγονότα A_1 και B_1 αντίστοιχα και συνεπώς βρίσκει ότι η χρονική διάρκεια μεταξύ των Α και Β ισούται με το μέτρο του A_1B_1.



(Σχ. 16)

Ο παρατηρητής (Π) απεναντίας βρίσκει ότι τα Α και Β είναι ταυτόχρονα με τα γεγονότα A_2 και B_2 αντίστοιχα και κατ' αυτόν η χρονική διάρκεια μεταξύ των Α και Β ισούται με το μέτρο του A_2B_2. Δεν παραξενευόμαστε καθόλου που οι δύο παρατηρητές βρίσκουν διαφορετικά αποτελέσματα. Συνεπώς, η χρονική διάρκεια μεταξύ δύο γεγονότων εξαρτάται από τον παρατηρητή που κάνει τη μέτρηση, δηλαδή και ο χρόνος δεν είναι απόλυτος στη σχετικότητα. Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη ενότητα, αποφεύγουμε να συγκρίνουμε τις δύο χρονικές διάρκειες (A_1B_1) και (A_2B_2) γιατί η μονάδα μέτρησης του χρόνου δεν είναι η ίδια για τους δύο παρατηρητές.

Θεωρούμε τώρα τα γεγονότα Α και Β του σχήματος 17, που βρίσκονται σε χωροειδή συσχέτιση (η γωνία φ μεταξύ της ΑΒ και του άξονα των x είναι μικρότερη των 45°).



(Σχ. 17)

Προφανώς κάθε παρατηρητής ακίνητος ως προς το σύστημα S' βλέπει ότι το Α προηγείται του Β χρονικά. Τί βλέπει ο παρατηρητής (Π) που κινείται με τέτοια ταχύτητα ως προς το S' ώστε η κοσμική του γραμμή να σχηματίζει με τον άξονα των t γωνία ίση με τη γωνία φ που σχηματίζει η ΑΒ με τον άξονα των x; Προφανώς βλέπει ότι τα Α και Β συμβαίνουν ταυτόχρονα, σε διαφορετικά όμως σημεία του χώρου. Και τί αισθάνεται ο (P) που κινείται πιό γρήγορα κι από τον (Π) ως προς το S'; Αυτός βρίσκει ότι τα Α και Β συμβαίνουν ταυτόχρονα με τα γεγονότα A_1 και B_1 αντίστοιχα της κοσμικής του γραμμής και συνεπώς επιμένει ότι το γεγονός Β προηγείται χρονικά του γεγονότος Α!

οι τομές τους με τους άξονες x', t' δίνουν τις συντεταγμένες (x', t') του P στο καινούργιο αδρανειακό σύστημα.

Οι μετασχηματισμοί Lorentz δίνουν τις σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων κάποιου γεγονότος σε δύο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα. Για κάθε γεγονός αρκεί να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες του σ' ένα μόνο σύστημα και κατόπιν, με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Lorentz, μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες του σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα. Το πρόγραμμα, ή ο κώδικας, που κάνει αυτή τη δουλειά είναι οι μετασχηματισμοί Lorentz.

Η μέθοδος εύρεσης των μετασχηματισμών Lorentz εκτίθεται σε κάθε βιβλίο ειδικής θεωρίας σχετικότητας. Εδώ απλώς θα τους αναφέρουμε. Είναι οι

$$(1)\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow (2)\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{cases}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

όταν το S' κινείται ως προς το S με ταχύτητα v κατά τη διεύθυνση x. Σημειώστε ότι οι (2) προκύπτουν από τις (1) λύνοντάς τες ως προς x, y, z, t και ότι το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν θέσουμε στις σχέσεις (1) όπου v το $-v$. Αυτή η πράξη αποτελεί έναν έλεγχο αυτοσυμβιβαστότητας των μετασχηματισμών Lorentz.

8. Μονάδες μήκους και χρόνου.

Θεωρούμε δύο γεγονότα A και B με συντεταγμένες (x_i, y_i, z_i, t_i), $i = 1, 2$ στο σύστημα S. Σ' ένα άλλο σύστημα S', που κινείται ως προς το S με ταχύτητα v κατά τον άξονα των x, οι συντεταγμένες τους είναι (x_i', y_i', z_i', t_i'), όπου οι τονούμενες συντεταγμένες εκφράζονται συναρτήσει των άτονων με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Lorentz. Χρησιμοποιώντας τους βρίσκουμε ότι $x_2' - x_1' = \gamma\left[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)\right]$,

$y_2' - y_1' = y_2 - y_1$, $z_2' - z_1' = z_2 - z_1$ και

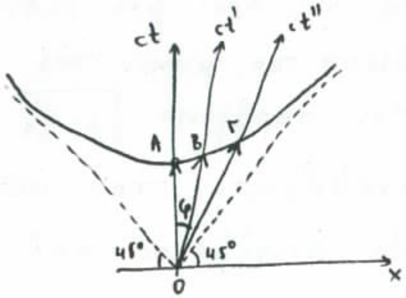
$t_2' - t_1' = \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right]$, και μετά από πράξεις ότι

$$\left.\begin{aligned} &(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 = \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, αν και δύο τυχαίοι αδρανειακοί παρατηρητές (ισοδύναμα, δύο τυχαία συστήματα συντεταγμένων) βρίσκουν διαφορετική τη χωρική $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ και τη χρονική $t_2 - t_1$ απόσταση μεταξύ δύο τυχαίων γεγονότων, βρίσκουν την ίδια χωροχρονική (τετραδιάστατη) απόσταση

$$\begin{aligned} s^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = \\ &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

δηλαδή την άπειρη μονάδα μήκους των φωτονίων.



(Σχ. 21.)

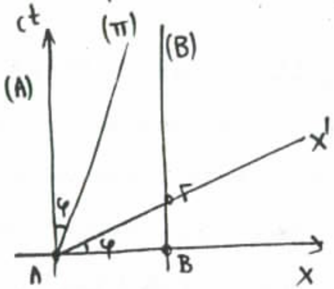
Για να προσδιορίσουμε τη μονάδα χρόνου των διάφορων παρατηρητών θεωρούμε την υπερβολή $x^2 - c^2t^2 = -1 = (x')^2 - (ct')^2 = (x'')^2 - (ct'')^2$, που για $x = x' = x'' = 0$ δίνει $ct = ct' = ct'' = 1$. Για τους διάφορους παρατηρητές του σχήματος 21 λοιπόν οι μονάδες χρόνου (που μπορούν να μετρηθούν ισοδύναμα και με μήκος μέσω της αντιστοιχίας $t \leftrightarrow ct$) είναι οι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ. Προφανώς, η μονάδα χρόνου για κίνηση με την ταχύτητα του φωτός (οπότε η κοσμική γραμμή είναι ασύμπτωτη της υπερβολής) είναι άπειρη και γι' αυτό τα φωτόνια δεν αισθάνονται το πέρασμα του χρόνου: Τα φωτόνια δεν γεράζουν! Όπως και προηγουμένως, εύκολα βρίσκουμε ότι

$$ct_1' = OB = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\phi}} = \sqrt{\frac{1+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}}.$$

9. Συστολή του μήκους

Στην ενότητα αυτή θα προσδιορίσουμε τις ποσοτικές σχέσεις μεταβολής του μήκους με την ταχύτητα.

Θεωρούμε μιά ράβδο και παριστάνουμε με l_0 το μήκος της, όπως αυτό το μετρά ο παρατηρητής που είναι ακίνητος ως προς τη ράβδο: Ισοδύναμα, l_0 είναι το μήκος της ράβδου όπως αυτό μετριέται σ' ένα σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο η ράβδος είναι ακίνητη. Θα υπολογίσουμε το μήκος l' που βρίσκει για την ίδια ράβδο ένας παρατηρητής που κινείται ως προς αυτήν με ταχύτητα v.



(Σχ. 22)

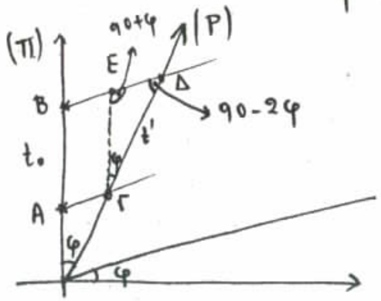
Θεωρούμε πρώτα την ράβδο ακίνητη και τον παρατηρητή κινούμενο. Το l_0 είναι το μέτρο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και επειδή η μονάδα μήκους κατά τη διεύθυνση x είναι 1 έχουμε $(AB) = l_0$.

Ο παρατηρητής (Π) αντιθέτως (Σχήμα 22) βρίσκει ότι το μήκος της ράβδου είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ (αφού τα Α και Γ είναι δύο ταυτόχρονα γεγονότα στα δύο άκρα της ράβδου) και επειδή η μονάδα μήκους κατά τον άξονα x' είναι $1/\sqrt{\cos 2\phi}$ βρίσκει ότι βρίσκει ότι τα γεγονότα Α και Β είναι ταυτόχρονα, αντίστοιχα, με τα γεγονότα Γ και Δ της κοσμικής του γραμμής και συνεπώς η χρονική τους διάρκεια είναι $t' =$ μέτρο του $ΓΔ = ΓΔ/1 = (ΓΔ)$. Από τη σχέση $(ΓΔ) = (ΑΒ)\cos\phi$ βρίσκουμε ότι

$$t' = t_0 \frac{\cos\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}} = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma t_0 , \quad (8)$$

δηλαδή ότι $t' > t_0$ (αν και στο σχήμα 24 φαίνεται ότι $ΓΔ < ΑΒ$).

Ο προτιμητέος αδρανειακός παρατηρητής (Π) του σχήματος 24 έχει κάθε δικαίωμα να θεωρήσει τον εαυτό του ακίνητο και να θεσπίσει το δικό του σύστημα συντεταγμένων. Στη διάταξη του σχήματος 25 έχουμε ότι $t_0 = (AB)/1 = (AB)$.



(Σχ. 25)

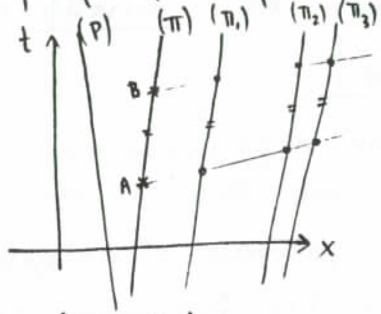
Ο παρατηρητής (Ρ) που κινείται ως προς τον (Π) βλέπει ότι τα γεγονότα Α και Β είναι ταυτόχρονα με τα γεγονότα Γ και Δ, αντίστοιχα, της κοσμικής του γραμμής. Συνεπώς βρίσκει ότι $t' = (ΓΔ) \big/ {}^{1}/\sqrt{\cos 2\phi} = (ΓΔ)\sqrt{\cos 2\phi}$. Ο νόμος των ημιτόνων στο τρί-

γωνο ΓΕΔ δίνει $\dfrac{(ΓΕ)}{\sin(90-2\phi)} = \dfrac{(ΓΔ)}{\sin(90+\phi)}$ ή $\dfrac{AB}{\cos 2\phi} = \dfrac{ΓΔ}{\cos\phi}$, η οποία συνδυαζόμενη και με τις προηγούμενες σχέσεις δίνει ότι

$$t' = t_0 \frac{\cos\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}} = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma t_0 ,$$

δηλαδή την ίδια σχέση, όπως και προηγουμένως.

Συνεπώς, απ' όλους τους δυνατούς αδρανειακούς παρατηρητές, εκείνος που βλέπει ότι δύο γεγονότα έγιναν στην άμεση γειτονιά του βρίσκει και τη μικρότερη χρονική απόσταση μεταξύ αυτών.



(Σχ. 26)

Ας υποθέσουμε ότι τα Α και Β είναι δύο διαδοχικά τικ και τακ ενός ρολογιού που κουβαλά ο παρατηρητής (Π). Θεωρούμε και μερικούς άλλους αδρανειακούς παρατηρητές $(Π_1), (Π_2), (Π_3)$, όλους ακίνητους ως προς τον Π. Όλοι αυτοί βλέπουν το ρολόι να παραμένει ακίνητο και όλοι μετρούν την ίδια χρονική διάρκεια t_0 ανάμεσα στα Α και Β, που είναι η μία μονάδα χρόνου, $t_0 = 1$ (ας πούμε ένα δευτερόλεπτο).

Ο παρατηρητής (Ρ) του σχήματος 26 που κινεί-