ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Βασίλης Ξανθόπουλος

1. Ἡ Συνεφαπτόμενη Δέσμη

Ἄς εἶναι M μία C^∞ πολλαπλότητα διαστάσεως n καί q σημεῖο τῆς M. Θεωροῦμε τόν ἐφαπτόμενο χῶρο T_q τῆς M στό q καί τόν δυϊκό του διανυσματικό χῶρο T_q^*, πού ὀνομάζεται καί ὁ συνεφαπτόμενος χῶρος τῆς M στό q. Σάν σύνολο ἡ συνεφαπτόμενη δέσμη εἶναι ἡ ἕνωση ὅλων τῶν συνεφαπτόμενων χώρων σ' ὅλα τά σημεῖα τῆς πολλαπλότητας: $T_a M = \bigcup_{q \in M} T_q^*$. Τά στοιχεῖα λοιπόν τῆς TaM εἶναι τῆς μορφῆς (q, p_a), ὅπου $p_a \in T_q^*$ εἶναι ἕνα συναλλοίωτο διάνυσμα στό σημεῖο $q \in M$.

Θά ὀργανώσουμε τό σύνολο TaM σέ μία C^∞ πολλαπλότητα $2n$ διαστάσεων.

Ἄς εἶναι (U, φ) χάρτης τῆς πολλαπλότητας M ὁ ὁποῖος καθορίζει συντεταγμένες $\{q^i,\ i = 1, 2, \dots n\}$ στά σημεῖα q τῆς περιοχῆς $U \subset M$. Ἄς εἶναι $\{(\partial/\partial q^i)^a,\ i = 1, 2, \dots n\}$ ἡ ἀντίστοιχη βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου T_q καί $\{\nabla_a q^i,\ i = 1, \dots n\}$ ἡ δυϊκή βάση τοῦ δυϊκοῦ χώρου T_q^*, $\forall q \in U$, ὅπου ∇_a εἶναι τυχαῖος τελεστής παραγωγίσεως τῆς M. (Ἐπειδή

$$\nabla_a q^i = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} (dq^j)_a = \delta_{ij} (dq^j)_a = (dq^i)_a ,$$

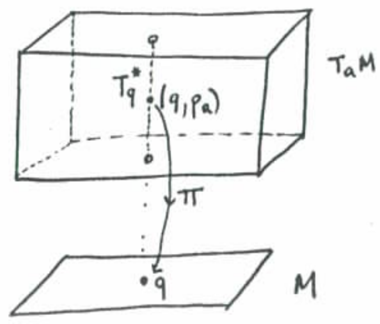
τά διανύσματα τῆς βάσεως τοῦ T_q^* πολλές φορές παριστάνονται καί σάν τά διαφορικά τῶν συντεταγμένων). Συμβολίζουμε μέ p_i τίς συνιστῶσες τοῦ συνεφαπτόμενου διανύσματος p_a ὡς πρός τή δυϊκή βάση:

$$p_a = p_i (\nabla_a q^i).$$

Κατασκευάζουμε τό ζεῦγος (V, Φ), ὅπου $V = \bigcup_{q \in U} T_q^*$ καί

$$\Phi : V \ni (q, p_a) \longrightarrow \Phi(q, p_a) = (q^1, \dots q^n, p_1, \dots p_n) \in \mathbb{R}^{2n},$$

πού προφανῶς ἀποτελεῖ ἕνα $2n$-χάρτη τοῦ TaM. Ἐπαναλαμβάνοντας τή κατασκευή γιά κάθε χάρτη τῆς M παίρνομε ἕνα σύνολο χαρτῶν τοῦ TaM πού εὔκολα ἀποδεικνύεται πώς τό καλύπτουν καί πώς εἶναι C^∞ συμβιβασμοί. Προκύπτει λοιπόν μία C^∞ πολλαπλότητα $2n$ διαστάσεων πού ὀνομάζεται ἡ <u>συνεφαπτόμενη δέσμη</u> (cotagent bundle) τῆς M καί συμβολίζεται μέ TaM.



Σχῆμα 1.

Ὑπάρχει μία προτιμητέα ἀπεικόνιση ἀπό τήν TaM στή M, ἡ ἀπεικόνιση πού ξεχνᾶ τό συνεφαπτόμενο διάνυσμα καί θυμᾶται μόνο τό σημεῖο τῆς πολλαπλότητας M ἀπό τό ὁποῖο προέκυψε:

$$\pi : T_a M \ni (q, p_a) \to \pi(q, p_a) = q \in M.$$

Ἡ π λέγεται ἡ προβολή τῆς TaM στήν M καί πολύ παραστατικά περιγράφεται στό σχῆμα 1. Εὔκολα ἀποδεικνύεται (Ἄσκηση) ὅτι ἡ προβολή π : TaM → M εἶναι λεία ἀπεικόνιση.

Ἡ συνεφαπτόμενη δέσμη εἶναι ἕνα παράδειγμα <u>ἰνώδη χώρου</u> (fibre bundle) ὁ ὁποῖος ἐπιπλέον εἶναι καί <u>διανυσματική δέσμη</u> (vector bundle). Στήν ὁρολογία τῶν χώρων αὐτῶν TaM εἶναι ἡ <u>δέσμη</u> (bundle), M ἡ <u>βάση</u> (base space), T_q^* ἡ ἶνα (fibre) τοῦ σημείου q καί π ἡ προβολή (projection) τῆς δέσμης στή βάση.

<u>Θεώρημα</u>: Ὑπάρχει ἕνα προτιμητέο συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο Aa στή συνεφαπτόμενη δέσμη.

<u>Κατασκευή</u>: Ἄς εἶναι (q, p_a) ἕνα τυχαῖο σημεῖο τῆς TaM, ∇_a τυχαία παραγώγιση (τελεστής παραγωγίσεως) τῆς M καί D_a τυχαία παραγώγιση τῆς TaM. Θεωροῦμε ἕνα C^∞ βαθμωτό πεδίο f τῆς M, $f : M \to \mathbb{R}$, τέτοιο ὥστε $\nabla_a f |_q = p_a$ (παρακάτω θά ἀποδείξουμε τήν ὕπαρξη τοῦ f). Κατασκευάζουμε τή σύνθεση τῆς f μέ τήν π, πού εἶναι ἕνα βαθμωτό πεδίο στή TaM, παίρνουμε τήν παράγωτό της $D_a(f \circ \pi)$ καί τήν ὑπολογίζουμε στό σημεῖο (q, p_a)· ἔτσι κατασκευάζουμε ἕνα συναλλοίωτο διάνυσμα $A_a(q, p_a) = [D_a(f \circ \pi)]_{(q, p_a)}$ στό (q, p_a). Ἐπανάληψη τῆς κατασκευῆς $\forall (q, p_a) \in T_a M$ δίνει τό συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο Aa στήν TaM.

$$\begin{tikzcd}
T_a M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f \circ \pi"'] & M \arrow[d, "f"] \\
 & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Πόση εἶναι ἡ αὐθαιρεσία στήν κατασκευή τοῦ Aa; Πρῶτον, ὑπάρχει ἡ αὐθαιρεσία στήν ἐκλογή τῶν τελεστῶν ∇_a καί D_a ἀλλά αὐτή δέν ἐπηρεάζει τό Aa γιατί οἱ παραγωγίσεις δροῦν ἀποκλειστικά σέ βαθμωτά πεδία. Καί δεύτερον, ὑπάρχει ἡ αὐθαιρεσία $f \to \tilde{f} = f + C$, C =σταθερή, στήν ἐκλογή τοῦ f, ἐφ' ὅσον ἔχουμε ἐπιβάλλει συνθήκη μόνο στή παράγωγο τοῦ f. Χρησιμοποιώντας ὅμως τήν ἐκλογή $\tilde{f}$ θά βρίσκαμε $(\tilde{f} \circ \pi)(q, p_a) = \tilde{f}(q) =$

$$= f(q) + C = (f \circ \pi)(q, p_a) + C, \quad \forall (q, p_a) \in T_a M,$$

δηλαδή, $\tilde{f} \circ \pi = f \circ \pi + C$, καί συνεπῶς καί ἡ αὐθαιρεσία αὐτή δέν ἐπηρεάζει τήν κατασκευή τοῦ A_a. Τό διανυσματικό πεδίο A_a λοιπόν εἶναι καλῶς ὁρισμένο.

Γιά νά καταλάβουμε καλύτερα τό πεδίο A_a, ἐπαναλαμβάνουμε τήν προηγούμενη κατασκευή μέ τή βοήθεια συντεταγμένων. Ἄς εἶναι $(\mathcal{U}, \varphi)$ ἕνας χάρτης τῆς M ὁ ὁποῖος προσδιορίζει συντεταγμένες $\{q^i\}$ καί $\{q^i, p_i\}$ σέ περιοχές τῆς M καί τῆς T_aM ἀντίστοιχα. Ἐπιπλέον, ἄς εἶναι $(\underline{q}, \underline{p}_a) = (\underline{q}^i, \underline{p}_i)$ ἕνα σημεῖο τῆς T_aM. Τό βαθμωτό πεδίο $f : M \to \mathbb{R}$ πού δίνεται ἀπό τή σχέση $f(q) = \underline{p}_1 q^1 + \dots + \underline{p}_n q^n, \forall q \in \mathcal{U}$ ἱκανοποιεῖ τίς ἀπαιτήσεις τῆς παραπάνω κατασκευῆς, ἀφοῦ $\nabla_a f|_{\underline{q}} = [\underline{p}_1 \nabla_a q^1 + \dots + \underline{p}_n \nabla_a q^n]_{\underline{q}} = \underline{p}_a$. Συνεπῶς $(f \circ \pi)(q, p_a) = f(q) = \underline{p}_1 q^1 + \dots + \underline{p}_n q^n$, καί

$$A_a(\underline{q}, \underline{p}_a) = [\underline{p}_1 D_a q^1 + \dots + \underline{p}_n D_a q^n]_{(\underline{q}, \underline{p}_a)} .$$

Ἐπανάληψη τῆς κατασκευῆς γιά κάθε σημεῖο (q, p_a) τῆς T_aM δίνει τήν ἔκφραση τοῦ A_a συναρτήσει συντεταγμένων

$$A_a = p_1 D_a q^1 + \dots + p_n D_a q^n , \tag{1}$$

πού φυσικά θά μποροῦσε νά γραφεῖ καί

$$A_a = p_1 (dq^1)_a + \dots + p_n (dq^n)_a = p_i (dq^i)_a .$$

2. Συμπλεκτικές δομές σέ πολλαπλότητες

Ἄς εἶναι N μία C^∞ πολλαπλότητα ἀρτίας διαστάσεως. Μία <u>συμπλεκτική δομή</u> στήν N εἶναι ἕνα συναλλοίωτο τανυστικό πεδίο, Ω_{ab} δευτέρας τάξεως πού ἱκανοποιεῖ τίς συνθῆκες

i) Τό Ω_{ab} εἶναι ἀντισυμμετρικό : $\Omega_{ab} = -\Omega_{ba}$

ii) Τό Ω_{ab} εἶναι ἀντιστρεπτό, δηλαδή ὑπάρχει ἀνταλλοίωτο τανυστικό πεδίο Ω^{ab} τέτοιο ὥστε $\Omega_{am}\Omega^{bm} = \delta_a{}^b$, ὅπου $\delta_a{}^b$ εἶναι ὁ τανυστής τοῦ Kronecker.

iii) Τό Ω_{ab} ἱκανοποιεῖ τήν $D_{[a}\Omega_{bc]} = 0$.

<u>Παρατήρηση 1η</u>. Ἡ συνθήκη iii) εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τόν τελεστή παραγωγίσεως D_a. Πράγματι, ἄν $\tilde{D}_a$ εἶναι ἕνας ἄλλος τελεστής παραγωγίσεως, $\tilde{D}_a\Omega_{bc} = D_a\Omega_{bc} - C^m_{ab}\Omega_{mc} - C^m_{ac}\Omega_{bm}$ γιά κάποιο συμμετρικό πεδίο C^m_{ab}, καί συνεπῶς

$$\tilde{D}_{[a}\Omega_{bc]} = D_{[a}\Omega_{bc]} .$$

<u>Παρατήρηση 2η:</u> Πολλές φορές ἡ συμπλεκτική δομή ὁρίζεται σάν μία κλειστή, μή ἐκφυλισμένη δύο-μορφή. "Δύο-μορφή" σημαίνει συναλλοίωτο ἀντισυμμετρικό τανυστικό πεδίο δευτέρας τάξεως. "Μή ἐκφυλισμένη" σημαίνει ἀντιστρεπτή καί "κλειστή" σημαίνει πώς ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη iii).

<u>Παρατήρηση 3η</u>: Τό πεδίο Ω^{ab} τῆς συνθήκης ii) εἶναι ἀντισυμμετρικό καί μοναδικό. Πράγματι, ἀπό τήν $\Omega_{am}\Omega^{bm} = \delta_a{}^b$ βρίσκουμε ὅτι

$$\Omega^{cb} = \delta_a{}^b\Omega^{ca} = \Omega_{am}\Omega^{bm}\Omega^{ca} =$$
$$= -\Omega_{ma}\Omega^{bm}\Omega^{ca} = -\Omega^{bm}\delta_m{}^c = -\Omega^{bc},$$

δηλαδή, ἀντισυμμετρικό. Ἐπίσης, ἄν εἶναι $\tilde{\Omega}^{bm}$ ἕνα ἄλλο ἀντίστροφο τοῦ Ω_{ab} θά ἔχουμε $\Omega_{am}\tilde{\Omega}^{bm} = \delta_a{}^b$ καί πολλαπλασιάζοντας μέ συστολή καί τά δύο μέλη μέ Ω^{ca} βρίσκουμε $-\tilde{\Omega}^{bc} = \Omega^{cb} = -\Omega^{bc}$, πού ἀποδεικνύει τή μοναδικότητα τοῦ Ω^{ab}.

<u>Ὁρισμός</u>: Μία C^∞ πολλαπλότητα ἀρτίας διαστάσεως μέ συμπλεκτική δομή Ω_{ab} σ'αὐτή λέγεται <u>συμπλεκτική πολλαπλότητα</u>.

Στίς συμπλεκτικές πολλαπλότητες ὑπάρχει ὁ ἰσομορφισμός μεταξύ συναλλοίωτων καί ἀνταλλοίωτων διανυσματικῶν πεδίων πού ὁρίζεται ἀπό τή σχέση $\xi^a = \Omega^{ma}\xi_m , \quad \forall \xi_m$.

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι στή συνεφαπτόμενη δέσμη ὑπάρχει μία προτιμητέα συμπλεκτική δομή πού κάνει τήν T_aM συμπλεκτική πολλαπλότητα.

Ἄς εἶναι A_a τό προτιμητέο διανυσματικό πεδίο τῆς T_aM καί D_a τυχαῖος τελεστής παραγωγίσεως. Κατασκευάζουμε τό $\Omega_{ab} = D_aA_b - D_bA_a$. Τό Ω_{ab} εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τήν ἐκλογή τοῦ τελεστῆ παραγωγίσεως καί συνεπῶς εἶναι ἕνα προτιμητέο πεδίο τῆς T_aM. Πράγματι, ἄν εἴχαμε χρησιμοποιήσει ἕναν ἄλλο τελεστή $\tilde{D}_a$ τῆς T_aM θά εἴχαμε βρεῖ $\Omega_{ab} = \tilde{D}_aA_b - \tilde{D}_bA_a = (D_aA_b - C^m_{ab}A_m) - (D_bA_a - C^m_{ba}A_m) = \Omega_{ab}$, ἐπειδή τό C^m_{ab} θά ἦταν συμμετρικό. Τό Ω_{ab} εἶναι ἀπό τήν κατασκευή του ἀντισυμμετρικό. Εὔκολα ἐπίσης ἀποδεικνύεται ὅτι ἱκανοποιεῖ καί τήν συνθήκη iii) ἄν χρησιμοποιήσουμε τήν ἰδιότητα $R_{[abc]}{}^m = 0$ τοῦ τανυστῆ τοῦ Riemann, τό γεγονός πώς μποροῦμε νά δημιουργήσουμε καί νά παραλείψουμε ἀγκύλες πού περιέχονται μέσα σέ ἄλλες ἀγκύλες πού περικλείουν δεῖκτες ἑνός τανυστῆ (ἀγκύλες πού κατασκευάζουν τό ὁλικά ἀντισυμμετρικό του τμῆμα), καί τόν ὁρισμό $\Omega_{ab} = 2D_{[a}A_{b]}$ τοῦ Ω_{ab}. Πράγματι,

$$D_{[a}\Omega_{bc]} = 2D_{[a}D_{[b}A_{c]]} = 2D_{[a}D_bA_{c]} =$$
$$= 2D_{[[a}D_{b]}A_{c]} = R_{[abc]}{}^m A_m = 0.$$

Γιά τήν ἀπόδειξη τῆς ἀντιστρεπτότητας τοῦ Ω_{ab} θά χρησιμοποιήσουμε τόν χάρτη τῆς TaM στόν ὁποῖο τό πεδίο Aa ἔχει τήν μορφή (1). Ἐπειδή δύο διαδοχικές παραγωγίσεις βαθμωτοῦ πεδίου ἀντιμετατίθενται $(D_a D_b g = D_b D_a g)$ εὔκολα βρίσκουμε ὅτι

$$\Omega_{ab} = D_a(p_1 D_b q^1 + \dots + p_n D_b q^n) - D_b(p_1 D_a q^1 + \dots + p_n D_a q^n) =$$
$$= (D_a p_1)(D_b q^1) - (D_b p_1)(D_a q^1) + \dots + (D_a p_n)(D_b q^n) - (D_b p_n)(D_a q^n). \qquad (2)$$

Συνεπῶς στή βάση $\{(D_a x^i)(D_b x^j),\ i,j = 1,2,\dots 2n\}$, ὅπου $x^1 = q^1, \dots, x^n = q^n$, $x^{n+1} = p_1, \dots, x^{2n} = p_n$, οἱ συντεταγμένες τοῦ Ω_{ab} δίνονται ἀπό τόν πίνακα

$$\left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array}\right),$$

ὅπου 0_n εἶναι ὁ μηδενικός καί I_n ὁ μοναδιαῖος $n \times n$ πίνακας. Ὁ ἀντίστροφος τοῦ παραπάνω πίνακα εἶναι ὁ $\left(\begin{array}{c|c} 0_n & I_n \\ \hline -I_n & 0_n \end{array}\right)$ καί συνεπῶς ὁ ἀντίστροφος Ω^{ab} τοῦ Ω_{ab}, ὅπως ὁρίστηκε στή συνθήκη ii) εἶναι ὁ

$$\Omega^{ab} = \left(\frac{\partial}{\partial p_1}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial q^1}\right)^b - \left(\frac{\partial}{\partial p_1}\right)^b\left(\frac{\partial}{\partial q^1}\right)^a + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial p_n}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial q^n}\right)^b - \left(\frac{\partial}{\partial p_n}\right)^b\left(\frac{\partial}{\partial q^n}\right)^a. \qquad (3)$$

Παρατήρηση 4η: Οἱ βάσεις $\{D_a x^i,\ i = 1,2,\dots 2n\}$ καί $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a,\ i = 1,2,\dots 2n\right\}$ εἶναι δυϊκές, πού σημαίνει ὅτι $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a (D_a x^j) = \delta_{ij}$.
Ἐκφρασμένη μέ τή βοήθεια τῶν q^i καί p_i ἡ σχέση αὐτή δίνει

$$\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^a (D_a q^j) = \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^a (D_a p_j) = \delta_{ij},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^a (D_a p_j) = \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^a (D_a q^j) = 0, \quad i,j = 1,2,\dots n.$$

Συνεπῶς

$$\Omega^{am}\Omega_{bm} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^a (D_b p_i) + \left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^a (D_b q^i)\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a (D_b x^i) = \delta^a_b. \qquad (4)$$

Ὅτι τό τελευταῖο ἄθροισμα ἰσοῦται μέ τόν τανυστή τοῦ Kronecker ἀποδει-

κνύεται ὡς ἑξῆς: Ἄς εἶναι $\xi^b = \xi^{(j)}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^b$ τυχόν διάνυσμα μέ συνιστῶσες $\xi^{(j)}$ (ἄθροιση ὑπονοεῖται). Τότε

$$\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a (D_b x^i)\,\xi^b = \sum_{i,j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a (D_b x^i)\,\xi^{(j)}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^b =$$
$$= \sum_{i,j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \xi^{(j)}\delta_{ij} = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^a \xi^{(j)} = \xi^a.$$

Τέλος ὁ Ω^{ab} δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση (3) καί ὄχι ἀπό τήν ἀντίθετή της, ὅπως θά πρότεινε ὁ ἀντίστροφος τοῦ πίνακα $\left(\begin{array}{c|c} 0 & -I \\ \hline I & 0 \end{array}\right)$, ἐπειδή τό ἐπιπλέον μεῖον ἔχει ἀπορροφηθεῖ στόν ὁρισμό $\Omega_{am}\Omega^{bm} = \delta_a{}^b$ τοῦ ἀντίστροφου πού χρησιμοποιήσαμε. Γενικά, οἱ πίνακες M_{ij} καί M^{ij} εἶναι ἀντίστροφοι ὅταν $M_{im}M^{mj} = \delta_{ij}$.

Παρατήρηση 5η: Ἡ συνθήκη iii), πού ἀποδείξαμε γενικά μέ τή βοήθεια τῶν ἰδιοτήτων τοῦ τανυστῆ τοῦ Riemann, μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ἁπλούστερα ἄν χρησιμοποιηθεῖ ἡ ἔκφραση (2) τοῦ Ω_{ab}. Ἐπειδή $D_{[a}D_{b]}g = 0$ γιά κάθε βαθμωτό πεδίο g, προφανῶς $D_{[a}\Omega_{bc]} = 0$.

Συνοψίζουμε τά συμπεράσματα τῶν ἑνοτήτων 1 καί 2. Ξεκινώντας ἀπό κάθε C^∞ πολλαπλότητα M κατασκευάζεται ἡ συνεφαπτόμενη δέσμη TaM πού εἶναι μία C^∞ πολλαπλότητα $2n$ διαστάσεων. Σ'αὐτήν ὁρίζονται ἡ προτιμητέα προβολή $\pi: T_aM \to M$, τό προτιμητέο συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο Aa πού δίνεται ἀπό τή σχέση (1), καί ἡ προτιμητέα συμπλεκτική δομή Ω_{ab} πού δίνεται ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3). Χωρίς νά δοθεῖ λοιπόν καμμία ἐπιπλέον πληροφορία, ἡ συνεφαπτόμενη δέσμη εἶναι καί συμπλεκτική πολλαπλότητα.

3. Μηχανική κατά Hamilton

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι στή συμπλεκτική πολλαπλότητα TaM ἔχει καθοριστεῖ ἕνα C^∞ βαθμωτό πεδίο $H: T_aM \to \mathbb{R}$. Μποροῦμε λοιπόν νά κατασκευάσουμε τό συναλλοίωτο πεδίο $D_m H$ καί στή συνέχεια τό ἀνταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $H^a = \Omega^{ma} D_m H$. Προφανῶς τό H^a δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐκλογή τοῦ D_m. Ὑπολογίζουμε τό H^a. Χρησιμοποιώντας ὅτι

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^m D_m H = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^m \left(\frac{\partial H}{\partial x^j}\right)(D_m x^j) = \frac{\partial H}{\partial x^j}\delta_{ij} = \frac{\partial H}{\partial x^i},$$

$i = 1,2,\dots 2n,$

Βρίσκουμε

$$H^a=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^a-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^a \quad . \qquad (5)$$

Ἄς εἶναι $\tilde{\gamma}(t)$ ἡ ὁλοκληρωτική καμπύλη τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου H^a τῆς TaM, δηλαδή ἡ καμπύλη τῆς ὁποίας ἡ ἐφαπτομένη σέ κάθε σημεῖο της εἶναι τό διάνυσμα H^a στό ἴδιο σημεῖο. Ἐάν $x^i(t)=(q^i(t),\ p_i(t))$ εἶναι οἱ συντεταγμένες τῆς καμπύλης, οἱ συντεταγμένες τοῦ ἐφαπτόμενου διανύσματος θά εἶναι οἱ

$$\left(\frac{dx^i}{dt},\ i=1,2,\dots 2n\right)=\left(\frac{dq^i}{dt},\ \frac{dp_i}{dt},\ i=1,2,\dots n\right),$$

καί συνεπῶς θά ἔχουμε

$$H^a=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dq^i}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^a+\frac{dp_i}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^a\right] \quad . \qquad (6)$$

Σύγκριση τῶν σχέσεων (5) καί (6) δίνει ὅτι οἱ συντεταγμένες $q^i(t)$, $p_i(t)$ τῆς ὁλοκληρωτικῆς καμπύλης $\tilde{\gamma}(t)$ τοῦ πεδίου H^a ἱκανοποιοῦν τίς ἐξισώσεις

$$\frac{dq^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\ ,\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q^i}\ ,\ i=1,2,\dots n\ , \qquad (7)$$

πού ἀμέσως ἀναγνωρίζονται σάν οἱ ἐξισώσεις Hamilton!

Τά παραπάνω συμπεράσματα προτείνουν τόν ἀκόλουθο τρόπο θεμελίωσης τῆς θεωρητικῆς μηχανικῆς κατά Hamilton:

Γιά τό φυσικό σύστημα πού θέλουμε νά μελετήσουμε καθορίζουμε πρῶτα τόν <u>χῶρο μορφῆς</u> (configuration space), τόν ὁποῖο καί ὀργανώνουμε σά μία C^∞ πολλαπλότητα M. (Ἡ διάσταση τῆς M ἰσοῦται μέ τόν ἀριθμό τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας τοῦ συστήματος). Κατασκευάζουμε κατόπιν τή συνεφαπτόμενη δέσμη τῆς M , πού ἀποτελεῖ τό <u>χῶρο τῶν φάσεων</u> (phase space) τοῦ συστήματος. Τά στοιχεῖα τοῦ χώρου τῶν φάσεων εἶναι τῆς μορφῆς (q,p_a) , δηλ. περιλαμβάνουν ὅλη τήν πληροφορία γιά τή θέση καί τήν ὁρμή τοῦ συστήματος, καί ἀποτελοῦν τίς <u>καταστάσεις</u> (states) τοῦ συστήματος. Ἡ χρονική ἐξέλιξη τοῦ συστήματος παριστάνεται ἀπό C^∞ καμπύλες στό χῶρο τῶν φάσεων, τίς <u>φασικές τροχιές</u> (dynamical trajectories). Δεχόμαστε ὅτι κάθε κατάσταση τοῦ συστήματος προσδιορίζει μονότιμα τήν ἐξέλιξή του, πράγμα πού τό ἐκφράζουμε μέ τήν ἀπαίτηση ὅτι οἱ φασικές τροχιές δέν τέμνονται. Ἡ ἐξέλιξη τοῦ συστήματος στό χῶρο βρίσκεται εὔκολα ἄν προβάλουμε τή φασική τροχιά στό χῶρο μορφῆς μέ τή βοήθεια τῆς προβολῆς $\pi : T_aM \longrightarrow M$. Ὁ χρόνος προσδιορίζεται ἀπό τήν παράμετρο t τῆς φασικῆς τροχιᾶς. Τά παραπάνω ἀποτελοῦν τή θεμελίωση τῆς <u>Κινηματικῆς</u> .

Εἶναι ὑποχρέωση τῆς <u>Δυναμικῆς</u> ἡ πρόβλεψη τῆς ἐξέλιξης ἑνός συστήματος, πού στό φορμαλισμό πού ἀναπτύσσουμε εἶναι ἡ εὕρεση τῆς (μοναδικῆς) φασικῆς τροχιᾶς πού περνᾶ ἀπό κάθε σημεῖο τοῦ χώρου τῶν φάσεων. Γιά νά κάνουμε φυσική δυναμική χρειαζόμαστε κάποια ἐπιπλέον πληροφορία, τούς φυσικούς νόμους πού διέπουν τό σύστημα ἤ καλύτερα, τή μορφή πού παίρνουν οἱ φυσικοί νόμοι ὅταν ἐφαρμόζονται στό συγκεκριμένο μας σύστημα. Δεχόμαστε ὅτι ὅλη αὐτή ἡ πληροφορία περιέχεται σέ μία πραγματική συνάρτηση H, τήν <u>Χαμιλτονιανή</u>, στό χῶρο τῶν φάσεων. Ξέροντας τήν H κατασκευάζουμε τό <u>διανυσματικό πεδίο Hamilton</u> $H^a = \Omega^{ma}D_mH$ μέ τή βοήθεια τῆς προτιμητέας συμπλεκτικῆς δομῆς Ω_{ab} τοῦ χώρου τῶν φάσεων. Οἱ ὁλοκληρωτικές καμπύλες τοῦ H^a περιγράφουν μονοσήμαντα τήν ἐξέλιξη τοῦ συστήματος. Ἄς σημειωθεῖ ὅτι ἡ γνώση τοῦ H^a προσδιορίζει, ἐκτός ἀπό τή μορφή τῆς φασικῆς τροχιᾶς $\tilde{\gamma}(t)$, καί τή παράμετρό της t ἐκτός ἀπό μία προσθετική παράμετρο $(t\rightarrow t+c)$. Ἡ παράμετρος αὐτή t ἀποτελεῖ τό (Νευτώνειο) χρόνο τοῦ συστήματος.

<u>Θεώρημα</u>: Ἡ Χαμιλτονιανή διατηρεῖται σταθερή κατά τήν ἐξέλιξη τοῦ συστήματος.

Στήν ὁρολογία μας τό θεώρημα ἐκφράζει ὅτι ἡ H παραμένει σταθερή πάνω σέ κάθε φασική τροχιά. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι μία γραμμή: $H^aD_aH=\Omega^{ma}(D_mH)(D_aH)=0$, ἐπειδή τό Ω^{ma} εἶναι ἀντισυμμετρικό.

<u>Παρατηρήσεις</u>: i) Ἡ βασική μας παραδοχή πώς οἱ καταστάσεις τοῦ συστήματος, πού προσδιορίζουν μονότιμα τήν ἐξέλιξή του, εἶναι σημεῖα τοῦ χώρου τῶν φάσεων ἐκφράζει τήν ἄποψη ὅτι οἱ δυναμικοί νόμοι μποροῦν νά ἐκφραστοῦν μέ διαφορικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\ddot{q}=F(q,\dot{q})$ ἤ, ἰσοδύναμα, πώς οἱ δυνάμεις ἐξαρτῶνται μόνον ἀπό τίς θέσεις καί τίς ταχύτητες.

ii) Ὁ φορμαλισμός πού ἀναπτύξαμε ἐφαρμόζεται μόνον γιά ἀνεξάρτητα τοῦ χρόνου δυναμικά.

iii) Ὅταν δοθεῖ τό φυσικό σύστημα, δέν ὑπάρχει ἀλγόριθμος γιά τόν προσδιορισμό τοῦ χώρου μορφῆς. Κάτι παραπάνω, δέν πιστεύουμε ὅτι ὑπάρχει μοναδικός χῶρος μορφῆς πού περιγράφει τό σύστημα. Πολλές διαφορετικές ἐκλογές εἶναι δυνατές, ἄλλες καλύτερες, ἄλλες χειρότερες, ἀλλά κι ὁ διαχωρισμός τους σέ καλές καί ἄσχημες ἐκλογές τοῦ χώρου μορφῆς εἶναι ὑποκειμενικός. Ἐπιπλέον, εἶναι δυνατόν δύο ἴδιοι χῶροι μορφῆς νά παριστάνουν τελείως διαφορετικά συστήματα.

iv) Πολλές φορές ἐπιθυμοῦμε νά μελετήσουμε μηχανική Hamilton στό χῶρο τῶν φάσεων ἑνός συστήματος χωρίς νά γνωρίζουμε τό χῶρο μορφῆς ἀπό τόν ὁποῖο ἔχει προκύψει, δηλ. χωρίς νά γνωρίζουμε τήν προβολή $\pi : T_a M \longrightarrow M$. Στήν περίπτωση αὐτή θά πρέπει νά μᾶς δοθεῖ, σάν μία ἐπιπλέον πληροφορία, μία συμπλεκτική δομή στό χῶρο τῶν φάσεων. Ἡ ὑπόλοιπη μελέτη φυσικά δέν ἀλλάζει καθόλου: ὅταν δοθεῖ ἡ Χαμιλτονιανή H, οἱ ὁλοκληρωτικές καμπύλες τοῦ $H^a = \Omega^{ma}(D_m H)$ περιγράφουν τήν ἐξέλιξη τοῦ συστήματος.

v) Στίς συνήθεις παρουσιάσεις τῆς μηχανικῆς, ἀφοῦ ἀναφερθεῖ πώς οἱ ἐξισώσεις Hamilton ἰσχύουν μόνον ὅταν οἱ ὁρμές p_i εἶναι οἱ συζυγεῖς τῶν συντεταγμένων q^i , δημιουργεῖται ἡ ἐντύπωση ὅτι ἡ πληροφορία ἡ σχετική μέ τό ποιές ὁρμές εἶναι συζυγεῖς ὁρισμένων συντεταγμένων q^i — ἐξαρτᾶται ἀπό τή δυναμική, ἤ τουλάχιστον κάποια ἐπιπλέον τοῦ συστήματος ἀγα, πληροφορία, π.χ., οἱ συζυγεῖς ὁρμές ὁρίζονται ἀπό σχέσεις τῆς μορφῆς $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$, μέ L τή Λαγκρανζιανή. Τουναντίον. Ἀπό τό φορμαλισμό πού ἀναπτύξαμε γίνεται φανερό πώς ἡ σχέση "συζυγεῖς" μεταξύ συντεταγμένων καί ὁρμῶν εἶναι καθαρά γεωμετρική. Τό συμπέρασμα εἶναι τό ἑξῆς: Ὅταν καθοριστοῦν οἱ συντεταγμένες $\{q^i\}$ στό χῶρο μορφῆς τότε οἱ συνιστῶσες p_i τῆς ὁρμῆς p_a ὡς πρός τή βάση $\{ \nabla_a q^i = (dq^i)_a ,\ i = 1, 2, \dots n \}$ εἶναι οἱ συζυγεῖς ὁρμές τῶν συντεταγμένων q^i .

4. Παρατηρήσιμα Μεγέθη

Ὅπως ἀναφέρθηκε καί στήν παρατήρηση (iv) τῆς προηγούμενης ἑνότητας, γιά τή μελέτη τῆς κινητικῆς ἑνός φυσικοῦ συστήματος ἀπαιτοῦνται, ἐκτός ἀπό τόν προσδιορισμό τοῦ χώρου τῶν φάσεων $\Gamma = T_a M$ τοῦ συστήματος, εἴτε ἡ γνώση τῆς προβολῆς $\pi : \Gamma \longrightarrow M$ ἤ ἡ γνώση μιᾶς συμπλεκτικῆς δομῆς Ω_{ab} τοῦ Γ. Ἐνῶ ὅμως στήν πρώτη περίπτωση ἡ συμπλεκτική δομή προσδιορίζεται ἀπό τή γνώση τοῦ διαχωρισμοῦ τοῦ χώρου τῶν φάσεων σέ "χῶρο μορφῆς καί ὑπόλοιπα", στή δεύτερη περίπτωση οἱ γνώσεις τῶν Γ καί Ω_{ab} δέν ἐπαρκοῦν γιά τόν προσδιορισμό τοῦ χώρου μορφῆς. Συνεπῶς οἱ δύο θεμελιώσεις τῆς μηχανικῆς δέν εἶναι ἰσοδύναμες. Ὁ πρῶτος φαίνεται πιό φυσιολογικός ἐνῶ ὁ δεύτερος εἶναι πιό γενικός , καί πολλές φορές προτιμᾶται. Στήν ἑνότητα αὐτή, πού μελετᾶμε τό σύνολο τῶν <u>παρατηρήσιμων (μεγεθῶν) (observables)</u> τοῦ συστήματος, ἐπαρκεῖ ἡ γνώση τῶν Γ καί Ω_{ab}.

Ἄς εἶναι λοιπόν Γ ὁ χῶρος τῶν φάσεων ἑνός φυσικοῦ συστήματος (δηλ. μιά C^∞ πολλαπλότητα $2n$ διαστάσεων) καί Ω_{ab} μία συμπλεκτική δομή τοῦ Γ.

<u>Ὁρισμός</u>: Ὀνομάζεται παρατηρήσιμο τοῦ συστήματος κάθε βαθμωτό πεδίο στό χῶρο τῶν φάσεων

Ἡ Χαμιλτονιανή H εἶναι ἕνα παρατηρήσιμο.

<u>Παρατήρηση</u>: Μέ τήν ἀποδοχή τοῦ παραπάνω ὁρισμοῦ ἔχουμε δεχθεῖ ὅτι ὅλα τά παρατηρήσιμα τῶν φυσικῶν συστημάτων ἐξαρτῶνται μόνον ἀπό τήν κατάσταση τοῦ συστήματος (σημεῖο τοῦ χώρου τῶν φάσεων) ἐνῶ εἶναι ἀνεξάρτητα, π.χ., τοῦ τρόπου μέ τόν ὁποῖο τό σύστημα ἐξελίχθηκε στήν κατάσταση αὐτή. Φυσικά εἶναι γνωστό πώς κάθε κατάσταση προσδιορίζει μονότιμα τήν προϊστορία καί τό μέλλον τοῦ συστήματος (μέ τή βοήθεια τῆς μοναδικῆς φασικῆς τροχιᾶς πού περνᾶ ἀπό τήν κατάσταση), ὁ προσδιορισμός ὅμως αὐτός ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐκλογή τῆς Χαμιλτονιανῆς H.

Στό σύνολο τῶν παρατηρήσιμων ὁρίζουμε τίς τρεῖς παρακάτω πράξεις, πού ὅλες κατασκευάζουν ἕνα νέο παρατηρήσιμο.

(i) Πρόσθεση παρατηρήσιμων:

$$A + B : \Gamma \ni x \longrightarrow (A+B)(x) = A(x) + B(x) \in \mathbb{R} .$$

(ii) Πολλαπλασιαμός παρατηρήσιμων:

$$AB : \Gamma \ni x \longrightarrow (AB)(x) = A(x)\, B(x) \in \mathbb{R} .$$

(iii) Ἀγκύλη Poisson δύο παρατηρήσιμων:

$$[A, B] = \Omega^{mn} (D_m A)(D_n B) ,$$ ὅπου D_m εἶναι

τυχαῖος τελεστής παραγωγίσεως τοῦ χώρου τῶν φάσεων.

Ἡ πρόσθεση καί ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πράξεις προσεταιριστικές καί ἀντιμεταθετικές. Ἡ ἀγκύλη Poisson εἶναι ἀντισυμμετρική.

Μέ τή βοήθεια τῆς ἀγκύλης Poisson ἡ χρονική παράγωγος ἑνός παρατηρήσιμου δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = H^a D_a A = \Omega^{ma}(D_m H)(D_a A) = [H, A],$$

δηλαδή ἰσοῦται μέ τήν ἀγκύλη Poisson τῆς Χαμιλτονιανῆς μέ τό παρατηρήσιμο αὐτό. Τό παρατηρήσιμο A εἶναι μιά σταθερή τῆς κίνησης $(dA/dt = 0)$ ἐάν καί μόνον ἐάν $[H, A] = 0$.

Ἐπειδή $\dot{H} = [H, H] = 0$, ἡ Χαμιλτονιανή εἶναι σταθερή τῆς κίνησης. Ἡ τιμή τῆς H σέ κάθε φασική τροχιά λέγεται ἡ ἐνέργεια τοῦ συστήματος. Μόλις ἀποδείξαμε ὅτι ἡ ἐνέργεια τοῦ συστήματος διατηρεῖται.

Οἱ ἀγκύλες Poisson ἱκανοποιοῦν τίς πέντε παρακάτω ἰδιότητες.

1. Ἡ $[\cdot, \cdot]$ εἶναι διγραμμική:

$$[A+B, C] = \Omega^{mn} D_m(A+B) D_n C = \Omega^{mn}(D_m A + D_m B)(D_n C) =$$
$$= \Omega^{mn}(D_m A)(D_n C) + \Omega^{mn}(D_m B)(D_n C) = [A, C] + [B, C],$$

παρόμοια καί γιά τήν $[A, B+C]$.

2. Ἡ ἀγκύλη Poisson ἱκανοποιεῖ τόν κανόνα τοῦ Leibnitz: $[AB, X] = \Omega^{mn}\left[A(D_m B) + B(D_m A)\right](D_n X) = A[B, X] + B[A, X]$.

3. Ἐάν ἡ συνάρτηση A εἴτε B εἶναι σταθερή (προσοχή, ὄχι ἁπλῶς σταθερή τῆς κίνησης ἀλλά ἀπόλυτα σταθερή) τότε $[A, B] = 0$.

4. Ἡ $[\cdot, \cdot]$ εἶναι ἀντισυμμετρική:

$$[A, B] = \Omega^{mn}(D_m A)(D_n B) = -\Omega^{nm}(D_n B)(D_m A) = -[B, A].$$

5. Ἡ ἀγκύλη Poisson ἱκανοποιεῖ τήν ταυτότητα τοῦ Jacobi: Γιά τρία τυχαῖα παρατηρήσιμα A, B καί C ἰσχύει

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

Ἀπόδειξη: Ἡ ἀνάπτυξη τοῦ πρώτου ὅρου δίνει

$$[A, [B, C]] = \Omega^{\alpha m}(D_\alpha A) D_m\left[\Omega^{\beta\gamma}(D_\beta B)(D_\gamma C)\right] =$$
$$= \Omega^{\alpha m}(D_m \Omega^{\beta\gamma}) \cdot \{(D_\alpha A)(D_\beta B)(D_\gamma C)\} +$$
$$+ \Omega^{\alpha m}\Omega^{\beta\gamma}\{(D_\alpha A)(D_m D_\beta B)(D_\gamma C) + (D_\alpha A)(D_\beta B)(D_m D_\gamma C)\}. \quad (4.1)$$

Ἀπό τόν τελευταῖο ὅρο τῆς (4.1) θά πάρουμε, ὅταν θεωρήσουμε καί τούς ἄλλους δύο ὅρους τῆς ταυτότητας τοῦ Jacobi (μέ κυκλική ἐναλλαγή τῶν A, B καί C)

$$\Omega^{\alpha m}\Omega^{\beta\gamma}\{(D_\alpha A)(D_m D_\beta B)(D_\gamma C) + (D_\alpha A)(D_\beta B)(D_m D_\gamma C) +$$
$$+ (D_\alpha B)(D_m D_\beta C)(D_\gamma A) + (D_\alpha B)(D_\beta C)(D_m D_\gamma A) +$$
$$+ (D_\alpha C)(D_m D_\beta A)(D_\gamma B) + (D_\alpha C)(D_\beta A)(D_m D_\gamma B)\}. \quad (4.2)$$

Θεωροῦμε τόν πρῶτο καί τόν τελευταῖο ὅρο τῆς (4.2), καί ἐναλλάσσουμε τούς βουβούς δεῖκτες τοῦ πρώτου ὅρου $\alpha \longrightarrow \beta$, $\gamma \longrightarrow \alpha$, $m \longrightarrow \gamma$, $\beta \longrightarrow m$, πού γράφεται

$$\Omega^{\beta\gamma}\Omega^{m\alpha}(D_\beta A)(D_\gamma D_m B)(D_\alpha C) = -\Omega^{\alpha m}\Omega^{\beta\gamma}(D_\alpha C)(D_\beta A)(D_m D_\gamma B)$$

καί ἐξαλείφεται μέ τόν τελευταῖο ὅρο τῆς (4.2). Παρόμοια ἐξαλείφονται καί οἱ ὑπόλοιποι τέσσερις ὅροι τῆς (4.2). Συνεπῶς, ἐπειδή ὁ $\Omega^{\alpha\beta}$ εἶναι ἀντισυμμετρικός, ἡ ἔκφραση (4.2) εἶναι ἴση μέ τό μηδέν.

Ἀντίθετα, ἀπό τόν προτελευταῖο ὅρο τῆς (4.1) παίρνουμε, θεωρώντας καί πάλι ὅλο τό ἀριστερό μέλος τῆς ταυτότητας τοῦ Jacobi, ὅτι

$$\Omega^{\alpha m}(D_m \Omega^{\beta\gamma})\left[(D_\alpha A)(D_\beta B)(D_\gamma C) + (D_\alpha B)(D_\beta C)(D_\gamma A) + (D_\alpha C)(D_\beta A)(D_\gamma B)\right] =$$
$$= \left[\Omega^{\alpha m}(D_m \Omega^{\beta\gamma}) + \Omega^{\beta m}(D_m \Omega^{\gamma\alpha}) + \Omega^{\gamma m}(D_m \Omega^{\alpha\beta})\right](D_\alpha A)(D_\beta B)(D_\gamma C) =$$
$$= -3\,\Omega^{m[\alpha} D_m \Omega^{\beta\gamma]}(D_\alpha A)(D_\beta B)(D_\gamma C), \quad (4.3)$$

ὅπου γιά τήν πρώτη ἰσότητα κάναμε ἐναλλαγή τῶν βουβῶν δεικτῶν καί γιά τή δεύτερη χρησιμοποιήσαμε τήν ἀντισυμμετρικότητα τοῦ $\Omega^{\alpha\beta}$. Τέλος ἐφαρμόζουμε τόν κανόνα τοῦ Leibnitz καί τίς $\Omega_{am}\Omega^{bm} = \delta_a{}^b$ καί $D_a \delta_b{}^c = 0$ στήν παρακάτω σχέση:

$$\Omega^{\mu\alpha}\Omega^{\nu\beta}\Omega^{\rho\gamma}(D_\mu \Omega_{\rho\nu}) = \Omega^{\mu\alpha}\Omega^{\nu\beta}\left[D_\mu(\Omega^{\rho\gamma}\Omega_{\rho\nu}) - \Omega_{\rho\nu}(D_\mu \Omega^{\rho\gamma})\right] =$$

$$= \Omega^{\mu\alpha}\, \delta_\rho{}^\beta \left(D_\mu \Omega^{\rho\gamma}\right) = \Omega^{m\alpha}\, D_m \Omega^{\beta\gamma} .$$

Συνεπῶς

$$\Omega^{m[\alpha} D_m \Omega^{\beta\gamma]} = \Omega^{\mu\alpha}\Omega^{\nu\beta}\Omega^{\rho\gamma} D_{[\mu}\Omega_{\rho\nu]} = 0 , \qquad (4.4)$$

καί ἡ ταυτότητα τοῦ Jacobi ἀποδείχθηκε. 'Επιπλέον, ἐπειδή ὁ Ω_{ab} εἶναι ἀντιστρεπτός, ἡ τελευταία ἰσότητα τῆς (4.4) ἰσχύει ἀκριβῶς τότε ὅταν $D_{[\mu}\Omega_{\rho\nu]} = 0$ καί συνεπῶς ἔχουμε ἀποδείξει ὅτι ἡ ἰσχύς τῆς ταυτότητας τοῦ Jacobi γιά ὅλα τά παρατηρήσιμα εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἰσχύ τῆς συνθήκης $D_{[\alpha}\Omega_{\beta\gamma]} = 0$.

Οἱ ἰδιότητες (1),(2) καί (3) τῶν ἀγκυλῶν Poisson μοιάζουν μέ τίς ἰδιότητες τῆς παραγώγισης, ἐνῶ οἱ ἰδιότητες (4) καί (5) μοιάζουν μέ τίς ἰδιότητες συμπλεκτικῆς δομῆς. 'Από τίς ἰδιότητες (1), (4) καί (5) συμπεραίνουμε ὅτι τό σύνολο τῶν παρατηρήσιμων ἑνός συστήματος μέ πρόσθεση πού δίνεται ἀπό τήν (i) καί ἀντισυμμετρικό πολλαπλασιασμό πού δίνεται ἀπό τήν ἀγκύλη Poisson (iii) σχηματίζουν μιά ἄλγεβρα Lie. Προφανῶς, ἡ ἄλγεβρα αὐτή εἶναι ἄπειρης διάστασης.

Θά τελειώσουμε τήν ἑνότητα μέ τόν ὑπολογισμό τῆς ἀγκύλης τοῦ Poisson μέ τή βοήθεια τῶν συντεταγμένων ἑνός χάρτη τοῦ χώρου τῶν φάσεων. 'Υποθέτουμε λοιπόν πώς ἔχουμε ἕνα χάρτη $\{q^i, p_i\}$ στό χῶρο τῶν φάσεων στόν ὁποῖο ἡ συμπλεκτική δομή Ω^{ab} ἔχει τήν μορφή 3(§2). [Π.χ., ἄν ξέραμε τήν προβολή $\pi : \Gamma \to M$, οἱ $\{q^i\}$ μποροῦσαν νά εἶναι τυχαῖες συντεταγμένες τοῦ χώρου μορφῆς M καί οἱ $\{p_i\}$ οἱ συζυγεῖς τους συντεταγμένες στούς συνεφαπτόμενους χώρους, ὅπως ὁρίστηκαν στίς §1 καί 2.] Χρησιμοποιώντας τίς σχέσεις ὀρθοκανονικότητας τῶν διανυσμάτων βάσεως (τίς σχέσεις πάνω ἀπό τήν ἐξίσωση (4), § 2) βρίσκουμε, γιά τυχαῖα παρατηρήσιμα f καί g, ὅτι

$$[f, g] = \Omega^{ab}(D_a f)(D_b g) =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^b - \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^b \left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^a \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q^j}\right)(Dq^j)_a + \left(\frac{\partial f}{\partial p_j}\right)(Dp_j)_a \right] \right\} (D_b g) =$$

$$= \left\{ \sum_{i,j}^{1,n} \left[-\left(\frac{\partial f}{\partial q^j}\right) \delta_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^b + \left(\frac{\partial f}{\partial p_j}\right) \delta_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^b \right] \right\} (D_b g) =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^b - \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^b \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial q^j}\right)(Dq^j)_b + \left(\frac{\partial g}{\partial p_j}\right)(Dp_j)_b \right] \right\} =$$

$$= \sum_{i,j}^{1,n} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial q^j}\right) \delta_{ij} - \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial p_j}\right) \delta_{ij} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial q^i}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial p_i}\right) \right] ,$$

πού εἶναι ἡ γνωστή μορφή τῆς ἀγκύλης Poisson σ'ἕνα σύστημα συζυγῶν μεταβλητῶν q^i καί p_i.

5. Push forward, Pull back.

῞Ας εἶναι M καί N C^∞ πολλαπλότητες καί $f: M \to N$ μιά C^∞ ἀπεικόνιση ἀπό τήν M στήν N. Θά μελετήσουμε, στήν ἑνότητα αὐτή, πῶς, πότε καί ποιά τανυστικά πεδία μεταφέρει ἡ ἀπεικόνιση f ἀπό τή μιά πολλαπλότητα στήν ἄλλη.

Θεωροῦμε πρῶτα ἕνα τυχαῖο βαθμωτό πεδίο στήν N, $g: N \to \mathbb{R}$. ᾿Απ᾿αὐτό μποροῦμε ἀμέσως νά κατασκευάσουμε ἕνα βαθμωτό πεδίο στή M, τή σύνθεση $g\circ f$, πού θά τή συμβολίζουμε καί $f_{\leftarrow} g = g\circ f$ καί θά τήν ὀνομάζουμε τό pull back τοῦ g. Προφανῶς, ὅταν ἡ

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_{\leftarrow} g = g\circ f"'] & N \arrow[d, "g"] \\
 & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

ἀπεικόνιση g εἶναι C^∞ τότε καί ἡ $f_{\leftarrow} g$ εἶναι C^∞. ᾿Επιπλέον, γιά δύο βαθμωτά πεδία g καί h στήν N εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι $f_{\leftarrow}(g+h) = f_{\leftarrow} g + f_{\leftarrow} h$ καί $f_{\leftarrow}(gh) = (f_{\leftarrow} g)(f_{\leftarrow} h)$. ῾Η τελευταία σχέση ἰσχύει π.χ., ἐπειδή $(f_{\leftarrow}(gh))(m) =$

$$= ((gh)\circ f)(m) = (gh)(f(m)) = g(f(m))\, h(f(m)) =$$
$$= [(f_{\leftarrow} g)(m)]\,[(f_{\leftarrow} h)(m)] = [(f_{\leftarrow} g)(f_{\leftarrow} h)](m), \quad \forall\, m \in M.$$

Κατόπιν θεωροῦμε ἕνα τυχαῖο ἀνταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο ξ^a τῆς M καί ἕνα σημεῖο $m \in M$. [῾Υπενθυμίζεται ὅτι τά διανύσματα σ᾿ ἕνα σημεῖο πολλαπλότητας εἶναι οἱ ἀπεικονίσεις ἀπό τό σύνολο τῶν λείων βαθμωτῶν συναρτήσεων τῆς πολλαπλότητας στούς πραγματικούς ἀριθμούς - καί τά διανυσματικά πεδία εἶναι οἱ ἀπεικονίσεις ἀπό τίς λεῖες βαθμωτές συναρτήσεις στίς λεῖες βαθμωτές συναρτήσεις τῆς πολλαπλότητας - πού ἱκανοποιοῦν τόν κανόνα τοῦ Leibnitz καί δροῦν γραμμικά]. Κατασκευάζουμε τότε ἕνα διάνυσμα στό σημεῖο $f(m) = n$ τῆς N ὡς ἑξῆς: Γιά κάθε C^∞ βαθμωτό $\chi: N \to \mathbb{R}$ παίρνουμε τό C^∞ βαθμωτό $f_{\leftarrow}\chi: M \to \mathbb{R}$ καί βρίσκουμε τόν πραγματικό ἀριθμό $\xi^a(f_{\leftarrow}\chi)|_m$ πού παράγει τό διάνυσμα ξ^a ὅταν δράσει στό $f_{\leftarrow}\chi$ στό σημεῖο m. Μέ τόν τρόπο αὐτό κατασκευάζουμε τήν ἀπεικόνιση

$$(f_{\to}\xi^a): C^\infty(N) \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

πού δίνεται ἀπό τή σχέση

$$C^\infty(N) \ni \chi \longrightarrow (f_{\to}\xi^a)(\chi)|_n = \xi^a(f_{\leftarrow}\chi)|_m \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

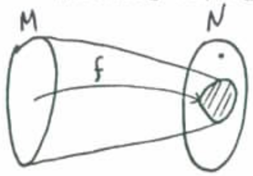
ὅπου $C^\infty(N)$ εἶναι τό σύνολο τῶν C^∞ βαθμωτῶν πεδίων τῆς N. ῾Η $f_{\to}\xi^a$ εἶναι προφανῶς γραμμική καί ἱκανοποιεῖ τόν κα-

νόνα τοῦ Leibnitz ἐπειδή $(f_{\to}\xi^a)(\chi y)|_n = \xi^a(f_{\leftarrow}(\chi y))|_m =$

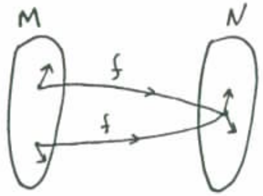
$$= \xi^a((f_{\leftarrow}\chi)(f_{\leftarrow}y))|_m = [(f_{\leftarrow}\chi)\,\xi^a(f_{\leftarrow}y) + (f_{\leftarrow}y)\,\xi^a(f_{\leftarrow}\chi)]|_m =$$
$$= \chi(n)\,(f_{\to}\xi^a)(y)|_n + y(n)\,(f_{\to}\xi^a)(\chi)|_n, \quad \forall\, \chi, y \in C^\infty(N).$$

Συνεπῶς ἔχουμε κατασκευάσει τό διάνυσμα $(f_{\to}\xi^a)$ στό σημεῖο $n = f(m) \in N$. Τό $f_{\to}\xi^a$ λέγεται τό push forward τοῦ διανύσματος ξ^a τῆς M στό n.

῾Η ἐπανάληψη τῆς παραπάνω κατασκευῆς γιά κάθε σημεῖο $m \in M$ (μέ δεδομένο τό διανυσματικό πεδίο ξ^α τῆς M) ἐν γένει δέν κατασκευάζει ἕνα διανυσματικό πεδίο $(f_{\to}\xi^a)$ τῆς N γιά τούς ἑξῆς δύο βασικούς λόγους:



(i) ῾Η $f: M \to N$ μπορεῖ νά μήν εἶναι ἀπεικόνιση "ἐπί τῆς N". Συνεπῶς, ὑπάρχουν ἐν γένει σημεῖα τῆς N στά ὁποῖα, ἐπειδή αὐτά δέν εἶναι εἰκόνες κάποιων σημείων τῆς M, δέν ἔχει ὁριστεῖ κανένα διάνυσμα.



(ii) ῾Η $f: M \to N$ μπορεῖ νά μήν εἶναι ἀμφιμονότιμη ἀπεικόνιση. Συνεπῶς, ὑπάρχουν ἐν γένει σημεῖα τῆς N στά ὁποῖα, ἐπειδή τό καθένα εἶναι ἡ εἰκόνα πολλῶν διαφορετικῶν σημείων τῆς M, ὁρίζονται περισσότερα τοῦ ἑνός διαφορετικά διανύσματα.

Τό συμπέρασμα εἶναι ὅτι ἡ κατασκευή push forward, πού ἐφαρμόζεται στά ἀνταλλοίωτα διανυσματικά πεδία, ἐν γένει δέν παράγει διανυσματικά πεδία. ῞Οταν ὅμως ἡ $f: M \to N$ εἶναι ἀμφί καί ἐπί, τότε τό $(f_{\to}\xi^a)$ εἶναι ἕνα ἀνταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο τῆς N.

Στό ἑπόμενο βῆμα θεωροῦμε ἕνα τυχαῖο συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο η_a τῆς N. [῾Υπενθυμίζεται ὅτι τά συναλλοίωτα διανύσματα εἶναι οἱ γραμμικές ἀπεικονίσεις ἀπό τά ἀνταλλοίωτα διανύσματα στούς πραγματικούς ἀριθμούς καί ὅτι τά συναλλοίωτα διανυσματικά πεδία εἶναι οἱ γραμμικές ἀπεικονίσεις ἀπό τά ἀνταλλοίωτα διανυσματικά πεδία στά βαθμωτά πεδία] καί κατασκευάζουμε ἕνα συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $(f_{\leftarrow}\eta_a)$ στό M ὡς ἑξῆς: Γιά κάθε ἀνταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο w^a τῆς M καί γιά κάθε σημεῖο $m \in M$ κατασκευάζουμε τό διάνυσμα $(f_{\to} w^a)$ στό σημεῖο $f(m) = n$ τῆς N (τό $f_{\to} w^a$ στό n, ὅταν ξέρουμε καί τό m, εἶναι μονοσήμαντα ὁρισμένο!) καί κατόπιν βρίσκουμε τόν πραγματικό ἀριθμό

$(f_{\rightarrow} w^a)\eta_a|_n$, πού εἶναι ὁ πολλαπλασιασμός μέ συστολή τῶν $(f_{\rightarrow} w^a)$ καί η_a στό $n \in N$. θέτοντας λοιπόν

$$(f_{\leftarrow}\eta_a)\, w^a|_m = \eta_a(f_{\rightarrow} w^a)|_n \tag{5.3}$$

καί ἐπαναλαμβάνοντας τήν παραπάνω κατασκευή γιά κάθε σημεῖο τῆς M κατασκευάζουμε τήν ἀπεικόνιση $f_{\leftarrow}\eta_a$ ἀπό τό σύνολο τῶν ἀνταλλοίωτων διανυσματικῶν πεδίων τῆς M στό σύνολο τῶν βαθμωτῶν πεδίων τῆς M. Τέλος ἐπειδή ἡ ἀπεικόνιση $f_{\leftarrow}\eta_a$ δρᾶ γραμμικά στά ἀνταλλοίωτα διανυσματικά πεδία τῆς M, ὁρίζει τό συναλλοίωτο διναυσματικό πεδίο $f_{\leftarrow}\eta_a$ τῆς M πού λέγεται τό pull back τοῦ η_a τῆς N. Τονίζουμε, ἄν καί φαίνεται καί ἀπό τήν κατασκευή, ὅτι σέ κάθε σημεῖο τῆς M ὁρίζεται ἕνα καί μόνο ἕνα συναλλοίωτο διάνυσμα. Τό pull back λοιπόν, χωρίς καμμιά ἐπιπλέον συνθήκη στήν ἀπεικόνιση $f: M \longrightarrow N$, ὁρίζει πάντοτε συναλλοίωτα διανυσματικά πεδία.

Τό τελικό βῆμα γίνεται μέ τήν ἐφαρμογή τῶν ἰδεῶν τῶν παραπάνω κατασκευῶν στά τυχαῖα ἀνταλλοίωτα καί συναλλοίωτα τανυστικά πεδία. Π.χ., ὅταν T_{abc} εἶναι ἕνα συναλλοίωτο τανυστικό πεδίο τῆς N, τό pull back του $f_{\leftarrow} T_{abc}$ ὁρίζεται ἀπό τή σχέση

$$(f_{\leftarrow} T_{abc})\, y^a w^b z^c = T_{abc}(f_{\rightarrow} y^a)(f_{\rightarrow} w^b)(f_{\rightarrow} z^c), \tag{5.4}$$

γιά κάθε διανυσματικά πεδία y^a, w^b καί z^c τῆς M. Παρόμοια, ὅταν τό K^{abc} εἶναι ἕνα ἀνταλλοίωτο τανυστικό πεδίο τῆς M, τό push forward του ὁρίζεται ἀπό τήν

$$(f_{\rightarrow} K^{abc})\, y_a w_b z_c = K^{abc}(f_{\leftarrow} y_a)(f_{\leftarrow} w_b)(f_{\leftarrow} z_c), \tag{5.5}$$

γιά κάθε συναλλοίωτα διανυσματικά πεδία y_a, w_b καί z_c τῆς N. Ἀκριβῶς ὅπως καί γιά διανύσματα, τό pull back ὁρίζει πάντοτε ἕνα συναλλοίωτο τανυστικό πεδίο τῆς M. Ἀντίθετα, τό push forward ὁρίζει τανυστές στά σημεῖα $f(m)$, $m \in M$ τῆς N. Ὅταν ἡ $f: M \longrightarrow N$ εἶναι ἀμφί καί ἐπί, καί τό push forward ὁρίζει τανυστικά πεδία στήν πολλαπλότητα N.

<u>Παρατήρηση</u>: Τό push forward, καί ὅταν ἀκόμη ἡ $f: M \rightarrow N$ εἶναι ἀμφί καί ἐπί καί συνεπῶς ὁρίζει τανυστικά πεδία, ἔχει ἕνα ἀκόμη ἐλάττωμα: καταστρέφει ἐν γένει τήν ἰδιότητα τῶν τανυστικῶν πεδίων νά εἶναι C^∞. Ἀντίθετα, τό pull back διατηρεῖ καί τήν ἰδιότητα αὐτή. (Ὑπενθυμίζεται ὅτι ὑποθέτουμε πώς ἡ $f: M \longrightarrow N$ εἶναι C^∞). Γιά νά καταλάβουμε γιατί συμβαίνει αὐτό, ὑποθέτουμε πώς ἡ f εἶναι ἀμφί καί ἐπί (ὁπότε ὑπάρχει καί ἡ f^{-1}) καί θεωροῦμε τή δράση της πάνω σέ βαθμωτά πεδία. Ὅταν $g: N \longrightarrow \mathbb{R}$,

τότε ἡ $(f_{\leftarrow} g) = g \circ f$ εἶναι C^∞ σάν σύνθεση C^∞ συναρτήσεων. Ἀντίθετα, ὅταν $g: M \longrightarrow \mathbb{R}$, τό push forward τῆς g, πού ὁρίζεται σάν τό pull back μέσω τῆς $f^{-1}: N \longrightarrow M$, ἰσοῦται μέ $(f_{\rightarrow} g) = (f^{-1}_{\leftarrow} g) = g \circ f^{-1}$ καί ἐν γένει δέν εἶναι C^∞ γιατί ἡ f^{-1} δέν εἶναι ἐν γένει C^∞.

Εὔκολα ἀποδεικνύεται πώς ἄν ἡ $f: M \longrightarrow N$ εἶναι ἀμφί, ἐπί, C^∞ καί ἡ f^{-1} εἶναι C^∞, τότε καί τό push forward κατασκευάζει C^∞ τανυστικά πεδία. Φυσικά στήν περίπτωση αὐτή ἡ f εἶναι διαμορφισμός καί οἱ πολλαπλότητες M καί N, σάν διαμορφικές, ἀποτελοῦν οὐσιαστικά τήν ἴδια πολλαπλότητα.

Θά τελειώσουμε τήν ἑνότητα μέ τόν ὑπολογισμό τῶν pull backs καί τῶν push forwards συναρτήσει συνιστωσῶν. Στήν παράγραφο αὐτή οἱ δεῖκτες θά παριστάνουν τίς συνιστῶσες τῶν τανυστῶν.

Ἐάν $\{x^a\}$ καί $\{f^a\}$ εἶναι συντεταγμένες τῶν πολλαπλοτήτων M καί N, μιά ἀπεικόνιση $f: M \longrightarrow N$ δίνεται μέ τή βοήθεια τῶν συναρτήσεων $f^a = f^a(x^\mu)$, $a = 1, 2, \ldots, \dim N$. Ἡ f εἶναι C^∞ ἐάν ὅλες οἱ f^a εἶναι C^∞ συναρτήσεις τῶν πραγματικῶν μεταβλητῶν x^μ, $\mu = 1, 2, \ldots, \dim M$. Ἡ $g: N \rightarrow \mathbb{R}$ εἶναι ἡ πραγματική συνάρτηση $g = g(f^a)$ τῶν $\dim N$ τό πλῆθος πραγματικῶν μεταβλητῶν f^a. Τό pull back της εἶναι ἡ συνάρτηση $(f_{\leftarrow} g)(x^\mu) = g(f^a(x^\mu))$ τῶν x^μ. Τό push forward ὁρίζεται ἀπό τή σχέση $(f_{\rightarrow} \xi^a)(\chi) = \xi^a(f_{\leftarrow} \chi)$, γιά κάθε συνάρτηση $\chi = \chi(f^a)$. Ἐπειδή ἡ δράση τῶν διανυσμάτων πάνω στά βαθμωτά δίνεται γενικά ἀπό σχέσεις τῆς μορφῆς $\xi^a(g) = \xi^\mu\, \partial g/\partial x^\mu$ ὅπου $\{x^\mu\}$ εἶναι συντεταγμένες τῆς πολλαπλότητας, γιά τό push forward βρίσκουμε ὅτι πρέπει νά ἱκανοποιεῖται ἡ σχέση

$$(f_{\rightarrow} \xi^a)\frac{\partial \chi}{\partial f^a} = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\chi(f^a(x^\mu))\right) = \xi^\mu\left(\frac{\partial \chi}{\partial f^a}\right)\left(\frac{\partial f^a}{\partial x^\mu}\right),$$

γιά κάθε βαθμωτό $\chi: N \longrightarrow \mathbb{R}$, καί συνεπῶς

$$(f_{\rightarrow} \xi^a) = \xi^\mu\left(\frac{\partial f^a}{\partial x^\mu}\right). \tag{5.6}$$

Τό pull back τῶν συναλλοίωτων διανυσματικῶν πεδίων δίνεται ἀπό τή σχέση (5.3) πού μέ τή βοήθεια καί τῆς (5.6) γράφεται

$$(f_{\leftarrow}\eta_a)\, W^a = \eta_\mu (f_{\rightarrow} W^\mu) = \eta_\mu\, W^a\left(\frac{\partial f^\mu}{\partial x^a}\right),$$

γιά κάθε ἀναλλοίωτο διανυσματικό w^a τῆς M καί συνεπῶς

$$(f_{\leftarrow} \eta_a) = \eta_m \left(\frac{\partial f^m}{\partial x^a}\right) . \tag{5.7}$$

Τέλος μέ τή βοήθεια τῶν (5.6) καί (5.7) βρίσκουμε καί τίς σχέσεις

$$(f_{\to} K^{abc}) = K^{pqr} \left(\frac{\partial f^a}{\partial x^p}\right)\left(\frac{\partial f^b}{\partial x^q}\right)\left(\frac{\partial f^c}{\partial x^r}\right) \tag{5.8}$$

καί

$$(f_{\leftarrow} T_{abc}) = T_{pqr} \left(\frac{\partial f^p}{\partial x^a}\right)\left(\frac{\partial f^q}{\partial x^b}\right)\left(\frac{\partial f^r}{\partial x^c}\right) . \tag{5.9}$$

6. Παράγωγοι Lie.

Ἡ παράγωγος Lie εἶναι ἡ πράξη πού ὑπολογίζει τήν παράγωγο ἑνός τανυστικοῦ πεδίου κατά τήν διεύθυνση πού προσδιορίζεται ἀπό κάποιο ἀναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο. Ἐπιπλέον, ἐπειδή τά ἀναλλοίωτα διανυσματικά πεδία σέ μιά πολλαπλότητα παριστάνουν καί μονοπαραμετρικές οἰκογένειες μετασχηματισμῶν τῆς πολλαπλότητας (τούς μετασχηματισμούς πού, γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό t, παριστάνουν τή μετατόπιση τῶν σημείων τῆς πολλαπλότητας πάνω στίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες τοῦ ἀναλλοίωτου διανυσματικοῦ πεδίου κατά αὔξηση τῆς παραμέτρου κατά t) οἱ παράγωγοι Lie εἶναι ἕνα μέτρο τῶν ἀπειροστῶν μεταβολῶν πού ὑφίστανται τά διάφορα τανυστικά πεδία κάτω ἀπό τήν ἐπίδραση τῶν μετασχηματισμῶν αὐτῶν.

Ἄς εἶναι M μία C^∞ παρασυμπαγής πολλαπλότητα, ∇_a ἕνας τελεστής παραγωγίσεως τῆς M καί ξ^a ἕνα C^∞ ἀναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο τῆς M (Στήν ἑνότητα αὐτή δέν χρειάζεται νά ὑποτεθεῖ ἡ ὕπαρξη μετρικοῦ τανυστῆ στή M). Ἡ παράγωγος Lie κατά τή διεύθυνση τοῦ ξ^a, πού συμβολίζεται $\mathcal{L}_\xi$, εἶναι ἕνας διαφορικός τελεστής πού ἀπεικονίζει C^∞ τανυστικά πεδία τῆς M σέ C^∞ τανυστικά πεδία τῆς M μέ ἀκριβῶς τήν ἴδια δομή δεικτῶν ἔτσι ὥστε:

(i) Ἡ δράση τοῦ $\mathcal{L}_\xi$ στά βαθμωτά πεδία τῆς M εἶναι ἡ παράγωγος τοῦ βαθμωτοῦ πεδίου κατά τή διεύθυνση ξ^a : $\mathcal{L}_\xi f = \xi^m \nabla_m f$, γιά κάθε C^∞ βαθμωτό $f : M \to \mathbb{R}$.

(ii) Ὁ $\mathcal{L}_\xi$ δρᾶ γραμμικά:

$$\mathcal{L}_\xi (T^{\cdots}_{\cdots} + S^{\cdots}_{\cdots}) = \mathcal{L}_\xi T^{\cdots}_{\cdots} + \mathcal{L}_\xi S^{\cdots}_{\cdots} .$$

(iii) Ὁ $\mathcal{L}_\xi$ ἱκανοποιεῖ τόν κανόνα τοῦ Leibnitz :

$$\mathcal{L}_\xi (S^{\cdots}_{\cdots} T^{\cdots}_{\cdots}) = (\mathcal{L}_\xi S^{\cdots}_{\cdots}) T^{\cdots}_{\cdots} + S^{\cdots}_{\cdots} \mathcal{L}_\xi T^{\cdots}_{\cdots} .$$

(iv) Οἱ τελεστές $\mathcal{L}_\xi$ καί ∇_a ἀντιμετατίθενται ὅταν δροῦν σέ βαθμωτά πεδία:

$$\mathcal{L}_\xi (\nabla_a f) = \nabla_a (\mathcal{L}_\xi f) , \quad \forall f : M \to \mathbb{R} .$$

Ἔχοντας ἐπιβάλλει στόν $\mathcal{L}_\xi$ τίς τέσσερις παραπάνω συνθῆκες θά προσπαθήσουμε τώρα νά τόν προσδιορίσουμε, προσδιορίζοντας τή δράση του στά διάφορα τανυστικά πεδία.

Πρῶτα προσδιορίζουμε τό $\mathcal{L}_\xi \eta^a$, γιά τό τυχόν ἀναλλοίωτο

η^a. Γιά τό σκοπό αὐτό θεωροῦμε τό τυχόν βαθμωτό f , κατασκευάζουμε τό βαθμωτό $\eta^a \nabla_a f$ καί θεωροῦμε τήν ἐξίσωση

$$\mathcal{L}_\xi (\eta^a \nabla_a f) = (\mathcal{L}_\xi \eta^a)(\nabla_a f) + \eta^a \nabla_a (\mathcal{L}_\xi f), \tag{6.1}$$

πού εἶναι συνέπεια τῶν ὑποθέσεων (iii) καί (iv). Ὁ πρῶτος ὅμως καί ὁ τρίτος ὅρος τῆς (6.1) εἶναι γνωστοί γιατί ὁ $\mathcal{L}_\xi$ δρᾶ σέ βαθμωτά πεδία. Ἡ ἰδέα λοιπόν εἶναι νά χρησιμοποιήσουμε τήν (6.1) γιά νά ὑπολογίσουμε τό μόνο ἄγνωστο τῆς (6.1) πού εἶναι ὁ $\mathcal{L}_\xi \eta^a$. Ἔχουμε

$$\mathcal{L}_\xi (\eta^a \nabla_a f) = \xi^m \nabla_m (\eta^a \nabla_a f) = \xi^m \eta^a \nabla_m \nabla_a f + (\xi^m \nabla_m \eta^a)(\nabla_a f),$$

$$\eta^a \nabla_a (\mathcal{L}_\xi f) = \eta^a \nabla_a (\xi^m \nabla_m f) = (\eta^a \nabla_a \xi^m)(\nabla_m f) + $$
$$+ \eta^a \xi^m \nabla_a \nabla_m f = (\eta^m \nabla_m \xi^a)(\nabla_a f) + \eta^a \xi^m \nabla_m \nabla_a f ,$$

καί ἀντικαθιστώντας στήν (6.1), ἐξαλείφοντας κοινούς ὅρους καί ἀπαλείφοντας τό τυχαῖο $\nabla_a f$ ἀπό τά δύο μέλη τῆς ἐξίσωσης πού προκύπτει βρίσκουμε ὅτι

$$\mathcal{L}_\xi \eta^a = \xi^m \nabla_m \eta^a - \eta^m \nabla_m \xi^a , \tag{6.2}$$

πού ἐκφράζει τή δράση τοῦ $\mathcal{L}_\xi$ στό τυχαῖο ἀνταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο η^a μέ τή βοήθεια τοῦ τελεστῆ παραγωγίσεως ∇_a.

Κατόπιν ὑπολογίζουμε τό $\mathcal{L}_\xi$ γιά τό τυχόν συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο k_a . Γιά τό σκοπό αὐτό θεωροῦμε τυχαῖο ἀνταλλοίωτο X^a , κατασκευάζουμε τό βαθμωτό $k_a X^a$ καί γράφουμε τόν κανόνα τοῦ Leibnitz

$$\mathcal{L}_\xi (k_a X^a) = (\mathcal{L}_\xi k_a) X^a + k_a (\mathcal{L}_\xi X^a) . \tag{6.3}$$

Ὅπως καί προηγουμένως ἔτσι καί στήν ἐξίσωση (6.3) ξέρουμε τούς πρῶτο καί τρίτο ὅρους της. Τούς ὑπολογίζουμε:

$$\mathcal{L}_\xi (k_a X^a) = \xi^m \nabla_m (k_a X^a) = (\xi^m \nabla_m k_a) X^a + k_a (\xi^m \nabla_m X^a),$$

$$k_a (\mathcal{L}_\xi X^a) = k_a (\xi^m \nabla_m X^a - X^m \nabla_m \xi^a) =$$
$$= k_a \xi^m (\nabla_m X^a) - k_m X^a \nabla_a \xi^m .$$

Ἀντικατάσταση στήν (6.3) καί ἀπαλοιφή τοῦ κοινοῦ (καί τυχαίου) διανυσματικοῦ X^a δίνει

$$\mathcal{L}_\xi k_a = \xi^m \nabla_m k_a + k_m \nabla_a \xi^m , \tag{6.4}$$

πού ἐκφράζει τή δράση τοῦ $\mathcal{L}_\xi$ στό τυχαῖο συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο k_a .

Μέ τή βοήθεια τῶν (6.2) καί (6.4) μποροῦμε τώρα νά ὑπολογίσουμε τήν παράγωγο Lie ἑνός τυχαίου τανυστικοῦ πεδίου. Π.χ., γιά νά ὑπολογίσουμε τό $\mathcal{L}_\xi T^{ab}{}_c$ θεωροῦμε τά τυχαῖα διανυσματικά πεδία X_a, Y_b καί Z^c , κατασκευάζουμε τό βαθμωτό $T^{ab}{}_c X_a Y_b Z^c$, γράφουμε τόν κανόνα τοῦ Leibnitz

$$\mathcal{L}_\xi (T^{ab}{}_c X_a Y_b Z^c) = (\mathcal{L}_\xi T^{ab}{}_c) X_a Y_b Z^c +$$
$$+ T^{ab}{}_c (\mathcal{L}_\xi X_a) Y_b Z^c + T^{ab}{}_c X_a (\mathcal{L}_\xi Y_b) Z^c + T^{ab}{}_c X_a Y_b (\mathcal{L}_\xi Z^c),$$

ἀντικαθιστοῦμε τά $\mathcal{L}_\xi X_a$, $\mathcal{L}_\xi Y_b$, καί $\mathcal{L}_\xi Z^c$, ἀναπτύσσουμε τό $\xi^m \nabla_m (T^{ab}{}_c X_a Y_b Z^c)$, ἀλλάζουμε μερικούς βουβούς δεῖκτες καί τελικά ἐξαλείφουμε τά $X_a Y_b Z^c$. Βρίσκουμε

$$\mathcal{L}_\xi T^{ab}{}_c = \xi^m \nabla_m T^{ab}{}_c - T^{mb}{}_c (\nabla_m \xi^a) -$$
$$- T^{am}{}_c (\nabla_m \xi^b) + T^{ab}{}_m (\nabla_c \xi^m) . \tag{6.5}$$

Τελείως γενικά, ἡ $\mathcal{L}_\xi$ κάθε $\binom{r}{s}$ τανυστικοῦ πεδίου ἀποτελεῖται ἀπό $r+s+1$ ὅρους. Ὁ ἕνας ἀπ' αὐτούς εἶναι ὁ $\xi^m \nabla_m T^{\cdots}_{\cdots}$, πού μοιάζει μέ τήν παράγωγο τοῦ τανυστικοῦ πεδίου κατά τή διεύθυνση τοῦ ξ^a . Οἱ ὑπόλοιποι $r+s$ ὅροι, ἴσοι σέ πλῆθος μέ τό πλῆθος τῶν δεικτῶν τοῦ τανυστικοῦ πεδίου, προέρχονται ἀπό διαδοχικές ἀντικαταστάσεις τῶν δεικτῶν τοῦ τανυστικοῦ πεδίου μέ κάποιο βουβό δείκτη, εἶναι ἀλγεβρικοί ὡς πρός τό τανυστικό πεδίο, καί περιλαμβάνουν παραγώγους τοῦ ξ^a . Οἱ ὅροι αὐτοί ἐμφανίζονται μέ "μεῖον" ὅταν ἀντικαθίσταται ἕνας ἀνταλλοίωτος δείκτης καί μέ "σύν" ὅταν ἀντικαθίσταται ἕνας συναλλοίωτος δείκτης.

Ὅπως ξέρουμε, σέ κάθε (παρασυμπαγή) πολλαπλότητα ὑπάρχουν ἄπειροι τελεστές παραγωγίσεως, ἀφοῦ σέ κάθε C^∞ τανυστικό πεδίο τῆς μορφῆς C^a_{bc} πού εἶναι συμμετρικό ὡς πρός τούς δύο συναλλοίωτους δεῖκτες του ἀντιστοιχεῖ ἕνας τελεστής παραγωγίσεως. Ποιόν λοιπόν ἀπ' ὅλους αὐτούς τούς τελεστές πρέπει νά χρησιμοποιήσουμε στόν ὑπολογισμό τῶν παραγώγων Lie; Μήπως ὑπάρχουν καί ἄπειροι παράγωγοι Lie; Ἡ ἀπάντηση εἶναι ἁπλή. Γιά τή γραφή ἐξισώσεων σάν τίς ἐξισώσεις 6.2, 6.4 καί 6.5 ἀπαιτεῖται ἡ χρήση κάποιου τελεστή ∇_a ἀλλά τό τελικό ἀποτέλεσμα, δηλ. ἡ παράγωγος $\mathcal{L}_\xi T^{\cdots}_{\cdots}$, εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τόν τελεστή παραγωγίσεως πού χρησιμοποιήθηκε. Συνεπῶς, ὑπάρχει ἀκριβῶς μία παραγώγιση Lie σέ κάθε πολλαπλότητα. Διαφορικοί τελεστές πού εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπό τόν συγκεκριμένο τελεστή παραγωγίσεως πού χρησιμοποιήθηκε γιά νά ἐκφραστοῦν ὀνομάζονται concomitants. Ἡ παράγωγος Lie εἶναι μιά concomitant καί συνεπῶς στούς συγκεκριμένους ὑπολογισμούς μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τόν τελεστή παραγωγίσεως πού ἁπλοποιεῖ περισσότερο τίς πράξεις μας.

Ἡ ἀνεξαρτησία τῆς παραγώγου Lie ἀπό τήν ἐκλογή τοῦ τελεστή παραγωγίσεως ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς γιά τό τανυστικό πεδίο $T^{ab}{}_c$ τῆς ἐξίσωσης (6.5): Ἄς εἶναι $\tilde{\nabla}_a$ ἕνας ἄλλος τελεστής παραγωγίσεως τῆς M. Συνεπῶς ὑπάρχει τό τανυστικό πεδίο $C^a{}_{bc} = C^a{}_{(bc)}$ τέτοιο ὥστε $\tilde{\nabla}_a \xi^b = \nabla_a \xi^b + C_a{}^b{}_n \xi^n$ καί

$$\tilde{\nabla}_m T^{ab}{}_c = \nabla_m T^{ab}{}_c + T^{nb}{}_c C^a_{nm} + T^{an}{}_c C^b_{nm} - T^{ab}{}_n C^n{}_{cm} .$$

Συνεπῶς

$$\tilde{\mathcal{L}}_\xi T^{ab}{}_c = \xi^m \tilde{\nabla}_m T^{ab}{}_c - T^{mb}{}_c (\tilde{\nabla}_m \xi^a) - T^{am}{}_c (\tilde{\nabla}_m \xi^b) + T^{ab}{}_m (\tilde{\nabla}_c \xi^m) =$$

$$= \xi^m \left[\nabla_m T^{ab}{}_c + T^{nb}{}_c C^a_{nm} + T^{an}{}_c C^b_{nm} - T^{ab}{}_n C^n{}_{cm} \right] - T^{mb}{}_c \left[\nabla_m \xi^a + C^a_{mn} \xi^n \right] - T^{am}{}_c \left[\nabla_m \xi^b + C^b_{mn} \xi^n \right] + T^{ab}{}_m \left[\nabla_c \xi^m + C_c{}^m{}_n \xi^n \right] =$$

$$= \mathcal{L}_\xi T^{ab}{}_c + C^a_{mn} \left[\xi^m T^{nb}{}_c - \xi^n T^{mb}{}_c \right] + C^b_{mn} \left[\xi^m T^{an}{}_c - T^{am}{}_c \xi^n \right] - \xi^m T^{ab}{}_n C^n{}_{cm} + T^{ab}{}_m C^m{}_{cn} \xi^n =$$

$$= \mathcal{L}_\xi T^{ab}{}_c ,$$

ὅπου στήν προτελευταία σχέση ὁ δεύτερος καί ὁ τρίτος ὅρος μηδενίζονται ἐπειδή τό C^a_{mn} εἶναι συμμετρικό, ἐνῶ οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι εἶναι ἴσοι, πράγμα πού φαίνεται ἀπό ἀνταλλαγή βουβῶν δεικτῶν.

<u>Παρατήρηση 1η</u>: Ἡ παράγωγος Lie εἶναι γραμμική ὡς πρός τή διεύθυνση τῆς παραγωγίσεως:

$$\mathcal{L}_{\alpha\xi^a + \beta\eta^a} T^{\cdots}_{\cdots} = \alpha \mathcal{L}_\xi T^{\cdots}_{\cdots} + \beta \mathcal{L}_\eta T^{\cdots}_{\cdots} ,$$

ὅπου α καί β εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί. Ἡ ἰδιότητα αὐτή ἀποδεικνύεται ἀμέσως μέ τή βοήθεια τῶν ἐξισώσεων 6.2, 6.4 καί 6.5.

<u>Παρατήρηση 2η</u>: Ἀπό τή σχέση (6.2) συμπεραίνουμε ὅτι ἡ παράγωγος Lie ἑνός ἀνταλλοίωτου διανυσματικοῦ πεδίου εἶναι ἀντισυμμετρική ὡς πρός τήν ἐναλλαγή τῶν δύο διανυσματικῶν πεδίων πού παριστάνουν τή διεύθυνση παραγωγίσεως καί τό πεδίο πού παραγωγίζεται:

$\mathcal{L}_\xi \eta^a = -\mathcal{L}_\eta \xi^a$. Ἡ σχέση αὐτή ἰσχύει μόνο γιά τήν παράγωγο ἀνταλλοίωτων διανυσματικῶν πεδίων. Τήν ἰδιότητα αὐτή τή χρησιμοποιοῦμε γιά νά ὁρίσουμε ἕναν ἀντισυμμετρικό πολλαπλασιασμό στό σύνολο τῶν C^∞ ἀνταλλοίωτων διανυσματικῶν πεδίων μιᾶς πολλαπλότητας:

$$[x^a, y^a] = x^m \nabla_m y^a - y^m \nabla_m x^a = \mathcal{L}_x y^a = -\mathcal{L}_y x^a .$$

Ἡ ἀγκύλη $[x^a, y^a]$ δύο ἀνταλλοίωτων διανυσματικῶν πεδίων εἶναι ἕνα ἄλλο ἀνταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο. Θά ἀποδείξουμε παρακάτω ὅτι ἡ ἀγκύλη $[\cdot, \cdot]$ ἱκανοποιεῖ τήν ταυτότητα τοῦ Jacobi

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 ,$$

γιά τρία τυχαῖα ἀνταλλοίωτα διανυσματικά πεδία x^a, y^a καί z^a. Συνεπῶς, μέ τόν ὁρισμό τοῦ ἀντισυμμετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ $[x, y]^a = \mathcal{L}_x y^a$ τό σύνολο τῶν C^∞ ἀνταλλοίωτων διανυσματικῶν πεδίων μιᾶς πολλαπλότητας ἀποκτᾶ τή δομή μιᾶς ἄλγεβρας Lie.

<u>Παρατήρηση 3η:</u> Γιά τυχαῖα ἀνταλλοίωτα ξ^a καί η^a καί τυχαῖο βαθμωτό f ἰσχύει

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta f - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi f = \mathcal{L}_{[\xi,\eta]} f . \qquad (6.6)$$

Πράγματι,

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta f - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi f = \xi^m \nabla_m (\eta^n \nabla_n f) - \eta^m \nabla_m (\xi^n \nabla_n f) =$$

$$= (\xi^m \nabla_m \eta^n)(\nabla_n f) + \xi^m \eta^n \nabla_m \nabla_n f - (\eta^m \nabla_m \xi^n)(\nabla_n f) - \eta^m \xi^n \nabla_m \nabla_n f =$$

$$= (\xi^m \nabla_m \eta^n - \eta^m \nabla_m \xi^n)(\nabla_n f) = [\xi, \eta]^n \nabla_n f = \mathcal{L}_{[\xi,\eta]} f .$$

Μέ τή βοήθεια τῆς σχέσης (6.6) μποροῦμε τώρα εὔκολα νά ἀποδείξουμε τήν ἰσχύ τῆς ταυτότητας τοῦ Jacobi. Γιά τό τυχαῖο βαθμωτό f ἔχουμε

$$
\begin{aligned}
[x,[y,z]]f &= \mathcal{L}_{[x,[y,z]]} f = \mathcal{L}_x \mathcal{L}_{[y,z]} f - \mathcal{L}_{[y,z]} \mathcal{L}_x f = \\
&= \mathcal{L}_x(\mathcal{L}_y \mathcal{L}_z f - \mathcal{L}_z \mathcal{L}_y f) - (\mathcal{L}_y \mathcal{L}_z - \mathcal{L}_z \mathcal{L}_y)(\mathcal{L}_x f) = \\
&= \mathcal{L}_x \mathcal{L}_y \mathcal{L}_z f - \mathcal{L}_x \mathcal{L}_z \mathcal{L}_y f - \mathcal{L}_y \mathcal{L}_z \mathcal{L}_x f + \mathcal{L}_z \mathcal{L}_y \mathcal{L}_x f \quad ,
\end{aligned}
$$

καί συνεπῶς προσθέτοντας καί τούς ὑπόλοιπους ὀκτώ ὅρους τοῦ ἀριστεροῦ μέλους τῆς ταυτότητας τοῦ Jacobi, πού προκύπτουν ἀπό τούς παραπάνω τέσσερις μέ κυκλική ἐναλλαγή, βρίσκουμε ὅτι τό διανυσματικό πεδίο πού ἀποτελεῖ τό ἀριστερό μέλος τῆς ταυτότητας τοῦ Jacobi δίνει μηδέν ὅταν δράσει στό τυχαῖο βαθμωτό πεδίο f . Ἄρα τό ἐν λόγω διανυσματικό πεδίο ἰσοῦται μέ τό μηδέν.

Παράδειγμα: Ἡ παράγωγος Lie τοῦ τανυστικοῦ πεδίου τοῦ Kronecker κατά ὁποιαδήποτε διεύθυνση ξ^a εἶναι μηδέν. Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi \delta^a{}_b &= \xi^m \nabla_m \delta^a{}_b - \delta^m{}_b (\nabla_m \xi^a) + \delta^a{}_m (\nabla_b \xi^m) = \\
&= -(\nabla_b \xi^a) + (\nabla_b \xi^a) = 0,
\end{aligned}
$$

ἐφ᾽ ὅσον $\nabla_m \delta^a{}_b = 0$.

7. Κανονικοί μετασχηματισμοί

Μετά ἀπό τή θεμελίωση τῶν μαθηματικῶν ἐννοιῶν τῶν ἑνοτήτων 5 καί 6 συνεχίζουμε τή μελέτη τῆς Μηχανικῆς.

Θεωροῦμε ἕνα φυσικό σύστημα πού παριστάνεται μέ χῶρο τῶν φάσεων Γ, συμπλεκτική δομή Ω_{ab} καί Χαμιλτονιανή $H : \Gamma \to \mathbb{R}$. Ἄς εἶναι $\Psi : \Gamma \to \Gamma$ ἕνας διαμορφισμός (δηλαδή ἀπεικόνιση ἀμφί καί ἐπί τέτοια ὥστε ἡ Ψ καί ἡ Ψ^{-1} νά εἶναι C^∞) τοῦ χώρου τῶν φάσεων. Ἡ Ψ λέγεται κανονικός μετασχηματισμός (canonical transformation) ἐάν διατηρεῖ τή συμπλεκτική δομή, δηλαδή ἐάν ἱκανοποιεῖ τή σχέση

$$\Psi(\Omega_{ab}|_p) = \Omega_{ab}|_{\Psi(p)} \ , \quad \forall p \in \Gamma. \tag{7.1}$$

Ὑπενθυμίζεται ὅτι ἀπό τή συμπλεκτική δομή Ω_{ab} κατασκευάζονται οἱ ἐξισώσεις Hamilton μέ τή βοήθεια τῶν ὁλοκληρωτικῶν καμπύλων τοῦ $\Omega^{ma}(D_m H)$ . . Οἱ κανονικοί μετασχηματισμοί λοιπόν εἶναι ἐκεῖνοι οἱ μετασχηματισμοί πού διατηροῦν τή μορφή τῶν ἐξισώσεων Hamilton. Ἐπιπλέον, σάν διαμορφισμοί διατηροῦν καί τή γεωμετρική δομή τοῦ χώρου τῶν φάσεων.

Διακρίνουμε δύο κατηγορίες κανονικῶν μετασχηματισμῶν, τούς συνεχεῖς καί τούς διακεκριμένους κανονικούς μετασχηματισμούς. Οἱ συνεχεῖς, πού παρουσιάζουν καί τό μεγαλύτερο ἐνδιαφέρον, εἶναι οἱ μετασχηματισμοί πού ἀνήκουν σέ μιά μονοπαραμετρική οἰκογένεια μετασχηματισμῶν πού μεταβάλλεται συνεχῶς μέ τήν παράμετρο. Ἔχουμε δηλαδή ἕναν κανονικό μετασχηματισμό $\Psi_t : \Gamma \to \Gamma,$ γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό t. Συνήθως διαλέγουμε τήν παράμετρο t ἔτσι ὥστε ὁ Ψ_0 νά εἶναι ὁ ταυτοτικός κανονικός μετασχηματισμός

$$\Psi_0(p) = p \ , \quad \forall p \in \Gamma.$$

Κάθε συνεχής μονοπαραμετρική οἰκογένεια μετασχηματισμῶν μιᾶς πολλαπλότητας Γ ὁρίζει μιά οἰκογένεια καμπύλων τέτοια ὥστε ἀπό κάθε σημεῖο p τῆς πολλαπλότητας περνᾶ ἀκριβῶς μία καμπύλη τῆς οἰκογένειας: Ἡ καμπύλη πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖο p εἶναι ἡ καμπύλη

$$\gamma_p : \mathbb{R} \ni t \longrightarrow \gamma_p(t) = \Psi_t(p) \in \Gamma \quad , \tag{7.2}$$

πού παριστᾶ τίς διάφορες εἰκόνες τοῦ σημείου p μέσω τῶν διαφόρων μετασχηματισμῶν Ψ_t. Ἄς εἶναι ξ^a τό διανυσματικό πεδίο πού ἐφάπτεται ὅλων αὐτῶν τῶν καμπυλῶν σέ κάθε σημεῖο τῆς πολλαπλότητας. Τό ξ^a λέγεται ὁ ἀπειροστός μετασχηματισμός τῆς οἰκογένειας τῶν μετασχηματισμῶν $\Psi_t : \Gamma \to \Gamma$. Προφανῶς, ὅταν γνωρίζουμε τόν ἀπειροστό μετασχηματισμό ξ^a μποροῦμε νά βροῦμε τήν οἰκογένεια τῶν μετασχηματισμῶν Ψ_t προσδιορίζοντας τίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες τοῦ ξ^a . Ὁ προσδιορισμός τῶν (πεπερασμένων) μετασχηματισμῶν Ψ_t ἀπό τόν ἀπειροστό μετασχηματισμό ξ^a συνήθως ἀναφέρεται σάν ἡ ἐκθετοποίηση (exponentiation) τοῦ μετασχηματισμοῦ ξ^a . Συνήθως οἱ ἀπειροστοί μετασχηματισμοί εἶναι πολύ πιό χρήσιμοι - κυρίως γιατί εἶναι πολύ πιό εὔκολο νά προσδιοριστοῦν - ἀπό τούς πεπερασμένους μετασχηματισμούς.

Ἄς εἶναι Γ πάλι ὁ χῶρος τῶν φάσεων ἑνός συστήματος. Τό διανυσματικό πεδίο ξ^a τοῦ Γ λέγεται <u>ἀπειροστός κανονικός μετασχηματισμός</u> (infinitesimal canonical transformation) ἐάν

$$\mathcal{L}_\xi \Omega_{ab} = 0 . \tag{7.3}$$

Μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ἐκθετοποίηση ἀπειροστῶν κανονικῶν μετασχηματισμῶν παράγει κανονικούς μετασχηματισμούς.

Ὁ σκοπός μας τώρα εἶναι νά προσδιορίσουμε ὅλους τούς ἀπειροστούς κανονικούς μετασχηματισμούς, δηλαδή νά λύσουμε τή διαφορική ἐξίσωση (7.3) στό χῶρο τῶν φάσεων. Ξεκινᾶμε ἀπό τή σχέση

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_\xi \Omega_{ab} + 2 D_{[a}\left(\Omega_{b]m}\xi^m\right) = \\
&= \mathcal{L}_\xi \Omega_{ab} + D_a\left(\Omega_{bm}\xi^m\right) - D_b\left(\Omega_{am}\xi^m\right) = \\
&= \xi^m D_m \Omega_{ab} + \Omega_{mb}\left(D_a\xi^m\right) + \Omega_{am}\left(D_b\xi^m\right) + \\
&+ \left(D_a\Omega_{bm}\right)\xi^m + \Omega_{bm}\left(D_a\xi^m\right) - \left(D_b\Omega_{am}\right)\xi^m - \Omega_{am}\left(D_b\xi^m\right) = \\
&= \xi^m\left[D_m\Omega_{ab} + D_a\Omega_{bm} + D_b\Omega_{ma}\right] = \\
&= 3\xi^m D_{[m}\Omega_{ab]} \, .
\end{aligned}$$

Ἔχουμε λοιπόν ἀποδείξει τήν ταυτότητα

$$\mathcal{L}_\xi \Omega_{ab} + 2 D_{[a}\left(\Omega_{b]m}\xi^m\right) = 3\xi^m D_{[m}\Omega_{ab]} \, , \tag{7.4}$$

πού ἰσχύει γιά τυχόν ἀντισυμμετρικό τανυστικό πεδίο Ω_{ab}. Ἐπειδή ὅμως τό Ω_{ab} εἶναι συμπλεκτική δομή [ἑνότητα 2, ἰδιότητα (iii)], τό δεξιό μέλος τῆς (7.4) εἶναι μηδέν. Ἐπιπλέον, ἐπειδή τό ξ^a εἶναι ἀπειροστός κανονικός μετασχηματισμός, καί ὁ πρῶτος ὅρος τῆς (7.4) εἶναι μηδέν καί συνεπῶς βρίσκουμε ὅτι

$$D_{[a}\left(\Omega_{b]m}\xi^m\right) = 0 \, . \tag{7.5}$$

Τό διανυσματικό πεδίο $\Omega_{bm}\xi^m$ ἔχει στροφή (curl) μηδέν. Ἄρα [τοπικά πάντοτε, σφαιρικά (globally) ὅταν ὁ χῶρος τῶν φάσεων εἶναι ἁπλᾶ συνεκτικός (simply connected)] τό $\Omega_{bm}\xi^m$ εἶναι ἡ κλίση κάποιου βαθμωτοῦ πεδίου $F : \Gamma \to \mathbb{R}$:

$$\exists\, F : \Gamma \to \mathbb{R} \text{ τέτοιο ὥστε } \Omega_{bm}\xi^m = D_b F . \tag{7.6}$$

Πολλαπλασιάζοντας τέλος τά δύο μέλη τῆς (7.6) μέ Ω^{ba} βρίσκουμε ὅτι

$$\xi^a = \Omega^{ma} D_m F \, , \text{ γιά κάποιο } F : \Gamma \to \mathbb{R} . \tag{7.7}$$

Ἡ σχέση (7.7) παριστάνει τή γενική λύση τῆς ἐξίσωσης (7.3).

Συμπέρασμα: Ὅταν ὁ χῶρος τῶν φάσεων εἶναι ἁπλᾶ συνεκτικός, κάθε ἀπειροστός κανονικός μετασχηματισμός παράγεται ἀπό κάποιο C^∞ βαθμωτό πεδίο στό χῶρο τῶν φάσεων μέ τή βοήθεια τῆς σχέσης (7.7). Καί ἀντίθετα, κάθε βαθμωτό F παράγει τόν ἀπειροστό κανονικό μετασχηματισμό $\xi^a = \Omega^{ma}(D_m F)$. Ἡ συνάρτηση F λέγεται γεννήτρια συνάρτηση (generating function) τοῦ κανονικοῦ μετασχηματισμοῦ.

8. Συμμετρίες.

Ἄς εἶναι πάλι Γ ὁ χῶρος τῶν φάσεων ἑνός φυσικοῦ συστήματος μέ συμπλεκτική δομή Ω_{ab} καί Χαμιλτονιανή $H : \Gamma \to \mathbb{R}$. Ἐπίσης ἄς εἶναι $\Psi : \Gamma \to \Gamma$ ἕνας κανονικός μετασχηματισμός τοῦ Γ. Ὁ Ψ λέγεται συμμετρία τοῦ συστήματος ἐάν διατηρεῖ, ἐπιπλέον ἀπό τή συμπλεκτική δομή, καί τή Χαμιλτονιανή:

$$\Psi\left(H_{|p}\right) = H_{|\Psi(p)} \, , \quad \forall\, p \in \Gamma . \tag{8.1}$$

Τό διανυσματικό πεδίο ξ^a λέγεται ἀπειροστή συμμετρία τοῦ συστήματος ἐάν εἶναι ἀπειροστός κανονικός μετασχηματισμός πού ἐπιπλέον ἱκανοποιεῖ τήν

$$\mathcal{L}_\xi H = 0 . \tag{8.2}$$

Οἱ (πεπερασμένες) συμμετρίες προσδιορίζονται μέ ἐκθετοποίηση τῶν ἀπειροστῶν συμμετριῶν.

Θά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ ὕπαρξη συμμετριῶν σ' ἕνα σύστημα ἐξασφαλίζει τήν ὕπαρξη ὁλοκληρωμάτων τῆς κινήσεως. Πράγματι, ἀπό τίς σχέσεις (7.7) καί (8.2) βρίσκουμε ὅτι $\xi^a D_a H = 0 \Leftrightarrow$

$$\Omega^{ma}(D_m F)(D_a H) = 0 \Leftrightarrow [F, H] = 0 \Leftrightarrow dF/dt = 0 ,$$

καί συνεπῶς ἡ γεννήτρια συνάρτηση εἶναι μιά σταθερή τῆς κινήσεως ὅταν παράγει μιά συμμετρία.

Ἀντίστροφα, ἄς εἶναι F μιά σταθερή τῆς κινήσεως, δηλαδή ἄς εἶναι $\Omega^{ma}(D_m F)(D_a H) = 0$. Θέτουμε $\xi^a = \Omega^{ma}(D_m F)$ πού συνεπάγεται ὅτι $\mathcal{L}_\xi \Omega_{ab} = 0$ καί $\mathcal{L}_\xi H = \xi^a D_a H = 0$. Συνεπῶς, ἡ σταθερή τῆς κινήσεως F προέρχεται ἀπό τή συμμετρία $\xi^a = \Omega^{ma}(D_m F)$.

Προσοχή! Τό ξ^a εἶναι συμμετρία τοῦ χώρου τῶν φάσεων καί ὄχι τοῦ χώρου μορφῆς τοῦ συστήματος.

9. Κανονικοί μετασχηματισμοί καί Συμμετρίες (Συνέχεια)

Στήν ἑνότητα αὐτή συνεχίζουμε τή μελέτη τῶν κανονικῶν μετασχηματισμῶν καί τῶν συμμετριῶν ἑνός φυσικοῦ συστήματος. Ὁ στόχος μας εἶναι νά ἀποδείξουμε πώς οἱ (ἀπειροστοί) κανονικοί μετασχηματισμοί καί οἱ (ἀπειροστές) συμμετρίες ἑνός συστήματος ἔχουν τή δομή μιᾶς ἄλγεβρας Lie. Χρειαζόμαστε ὅμως πρῶτα νά ἀναπτύξουμε μερικές ἀκόμη ἰδιότητες τῶν παραγώγων Lie.

Ἄς εἶναι M μιά πολλαπλότητα, ξ^a καί η^a ἀνταλλοίωτα διανυσματικά πεδία τῆς M, καί $\mathcal{L}_\xi$, $\mathcal{L}_\eta$ οἱ ἀντίστοιχοι τελεστές τῆς παραγώγισης Lie. Θεωροῦμε τόν τελεστή

$$\mathcal{D} = \mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi \, , \tag{9.1}$$

πού ἀπεικονίζει C^∞ $\binom{r}{s}$ τανυστικά πεδία σέ C^∞ $\binom{r}{s}$ τανυστικά πεδία. Ἐπειδή ὁ καθένας ἀπό τούς $\mathcal{L}_\xi$ καί $\mathcal{L}_\eta$ εἶναι γραμμικοί, καί ὁ $\mathcal{D}$ εἶναι γραμμικός τελεστής. Ἀποδεικνύουμε ὅτι ὁ $\mathcal{D}$ ἱκανοποιεῖ καί τόν κανόνα τοῦ Leibnitz. Πράγματι, γιά $S = S^{\cdots}_{\cdots}$ καί $T = T^{\cdots}_{\cdots}$ δύο τυχόντα τανυστικά πεδία ἔχουμε

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta (ST) = \mathcal{L}_\xi \left[T \mathcal{L}_\eta S + S \mathcal{L}_\eta T \right] =$$

$$= T \mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta S + (\mathcal{L}_\xi T)(\mathcal{L}_\eta S) + (\mathcal{L}_\xi S)(\mathcal{L}_\eta T) + S \mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta T \tag{9.2}$$

καί συνεπῶς

$$(\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi)(ST) = T(\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi) S + S(\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi) T \, . \tag{9.3}$$

Ὁ $\mathcal{D}$ λοιπόν εἶναι ἕνας διαφορικός τελεστής πού ἀπεικονίζει C^∞ τανυστικά πεδία σέ C^∞ τανυστικά πεδία μέ ἀκριβῶς τήν ἴδια δομή δεικτῶν. Ἐπιπλέον, οἱ $\mathcal{D}$ καί ∇_a ἀντιμετατίθενται ὅταν δροῦν σέ βαθμωτά πεδία,

$$(\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi)(\nabla_a f) = \nabla_a \left[(\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi) f \right] ,$$

ἐφ'ὅσον ὁ ∇_a ἀντιμετατίθεται μέ καθέναν ἀπό τούς $\mathcal{L}_\xi$ καί $\mathcal{L}_\eta$ καί τά $\mathcal{L}_\xi f$ καί $\mathcal{L}_\eta f$ εἶναι ἐπίσης βαθμωτά πεδία. Οἱ συνθῆκες (i) - (iv) τῆς ἑνότητας 6 πληροῦνται καί συνεπῶς ὁ τελεστής $\mathcal{D}$ εἶναι ἕνας τελεστής παραγώγισης Lie:

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi = \mathcal{L}_X \, . \tag{9.4}$$

Ποιό εἶναι ὅμως τό ἀνταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο X^a ; Γιά νά τό βροῦμε, ὑπολογίζουμε τή δράση τοῦ $\mathcal{D}$ στό τυχόν βαθμωτό πεδίο f :

$$(\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi) f = \xi^m \nabla_m (\eta^n \nabla_n f) - \eta^m \nabla_m (\xi^n \nabla_n f) =$$

$$= (\xi^m \nabla_m \eta^n)(\nabla_n f) + \xi^m \eta^n \nabla_m \nabla_n f - (\eta^m \nabla_m \xi^n)(\nabla_n f) - \eta^m \xi^n \nabla_m \nabla_n f =$$

$$= (\xi^m \nabla_m \eta^n - \eta^m \nabla_m \xi^n)(\nabla_n f) = [\xi, \eta]^n \nabla_n f = \mathcal{L}_{[\xi,\eta]} f . \tag{9.5}$$

Συνεπῶς, ὅταν ὁ $\mathcal{D}$ δρᾶ σέ βαθμωτά πεδία, ἡ σχέση (9.4) ἱκανοποιεῖται γιά $X^a = [\xi, \eta]^a = \mathcal{L}_\xi \eta^a = -\mathcal{L}_\eta \xi^a$. Ἀλλά ὅταν δύο παραγωγίσεις Lie συμφωνοῦν στά βαθμωτά πεδία ἐκφράζουν παραγωγίσεις ἀναφορικά μέ τό ἴδιο ἀνταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο [Ἀπόδειξη: $\mathcal{L}_X f = \mathcal{L}_Y f$, $\forall$ βαθμωτό $f \Longleftrightarrow$ $(X^a - Y^a)(\nabla_a f) = 0$, $\forall$ βαθμωτό $f \Longleftrightarrow X^a = Y^a$]. Συνεπῶς τό X^a θά πρέπει νά ἰσοῦται μέ τό $[\xi, \eta]^a$ καί ὅταν ὁ $\mathcal{D}$ δρᾶ σέ τυχόν τανυστικό πεδίο. Ἔχουμε ἀποδείξει λοιπόν τήν πολύ χρήσιμη ταυτότητα

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi = \mathcal{L}_{[\xi,\eta]} \quad : \tag{9.6}$$

Ὁ ἀντιμεταθέτης δύο διαδοχικῶν παραγωγίσεων Lie ἰσοῦται μέ τήν παράγωγο Lie κατά τή διεύθυνση τοῦ ἀντιμεταθέτη τῶν ἀντίστοιχων ἀνταλλοίωτων διανυσματικῶν πεδίων.

Γνωρίζοντας πλέον καί τήν ἰδιότητα (9.6), συνεχίζουμε τή μελέτη τῶν κανονικῶν μετασχηματισμῶν καί τῶν συμμετριῶν. Ἄς εἶναι Γ ὁ χῶρος τῶν φάσεων ἑνός φυσικοῦ συστήματος μέ συμπλεκτική δομή Ω_{ab} καί Χαμιλτονιανή H, καί ξ^a καί η^a δύο (ἀπειροστοί) κανονικοί μετασχηματισμοί τοῦ συστήματος:
$\mathcal{L}_\xi \Omega_{ab} = \mathcal{L}_\eta \Omega_{ab} = 0$. Τότε

$$\mathcal{L}_{[\xi,\eta]} \Omega_{ab} = (\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi) \Omega_{ab} = 0$$

καί συνεπῶς καί τό διανυσματικό πεδίο $[\xi,\eta]^a$ εἶναι ἕνας, ἐν γένει διαφορετικός, κανονικός μετασχηματισμός. Παρόμοια, ἄν τά ξ^a καί

η^a εἶναι συμμετρίες τοῦ συστήματος $[\ \mathcal{L}_\xi H = \mathcal{L}_\eta H = 0\ ]$, τότε καί $\mathcal{L}_{[\xi,\eta]} H = (\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi) H = 0$, καί τό $[\xi,\eta]^a$ εἶναι μιά συμμετρία τοῦ συστήματος.

Τό σύνολο τῶν κανονικῶν μετασχηματισμῶν ἑνός συστήματος ἀποτελεῖ διανυσματικό χῶρο, ὑποχῶρο τοῦ διανυσματικοῦ χώρου ὅλων τῶν C^∞ ἀνταλλοίωτων διανυσματικῶν πεδίων. Στόν ὑποχῶρο αὐτό ὁρίσαμε τόν ἀντισυμμετρικό πολλαπλασιασμό $[x,y] = \mathcal{L}_x y$ ὁ ὁποῖος, ὅπως ἀναφέραμε στή δεύτερη παρατήρηση καί ἀποδείξαμε στήν τρίτη παρατήρηση τῆς ἕκτης ἑνότητας, ἱκανοποιεῖ καί τήν ταυτότητα τοῦ Jacobi $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$.
Τό σύνολο λοιπόν τῶν κανονικῶν μετασχηματισμῶν ἑνός φυσικοῦ συστήματος ἀποτελεῖ μιά ἄλγεβρα Lie. Παρόμοια, καί τό σύνολο τῶν συμμετριῶν ἑνός φυσικοῦ συστήματος ἔχει τή δομή μιᾶς ἄλγεβρας Lie, ὑποάλγεβρας τῆς ἄλγεβρας τῶν κανονικῶν μετασχηματισμῶν.

<u>Θεώρημα</u>: Ἡ γεννήτρια συνάρτηση τοῦ ἀντιμεταθέτη δύο κανονικῶν μετασχηματισμῶν εἶναι ἡ ἀγκύλη Poisson τῶν γεννητριῶν συναρτήσεων τῶν δύο κανονικῶν μετασχηματισμῶν.

<u>Ἀπόδειξη</u>: Ἄς εἶναι $\xi^a = \Omega^{ma} D_m A$, $\eta^a = \Omega^{ma} D_m B$, δύο κανονικοί μετασχηματισμοί μέ γεννήτριες συναρτήσεις $A, B : \Gamma \to \mathbb{R}$. Θά ἀποδείξουμε ὅτι $[\xi,\eta]^a = \Omega^{ma} D_m [A,B]$, ὅπου ὑπενθυμίζεται ὅτι $[A,B] = \Omega^{rs}(D_r A)(D_s B)$.
Ἡ ἀπόδειξη εἶναι καθαρά ὑπολογιστική. Ἔχουμε:

$$\begin{aligned}
&[\xi,\eta]^a - \Omega^{ma} D_m [A,B] = \\
&= \xi^m D_m \eta^a - \eta^m D_m \xi^a - \Omega^{ma} D_m [A,B] = \\
&= (\Omega^{rm} D_r A)\, D_m [\Omega^{sa} D_s B] - (\Omega^{rm} D_r B)\, D_m [\Omega^{sa} D_s A] - \\
&\quad - \Omega^{ma} D_m [\Omega^{rs} (D_r A)(D_s B)] = \\
&= \Omega^{rm}(D_r A)(D_m \Omega^{sa})(D_s B) + \Omega^{rm}\Omega^{sa}(D_r A)(D_m D_s B) - \\
&\quad - \Omega^{rm}(D_r B)(D_m \Omega^{sa})(D_s A) - \Omega^{rm}\Omega^{sa}(D_r B)(D_m D_s A) - \\
&\quad - \Omega^{ma}\big[(D_m \Omega^{rs})(D_r A)(D_s B) + \Omega^{rs}(D_m D_r A)(D_s B) + \\
&\qquad + \Omega^{rs}(D_r A)(D_m D_s B)\big] .
\end{aligned}$$

Οἱ τέσσερις ὅροι πού περιέχουν δεύτερες παραγώγους τῶν A καί B ἐξαλείφονται ἀνά δύο, πράγμα πού φαίνεται ἄν ἐναλλάξουμε κατάλληλα τούς βουβούς δεῖκτες. Οἱ τρεῖς ὅροι πού παραμένουν γράφονται, μετά ἀπό ἐναλλαγές τῶν βουβῶν δεικτῶν,

$$(D_r A)(D_s B)\left\{\Omega^{rm}(D_m \Omega^{sa}) + \Omega^{sm}(D_m \Omega^{ar}) + \Omega^{am}(D_m \Omega^{rs})\right\}.$$

Τούς ὅρους στήν ἀγκύλη τούς ἔχουμε συναντήσει καί στήν τέταρτη ἑνότητα [σχέσεις 4.3 καί 4.4] ὅπου καί ἀποδείξαμε ὅτι ἰσοῦται μέ

$$\begin{aligned}
\{\cdots\} &= -3\,\Omega^{m[r} D_m \Omega^{sa]} = \\
&= -3\,\Omega^{\kappa r}\Omega^{\lambda s}\Omega^{\mu a} D_{[\kappa}\Omega_{\lambda\mu]} = 0 .
\end{aligned}$$

Τό θεώρημα, λοιπόν, ἔχει ἀποδειχθεῖ.

Ἀπό τό παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ὅτι ἡ ἀγκύλη Poisson δύο ὁλοκληρωμάτων τῆς κινήσεως, δηλαδή γεννητριῶν συναρτήσεων κανονικῶν μετασχηματισμῶν πού εἶναι καί συμμετρίες, εἶναι πάλι ὁλοκλήρωμα τῆς κινήσεως, τό ὁλοκλήρωμα πού ἀντιστοιχεῖ στόν ἀντιμεταθέτη τῶν δύο συμμετριῶν. Τό συμπέρασμα αὐτό μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ καί διαφορετικά. Ἄν εἶναι A καί B τά δύο ὁλοκληρώματα τῆς κινήσεως γράφουμε τήν ταυτότητα τοῦ Jacobi γιά τά βαθμωτά (παρατηρήσιμα) A, B καί H.

$$[A,[B,H]] + [B,[H,A]] + [H,[A,B]] = 0 .$$

Ἐπειδή $[B,H] = [H,A] = 0$ συμπεραίνουμε ὅτι $[H,[A,B]] = 0$ καί συνεπῶς τό βαθμωτό $[A,B]$ εἶναι ὁλοκλήρωμα τῆς κινήσεως.

Ἀποδείξαμε ὅτι ὁ ἀντιμεταθέτης δύο συμμετριῶν ἑνός συστήματος εἶναι ἐπίσης μιά συμμετρία τοῦ συστήματος καί ὅτι ἡ ἀγκύλη Poisson δύο ὁλοκληρωμάτων τῆς κινήσεως εἶναι ἐπίσης ἕνα ὁλοκλήρωμα τῆς κινήσεως. Εἶναι ὅμως ὁ ἀντιμεταθέτης μιά "καινούργια" συμμετρία καί ἡ ἀγκύλη Poisson ἕνα καινούργιο ὁλοκλήρωμα τῆς κινήσεως; Δεχόμαστε σάν "καινούργια συμμετρία" κάθε συμμετρία πού δέν εἶναι κάποιος γραμμικός συνδυασμός (μέ σταθερούς συντελεστές) τῶν ἀρχικῶν, ἤδη γνωστῶν, συμμετριῶν, καί σάν "καινούργιο ὁλοκλήρωμα" κάθε ὁλοκλήρωμα πού δέν εἶναι κάποια ἀλγεβρική (=μή διαφορική) συνάρτηση τῶν ἤδη γνωστῶν ὁλοκληρωμάτων τῆς κινήσεως. Ἐπιπλέον, στό τέλος τῆς ἑνότητας 8 ἀποδείξαμε ὅτι ὑπάρχει μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία, modulo μιά προσθετική σταθερά, μεταξύ συμμετριῶν καί ὁλοκληρωμάτων τῆς κινήσεως. Ἰσχύει ὅτι γραμμικά ἀνεξάρτητες συμμετρίες δίνουν ἀνεξάρτητα ὁλοκληρώματα τῆς κινήσεως καί ἀντίστροφα; Δυστυχῶς δέν φαίνεται νά ὑπάρχει μιά εὔκολη, πλήρης καί συστηματική ἀπάντηση στά παραπάνω ἐρωτήματα. Γιά νά ἀποκτήσουμε ὅμως κάποια αἴσθηση, ἀποδεικνύουμε τρία μερικά συμπεράσματα.

1. Ὅταν ὁρισμένα ὁλοκληρώματα τῆς κινήσεως εἶναι γραμμικά ἐξαρτημένα (μέ σταθερούς συντελεστές) τότε καί οἱ ἀντίστοιχες συμμετρίες εἶναι γραμμικά ἐξαρτημένες, μέ τούς ἴδιους συντελεστές.

Πράγματι, ἐάν $G = \sum \lambda_i A_i$, ὅπου G καί A_i εἶναι ὁλοκληρώματα καί $\lambda_i \in \mathbb{R}$, τότε

$$\Omega^{ma} D_m G = \sum \lambda_i \Omega^{ma}(D_m A_i) \Rightarrow \xi^a = \sum \lambda_i X_i^a ,$$

ὅπου ξ^a καί X^a_i εἶναι οἱ συμμετρίες πού παράγονται ἀπό τά ὁλοκληρώματα G καί A_i ἀντίστοιχα.

2. Γραμμικά ἐξαρτημένες συμμετρίες προκύπτουν ἀπό γραμμικά ἐξαρτημένα ὁλοκληρώματα, ἐκτός ἀπό μιά προσθετική σταθερά.

Πράγματι, ἐάν $\xi^a = \sum \lambda_i X_i^a$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ καί οἱ συμμετρίες X^a_i παράγονται ἀπό τά ὁλοκληρώματα A_i, $X^a_i = \Omega^{ma} D_m A_i$, τότε $\xi^a = \sum \lambda_i \Omega^{ma}(D_m A_i) = \Omega^{ma} D_m \left(\sum \lambda_i A_i \right)$.

Συνεπῶς $G = \sum \lambda_i A_i + c$, ὅπου G τό ὁλοκλήρωμα πού ἀντιστοιχεῖ στήν ξ^a καί c μιά σταθερή.

3. Ἔστω $G = f(A,B)$ ἕνα ὁλοκλήρωμα ἀλγεβρικά ἐξαρτημένο ἀπό τά ὁλοκληρώματα A καί B. Ἄν ξ^a, X^a καί Y^a εἶναι οἱ ἀντίστοιχες συμμετρίες ἔχουμε

$$\xi^a = \Omega^{ma} D_m G = \Omega^{ma}\left(\frac{\partial f}{\partial A} D_m A + \frac{\partial f}{\partial B} D_m B \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right) X^a + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right) Y^a .$$

Οἱ συμμετρίες λοιπόν ξ^a, X^a καί Y^a ἐν γένει εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητες, ἀφοῦ οἱ $\partial f/\partial A$ καί $\partial f/\partial B$ δέν εἶναι σταθερές στόν χῶρο τῶν φάσεων (ἄν καί εἶναι σταθερές πάνω σέ κάθε φασική τροχιά).

Ἀπό τό τελευταῖο συμπέρασμα γίνεται φανερό πώς μποροῦμε νά ἔχουμε πολύ περισσότερες "διαφορετικές" (δηλ. γραμμικά ἀνεξάρτητες) συμμετρίες ἀπό ὅτι "διαφορετικά" (δηλ. ἀνεξάρτητα) ὁλοκληρώματα σ' ἕνα σύστημα. Τονίζεται ὅτι ἕνα σύστημα n-βαθμῶν ἐλευθερίας ἔχει $2n$ ἀνεξάρτητα ὁλοκληρώματα τῆς κινήσεως.

Τέλος, γιά τήν περίπτωση πού ἔχουμε βρεῖ μερικές συμμετρίες καί μερικά ὁλοκληρώματα κινήσεως ἑνός συστήματος, ἀναφέρουμε πῶς προσδιορίζεται τό πλῆθος τῶν συμμετριῶν καί τῶν ὁλοκληρωμάτων πού

εἶναι ἀνεξάρτητα. Γιά τίς συμμετρίες, ἄς ποῦμε X^a_i, κατασκευάζουμε ὅλους τούς δυνατούς ἀντιμεταθέτες αὐτῶν $[X^a_i, X^a_j]$ τούς ὁποίους καί προσπαθοῦμε νά γράψουμε σάν γραμμικό συνδυασμό τῶν X^a_i. Ὅσοι ἀπ' αὐτούς δέν εἶναι κάποιος γραμμικός συνδυασμός τῶν X^a_i ἀποτελοῦν μιά καινούργια συμμετρία, τήν ὁποία καί περιλαμβάνουμε στήν ἀρχική συλλογή τῶν X^a_i. Συνεχίζουμε κατά τόν τρόπο αὐτό ἕως ὅτου σχηματίσουμε ἕνα διανυσματικό χῶρο κλειστό ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό $[\cdot , \cdot]$, δηλαδή μιά ἄλγεβρα Lie. Ἡ διάσταση τῆς ἄλγεβρας αὐτῆς (πού εἶναι φυσικά κάποιος διανυσματικός χῶρος) ἰσοῦται μέ τόν ἀριθμό τῶν γραμμικά ἀνεξάρτητων συμμετριῶν τοῦ συστήματος πού βρήκαμε (προσοχή, ὄχι τῶν συμμετριῶν πού δέχεται τό σύστημα). Γιά τά ὁλοκληρώματα, ἄς ποῦμε A_i, κατασκευάζουμε ὅλες τίς δυνατές ἀγκύλες Poisson αὐτῶν μέχρις ὅτου σχηματίσουμε ἕνα σύνολο, ἄς τό ποῦμε B_i, $i = 1, 2, \ldots m$, κλειστό ὡς πρός τήν πράξη αὐτή. Σχηματίζουμε τήν Jacobian

$$\frac{D(B_1, \ldots B_m)}{D(q^1, \ldots q^n, p_1, \ldots p_n)} ,$$

πού εἶναι ἕνας $(m, 2n)$ πίνακας. Ἄν εἶναι $s \times s$ ὁ μεγαλύτερος τετραγωνικός ὑποπίνακας μέ διάφορη τοῦ μηδενός ὁρίζουσα πού μπορεῖ νά κατασκευασθεῖ ἀπό τήν Jacobian, ἔχουμε προσδιορίσει s ἀνεξάρτητα ὁλοκληρώματα τοῦ συστήματος.

10. Ἡ ἐφαπτόμενη δέσμη

Ἄς εἶναι M μία C^∞ πολλαπλότητα n διαστάσεων, q ἕνα σημεῖο τῆς M, καί T_q ὁ ἐφαπτόμενος χῶρος (tangent space) τῆς M στό q, δηλαδή τό σύνολο τῶν ἀνταλλοίωτων διανυσμάτων τῆς M στό σημεῖο της q. Θεωροῦμε τό σύνολο $T^aM = \bigcup_{q\in M} T_q$ ὅλων τῶν διανυσμάτων σ'ὅλα τά σημεῖα τῆς πολλαπλότητας. Ὁ στόχος μας εἶναι νά ὀργανώσουμε τό σύνολο T^aM σέ μιά C^∞ πολλαπλότητα $2n$ διαστάσεων. Θά διαπιστώσουμε τήν ὕπαρξη μιᾶς προτιμητέας C^∞ δομῆς στό σύνολο T^aM πού προσδιορίζεται μονοσήμαντα ἀπό τή γνώση τῆς C^∞ δομῆς τῆς πολλαπλότητας M.

Ἄς εἶναι (U, φ) ἕνας χάρτης τῆς M, πού καθορίζει συντεταγμένες $\{q^i, i=1,2,\dots n\}$ στά σημεῖα τῆς περιοχῆς $U \subset M$. Ἐπιπλέον, ἄς εἶναι $\{(\partial/\partial q^i)^a, i=1,2,\dots n\}$ ἡ ἀντίστοιχη βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου T_q στό $q\in U$. Κατασκευάζουμε τό σύνολο $V = \bigcup_{q\in U} T_q$, ὑποσύνολο τοῦ T^aM, καί θεωροῦμε τυχόν σημεῖο τοῦ V, πού εἶναι τῆς μορφῆς (q, v^a) μέ $v^a \in T_q$. Ἄς εἶναι $\{v^a\}^i = v^i$ οἱ συνιστῶσες τοῦ v^a στήν προτιμητέα βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου T_q:

$$v^a = \sum_{i=1}^{n} v^i (\partial/\partial q^i)^a .$$

Κατασκευάζουμε τήν ἀπεικόνιση

$$\Phi: V \ni (q,v^a) \to \Phi(q,v^a) = (q^1,\dots q^n, v^1,\dots v^n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (10.1)$$

πού εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι περιγράφει ἕνα χάρτη (V, Φ) τοῦ συνόλου T^aM. Ἐπαναλαμβάνοντας τήν παραπάνω κατασκευή γιά κάθε χάρτη (U, φ) τῆς M παίρνουμε ἕνα σύνολο χαρτῶν τοῦ T^aM γιά τούς ὁποίους ἀποδεικνύεται ὅτι (i) καλύπτουν τό T^aM καί (ii) εἶναι C^∞- συμβιβαστοί μεταξύ τους. Τό T^aM ἐφοδιασμένο μέ τό παραπάνω σύνολο χαρτῶν γίνεται μιά C^∞ πολλαπλότητα $2n$ διαστάσεων πού ὀνομάζεται <u>ἡ ἐφαπτόμενη δέσμη</u> (tangent bundle) τῆς πολλαπλότητας M. Ἀπ'ἐδῶ καί πέρα μέ T^aM θά συμβολίζουμε τήν ἐφαπτόμενη δέσμη (ὄχι μόνο τό σύνολο).

Ἡ ἀπεικόνιση

$$\pi: T^aM \ni (q,v^a) \to \pi(q,v^a) = q \in M, \quad (10.2)$$

πού εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι C^∞, λέγεται ἡ προβολή τῆς T^aM στήν M. Ἡ ἐφαπτόμενη δέσμη εἶναι ἕνας ἰνώδης χῶρος (fibre bundle) πού ἐπιπλέον εἶναι καί διανυσματική δέσμη (vector bundle). T^aM εἶναι ἡ δέσμη (bundle), $M = \pi(T^aM)$ εἶναι ἡ βάση (base space) καί $T_q = \pi^{-1}(q)$ εἶναι ἡ ἴνα (fibre) τοῦ σημείου q.

Ἡ κατασκευή τῆς ἐφαπτόμενης δέσμης εἶναι παρόμοια μέ τήν κατασκευή τῆς συνεφαπτόμενης δέσμης, πού περιγράφεται στήν πρώτη ἑνότητα. Ἡ ὁμοιότητα ὅμως αὐτή σταματᾶ στό σημεῖο αὐτό. Στήν ἐφα-

πτόμενη δέσμη δέν ὑπάρχουν τό προτιμητέο διανυσματικό πεδίο καί ἡ προτιμητέα συμπλεκτική δομή πού διαπιστώσαμε πώς ὑπάρχουν στήν συνεφαπτόμενη δέσμη.

11. Ὁ Δυϊκός χῶρος

Ἄς εἶναι V ἕνας διανυσματικός χῶρος n διαστάσεων πάνω στό σῶμα $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Θεωροῦμε τό σύνολο V^* τῶν γραμμικῶν ἀπεικονίσεων ἀπό τόν V στό $\mathbb{R}$:

$$V^* = \{ f \mid f: V \to \mathbb{R},\ f \ \text{γραμμική} \}. \quad (11.1)$$

Μέ τή συνηθισμένη πρόσθεση ἀπεικονίσεων $[(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in V]$ καί τό συνηθισμένο πολλαπλασιασμό ἀπεικονίσεων μέ πραγματικό ἀριθμό $[(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \forall x \in V]$ τό σύνολο V^* γίνεται διανυσματικός χῶρος n διαστάσεων πάνω στό σῶμα $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ὁ V^* λέγεται <u>ὁ δυϊκός χῶρος</u> (dual vector space) τοῦ χώρου V.

Ἐάν $\{e_i, i=1,2,\dots n\}$ εἶναι μιά βάση τοῦ V, εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι τό σύνολο τῶν γραμμικῶν ἀπεικονίσεων $\{f_i, i=1,2,\dots n\}$ πού ὁρίζονται ἀπό τίς σχέσεις $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ ἀποτελεῖ μιά βάση τοῦ V^*, πού λέγεται ἡ δυϊκή βάση τῆς βάσης $\{e_i, i=1,2,\dots n\}$. Ἡ κατασκευή τῆς δυϊκῆς βάσης ἀποδεικνύει ὅτι ὁ V^* ἔχει τήν ἴδια διάσταση μέ τόν ἀρχικό χῶρο

12. Οἱ διανυσματικοί χῶροι εἶναι πολλαπλότητες

Ἄς εἶναι V ἕνας n-διάστατος πραγματικός διανυσματικός χῶρος καί $\{e_1,\dots,e_n\}$ μία βάση τοῦ V. Τότε τό τυχόν σημεῖο $\xi \in V$ γράφεται $\xi = x^1e_1+\dots+x^ne_n$ καί συνεπῶς προσδιορίζεται μονοσήμαντα ἀπό τήν n-άδα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $(x^1,\dots x^n)$. Κάτι παραπάνω: Μέ καθορισμένη τή βάση $\{e_1,\dots e_n\}$, ἡ παραπάνω ἀντιστοιχία μεταξύ σημείων τοῦ V καί n-άδων τοῦ $\mathbb{R}^n$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη. Ἡ ἐκλογή (U,φ) λοιπόν μέ $U = V$ καί

$$\varphi: U = V \ni \xi \to \varphi(\xi) = (x^1,\dots x^n) \in \mathbb{R}^n \quad (12.1)$$

ἀποτελεῖ ἕνα χάρτη τοῦ συνόλου V, πού μόνος του καλύπτει τόν V. Κατά συνέπεια, θεωρώντας ὅλους τούς χάρτες τοῦ V πού εἶναι C^∞ συμβιβαστοί μέ τόν (U,φ) κάνουμε τόν διανυσματικό χῶρο V μιά C^∞ πολλαπλότητα. Οἱ συντεταγμένες ἑνός σημείου τοῦ V εἶναι οἱ συνιστῶσες τῆς ἀνάλυσής του σέ μιά βάση, καί κάθε βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου προσδιορίζει ἕνα σύστημα συντεταγμένων τῆς πολλαπλότητας V .

Οἱ πολλαπλότητες πού προέρχονται ἀπό διανυσματικούς χώρους μποροῦν νά καλυφθοῦν ἀπό ἕνα μόνον χάρτη! Γιά τό ἀντίστροφο, ἀποδεικνύεται ὅτι κάθε πολλαπλότητα n-διαστάσεων πού μπορεῖ νά καλυφθεῖ ἀπό ἕνα μόνο χάρτη εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τοῦ χώρου $\mathbb{R}^n$. Φυσικά τά ὑποσύνολα αὐτά ἐν γένει δέν ἀποτελοῦν ἕνα διανυσματικό χῶρο.

Οἱ πολλαπλότητες πού προέρχονται ἀπό διανυσματικούς χώρους ἔχουν πολύ περισσότερη δομή ἀπό τίς συνήθεις πολλαπλότητες. Τήν ὕπαρξη αὐτῆς τῆς ἐπιπλέον δομῆς ἐκμεταλλευόμαστε στίς κατασκευές πού ἀκολουθοῦν.

(A). Ἄς εἶναι V ἕνας διανυσματικός χῶρος, o τό οὐδέτερο στοιχεῖο του, καί v τυχαῖο στοιχεῖο (=σημεῖο) τοῦ V . Θεωροῦμε τόν V σάν πολλαπλότητα καί σ'αὐτήν θεωροῦμε τήν καμπύλη

$$\gamma_v : \mathbb{R} \ni t \longrightarrow \gamma_v(t) = tv \in V . \tag{12.2}$$

Προφανῶς, $\gamma_v(0) = 0 \in V$. . Ἄς εἶναι $\xi(v) = \left.\dfrac{d\gamma_v(t)}{dt}\right|_{t=0}$

τό ἐφαπτόμενο διάνυσμα τῆς καμπύλης γ_v στό σημεῖο $t=0$. Τό $\xi(v)$ εἶναι ἕνα διάνυσμα τοῦ διανυσματικοῦ χώρου T_o, δηλαδή τοῦ ἐφαπτόμενου χώρου στό σημεῖο 0 τῆς πολλαπλότητας V . Συνεπῶς, ἔχουμε κατασκευάσει τήν ἀπεικόνιση

$$\xi : V \ni v \longrightarrow \xi(v) = \left.\frac{d\gamma_v(t)}{dt}\right|_{t=0} \in T_o . \tag{12.3}$$

Ἐπειδή $\xi(v) = \xi(w) \iff \left[\dfrac{d\gamma_v(t)}{dt} - \dfrac{d\gamma_w(t)}{dt}\right]_{t=0} = 0$

$\iff \left.\dfrac{d}{dt}(vt - wt)\right|_{t=0} = 0 \iff v = w$, ἡ ξ εἶναι ἀμφιμονότιμη καί συνεπῶς, ἐπειδή οἱ V καί T_o ἔχουν τήν ἴδια διάσταση, ἡ ξ εἶναι ἰσομορφισμός τῶν διανυσματικῶν χώρων V καί T_o . Ἡ ὕπαρξη τοῦ ἰσομορφισμοῦ ξ μᾶς ἐπιτρέπει νά ταυτοποιοῦμε τά σημεῖα τῆς πολλαπλότητας V μέ τά διανύσματα τοῦ ἐφαπτόμενου χώρου T_o καί νά χρησιμοποιοῦμε διανύσματα θέσεως (= στοιχεῖα τοῦ T_o) πού προσδιορίζουν σημεῖα τῆς πολλαπλότητας.

(B). Ἄς εἶναι V ἕνας διανυσματικός χῶρος καί $v \in V$. Θεωροῦμε τήν ἀπεικόνιση

$$\Psi_v : V \ni w \longrightarrow \Psi_v(w) = v + w \in V . \tag{12.4}$$

Ἡ ἀπεικόνιση Ψ_v εἶναι ἀμφί $[\Psi_v(w) = \Psi_v(z) \iff v+w = v+z \iff v = z]$, εἶναι ἐπί [τό σημεῖο $z-v$ ἀπεικονίζεται

στό z, $\forall z \in V$] καί ἔχει ἀντίστροφη τήν Ψ_{-v} $[(\Psi_{-v} \circ \Psi_v)(z) = \Psi_{-v}(v+z) = -v+v+z = z, \ \forall z \in V]$.

Ἐπιπλέον, στόν χάρτη (12.1) ἰσχύουν $[\Psi_v(w)]^i = v^i + w^i$, $[\Psi_{-v}(w)]^i = -v^i + w^i$, καί συνεπῶς οἱ Ψ_v καί Ψ_{-v} εἶναι C^∞ ἀπεικονίσεις. Ἄρα, ἡ $\Psi_v : V \longrightarrow V$ εἶναι ἕνας διαμορφισμός τῆς πολλαπλότητας V στόν ἑαυτό της. Μέ τή βοήθεια τοῦ παραπάνω διαμορφισμοῦ μποροῦμε νά μεταφέρουμε ὅλους τούς τανυστές ἀπό τό $v \in V$ στό $o \in V$ καί νά τούς θεωρήσουμε σάν τανυστές στό σημεῖο 0 τῆς πολλαπλότητας. Καί κάτι παραπάνω: Χρησιμοποιώντας τή σύνθεση δύο τέτοιων διαμορφισμῶν μποροῦμε νά μεταφέρουμε τανυστές ἀπό κάθε σημεῖο τῆς V σέ κάθε ἄλλο σημεῖο της.

(Γ). Ἄς εἶναι V ἕνας διανυσματικός χῶρος-πολλαπλότητα καί μ_a ἕνα συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο τῆς V .

Γιά κάθε διάνυσμα (στοιχεῖο) $v = v^a$ τοῦ V παίρνουμε: (i) Τήν τιμή τοῦ μ_a στό σημεῖο v τῆς V , πού εἶναι ἕνα διάνυσμα $\mu_a|_v$ τοῦ T_v^* . (ii) Τό διάνυσμα $\xi(v) \in T_o$ τῆς κατασκευῆς (A). (iii) Τό διάνυσμα $\xi(v)|_v$ τοῦ χώρου T_v βάσει τῆς κατασκευῆς (B). Ἡ συστολή τῶν διανυσμάτων $\xi(v)|_v \in T_v$ καί $\mu_a|_v \in T_v^*$ δίνει ἕνα πραγματικό ἀριθμό. Ἡ ἐπανάληψη τῆς παραπάνω κατασκευῆς γιά κάθε διάνυσμα $v \in V$ κατασκευάζει μιά ἀπεικόνιση $\mu : V \longrightarrow \mathbb{R}$ πού εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι γραμμική ὅταν θεωρήσουμε τό πεδίο μ_a σ'ἕνα συγκεκριμένο σημεῖο τοῦ V . Συνεπῶς, κάθε συναλλοίωτο διάνυσμα μ_a σ'ἕνα σημεῖο τοῦ διανυσματικοῦ χώρου-πολλαπλότητας V μπορεῖ νά θεωρηθεῖ καί σάν ἕνα στοιχεῖο τοῦ δυϊκοῦ χώρου V^* .

Μέ τή βοήθεια συντεταγμένων, οἱ παραπάνω κατασκευές καί ταυτοποιήσεις ἐκφράζονται ὡς ἑξῆς:

Ἡ βάση $\{e_i, i=1,\dots n\}$ τοῦ V δίνει συντεταγμένες $(x^1,\dots x^n)$ στά σημεῖα τοῦ V , μέ τή βοήθεια τῆς $x = x^i e_i$. Τά διανύσματα βάσεως $(\partial/\partial x^i)^a$, $i = 1, 2, \dots n$, στά διάφορα σημεῖα τῆς πολλαπλότητας ταυτοποιοῦνται μέ τά διανύσματα

$$e_i, \quad e_i = (\partial/\partial x^i)^a$$

. Τά $\{D_a x^i, i = 1,2,\dots n\}$, ὅπου D_a εἶναι τυχαῖος τελεστής παραγωγίσεως τῆς V , ταυτοποιοῦνται μέ τά διανύσματα τῆς δυϊκῆς τῆς βάσεως $\{e_i\}$. Τό συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο μ_a γράφεται $\mu_a = \mu_i(v)(D_a x^i)$, ὅπου τά $\mu_i(v)$ εἶναι πραγματικές συναρτήσεις στόν V . Σ'ἕνα σημεῖο $p \in V$ τό $\mu_i(p)$ παρίσταται ἀπό n πραγματικούς ἀριθμούς. Ἐπιπλέον, $v^a = v^i(\partial/\partial x^i)^a = v^i e_i$, καί ἡ εἰκόνα τοῦ v^a μέσω τοῦ $\eta_a(p)=\eta\in V^*$ εἶναι ὁ πραγματικός ἀριθμός $\eta(v^a)=\eta_i(p)\,v^i$. Οἱ συνιστῶσες τοῦ $\eta\in V^*$ ὡς πρός τή δυϊκή βάση τῆς $\{e_i,\ i=1,2,\dots n\}$ ἰσοῦται μέ τίς συνιστῶσες τοῦ διανύσματος $\eta_a(p)$ στή βάση $\{D_a x^i,\ i=1,\dots n\}$.

13. Μηχανική κατά Lagrange.

Ἄς εἶναι M μία πολλαπλότητα n διαστάσεων, T^aM ἡ ἐφαπτόμενη δέσμη τῆς M, ∇_a ἕνας τελεστής παραγωγίσεως τῆς T^aM καί

$$L:T^aM\longrightarrow \mathbb{R} \tag{13.1}$$

ἕνα C^∞ βαθμωτό πεδίο στήν ἐφαπτόμενη δέσμη. Ἔστω q ἕνα σημεῖο τῆς M, T_q ὁ ἐφαπτόμενος χῶρος στό q καί

$$\varphi_q : T_q \ni v^a \longrightarrow \varphi_q(v^a)=(q,v^a)\in T^aM \tag{13.2}$$

ἡ ἀπεικόνιση πού ἀναγνωρίζει τόν T_q σάν ὑποπολλαπλότητα τῆς πολλαπλότητας T^aM. Θεωροῦμε τό συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $\nabla_a L$ τῆς T^aM καί παίρνουμε τό pull back του, $\varphi_{q\leftarrow}(\nabla_a L)$ μέσω τῆς φ_q. Τό $\varphi_{q\leftarrow}(\nabla_a L)$ εἶναι ἕνα συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο τῆς πολλαπλότητας T_q ἡ ὁποία ὅμως εἶναι συγχρόνως καί διανυσματικός χῶρος. Συνεπῶς, σύμφωνα μέ τήν κατασκευή (Γ) τῆς προηγούμενης ἑνότητας, γιά κάθε διάνυσμα $v^a\in T_q$, τό συναλλοίωτο διάνυσμα $\varphi_{q\leftarrow}(\nabla_a L)|_{v^a}$ μπορεῖ νά ταυτοποιηθεῖ μ'ἕνα στοιχεῖο τοῦ συνεφαπτόμενου χώρου T_q^*. Τό διάνυσμα αὐτό τό συμβολίζουμε p_a:

$$p_a=\varphi_{q\leftarrow}(\nabla_a L)|_{v^a}\ . \tag{13.3}$$

Προφανῶς, τό συναλλοίωτο διάνυσμα p_a ἐξαρτᾶται ἀπό τό βαθμωτό πεδίο L, τό σημεῖο q τῆς M καί τό ἀνταλλοίωτο διάνυσμα v^a στό q: $p_a=p_a(L,q,v^a)$.

Κρατώντας τά L καί $q\in M$ σταθερά ἐπαναλαμβάνουμε τήν κατασκευή τοῦ p_a $\forall v^a\in T_q$ καί κατόπιν, κρατώντας τό L σταθερό, ἐπαναλαμβάνουμε τήν προηγούμενη κατασκευή $\forall q\in M$ καί γιά κάθε $v^a\in T_q$. Μέ τόν τρόπο αὐτό κατασκευάζουμε μιά ἀπεικόνιση ἀπό τήν ἐφαπτόμενη δέσμη στήν συνεφαπτόμενη δέσμη τῆς M:

$$F_L : T^aM\ni(q,v^a)\longrightarrow F_L(q,v^a)=(q,p_a)\in T_aM. \tag{13.4}$$

Ἡ ἀπεικόνιση F_L, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό βαθμωτό πεδίο L, συνήθως ἀναφέρεται σάν ἡ fibre derivative τοῦ L. Ἕνα βασικό χαρακτηριστικό τῆς F_L εἶναι ὅτι διατηρεῖ τίς ἴνες: Τό σημεῖο (q,v^a) ἀπεικονίζεται στό σημεῖο (q,p_a) πού ἀναφέρεται στό ἴδιο σημεῖο q τοῦ M.

<u>Ὁρισμός</u>: Τό βαθμωτό πεδίο $L:T^aM\to\mathbb{R}$ λέγεται <u>ὁμαλό</u> (regular, standard) ὅταν ἡ ἀπεικόνιση $F_L:T^aM\to T_aM$ πού κατασκευάζεται ἀπό τό L εἶναι ἕνας διαμορφισμός τῶν πολλαπλοτήτων T^aM καί T_aM.

Στήν ἀνάλυση πού ἀκολουθεῖ ὑποθέτουμε ὅτι τό βαθμωτό L εἶναι ὁμαλό.

Ἡ ἰδέα εἶναι νά πάρουμε τό pullback τῆς συμπλεκτικῆς δομῆς Ω_{ab} τῆς συνεφαπτόμενης δέσμης T_aM μέ τήν ἀπεικόνιση F_L. Ὅταν ἡ F_L εἶναι διαμορφισμός, τό $\Omega_{ab}=F_{L\leftarrow}\Omega_{ab}$ εἶναι μιά συμπλεκτική δομή τῆς T^aM πού μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τό ἀνεβοκατέβασμα τῶν δεικτῶν τῶν τανυστικῶν πεδίων τῆς T^aM. Οἱ ἀπαραίτητες ἀποδείξεις δίνονται στήν παρατήρηση πού ἀκολουθεῖ.

<u>Παρατήρηση</u>: Ἄς εἶναι $f:M\to N$ ἕνας διαμορφισμός τῶν πολλαπλοτήτων M καί N. Τότε ὁρίζεται τό pullback οἱουδήποτε τανυστικοῦ πεδίου, τό ὁποῖο καί ἱκανοποιεῖ τή σχέση, π.χ., $f_\leftarrow(\xi^a\eta_a)=(f_\leftarrow\xi^a)(f_\leftarrow\eta_a)$. Ἄς εἶναι $\delta_a{}^b$ τό τανυστικό πεδίο Kronecker τῆς N, πού σημαίνει ὅτι $\delta_a{}^b\xi^a=\xi^b$, $\forall\xi^a$ στό N. Συνεπῶς $(f_\leftarrow\delta_a{}^b)(f_\leftarrow\xi^a)=(f_\leftarrow\xi^b)$, πού συνεπάγεται ὅτι τό $f_\leftarrow\delta_a{}^b$ εἶναι τό τανυστικό πεδίο Kronecker τῆς πολλαπλότητας M. Ἐπιπλέον, ἐάν $\Omega_{am}\Omega^{bm}=\delta_a{}^b$, τότε $(f_\leftarrow\Omega_{am})(f_\leftarrow\Omega^{bm})=f_\leftarrow(\Omega_{am}\Omega^{bm})=f_\leftarrow\delta_a{}^b$, πού συνεπάγεται ὅτι τό πεδίο $f_\leftarrow\Omega^{ab}$ εἶναι τό ἀντίστροφο τοῦ πεδίου $f_\leftarrow\Omega_{ab}$. Τέλος ἀποδεικνύεται καί ὅτι $D_{[a}(f_\leftarrow\Omega_{bc]})=f_\leftarrow(\nabla_{[a}\Omega_{bc]})$, ὅπου D_a καί ∇_a εἶναι τυχαῖοι τελεστές παραγωγίσεως τῶν M καί N, τό συμπέρασμα ὅμως αὐτό δέν θά μᾶς χρειαστεῖ στήν ἀνάλυση πού ἀκολουθεῖ.

Τό συμπέρασμα ἀπό τήν παραπάνω παρατήρηση εἶναι ὅτι ὅταν ἡ ἐφαπτόμενη δέσμη T^aM ἐφοδιάζεται μέ ἕνα ὁμαλό βαθμωτό πεδίο L τότε ἐφοδιάζεται καί μέ μιά προτιμητέα συμπλεκτική δομή

$$\Omega_{ab}=F_{L\leftarrow}\Omega_{ab}\ . \tag{13.5}$$

Τέλος κατασκευάζουμε δύο ἀκόμη βαθμωτά πεδία στήν T^aM, πού καί αὐτά ἐξαρτῶνται ἀπό τό βαθμωτό L, τά

$$A_L:T^aM\ni(q,v^a)\longrightarrow A_L(q,v^a)=p_a v^a\in\mathbb{R} \tag{13.6}$$

καί

$$E:T^aM\ni(q,v^a)\longrightarrow E(q,v^a)=A_L-L=p_a v^a-L\in\mathbb{R}. \tag{13.7}$$

Ἀπό τήν παράγωγο τοῦ E καί τή συμπλεκτική δομή Ω_{ab} κατασκευάζουμε τό ἀναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο τῆς T^aM

$$E^a = \Omega^{ma}(\nabla_m E) . \tag{13.8}$$

θά ἀποδείξουμε στήν ἑπόμενη ἑνότητα ὅτι ἡ κίνηση κατά μῆκος τῶν ὁλοκληρωτικῶν καμπυλῶν τοῦ E^a ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἱκανοποίηση τῶν ἐξισώσεων Euler-Lagrange ἀπό τό βαθμωτό πεδίο L.

Δεχόμενοι τήν ἀλήθεια τῆς τελευταίας προτάσεως μποροῦμε πλέον νά δώσουμε τίς ὁδηγίες γιά τή μελέτη τῆς μηχανικῆς κατά Lagrange: Διαλέξτε τό χῶρο μορφῆς τοῦ συστήματος, ὀργανῶστε τον σέ μιά C^∞ πολλαπλότητα M, καί κατασκευάστε τήν ἐφαπτόμενη δέσμη του T^aM, τήν συνεφαπτόμενη δέσμη του T_aM καί τήν προτιμητέα συμπλεκτική δομή Ω_{ab} στήν συνεφαπτόμενη δέσμη. Διαλέξτε τήν ὁμαλή Lagrangian πού περιγράφει τό σύστημα (ἡ θεωρία δέν λέει πῶς νά τή διαλέξουμε), ὑπολογίστε τή fibre derivative τῆς L, F_L καί προσδιορίστε τή συμπλεκτική δομή $\Omega_{ab} = F_{L\leftarrow}\Omega_{ab}$ τῆς T^aM. Τέλος κατασκευάστε τά πεδία A_L (δράση, action) καί E (ἐνέργεια) στήν T^aM, βρῆτε τό ἀναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο E^a τῆς σχέσης (13.8) καί προσδιορίστε τίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες τοῦ E^a. Οἱ ὁλοκληρωτικές καμπύλες τοῦ E^a περιγράφουν τήν ἐξέλιξη τοῦ συστήματος σύμφωνα μέ τούς νόμους τῆς μηχανικῆς.

14. Ἡ ἀπόδειξη

Ἡ ἀπόδειξη τῆς πρότασης ὅτι κίνηση κατά μῆκος τῶν ὁλοκληρωτικῶν καμπυλῶν τοῦ E^a ἰσοδυναμεῖ μέ κίνηση πού ἱκανοποιεῖ τίς ἐξισώσεις Euler-Lagrange στό βαθμωτό πεδίο L εἶναι ὑπολογιστική. Χρησιμοποιοῦμε συνιστῶσες καί ὑπολογίζουμε ὅλα τά πεδία πού ἀναφέρονται στήν προηγούμενη ἑνότητα. Στήν ἑνότητα αὐτή οἱ δεῖκτες α, β, γ, i, j, k θά παίρνουν τίς τιμές 1,2, .., n ἐνῶ οἱ δεῖκτες a, b, c καί m θά παίρνουν τίς τιμές 1, 2, ..., 2n. Ὅταν ὑπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, ἡ ἄθροιση θά δηλώνεται.

Ἄς εἶναι $\{q^i\}$ οἱ συντεταγμένες τῆς M καί $\{q^i, v^i\}$ οἱ συντεταγμένες τῆς T^aM. Τότε τό $\nabla_a L$ ἔχει συνιστῶσες $(\partial L/\partial q^i, \partial L/\partial v^i)$. Ἡ ἀπεικόνιση φ_q εἶναι ἡ

$$\varphi_q : T_q \ni (v^1, \dots v^n) \to \varphi_q(v) = (q^1,\dots,q^n, v^1,\dots v^n) \in T^aM, \text{ καί}$$

συνεπῶς ἔχει συντεταγμένες $\varphi^i = q^i$ καί $\varphi^{i+n} = v^i$. Ἀπό τή σχέση (5.7) γιά τίς συνιστῶσες τοῦ pullback βρίσκουμε ὅτι

$$p_\alpha = (\nabla_m L)\frac{\partial \varphi^m}{\partial v^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\cdot 0 + \frac{\partial L}{\partial v^i}\delta^i{}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial v^\alpha} . \tag{14.1}$$

Ἄρα, ἡ ἀπεικόνιση $F_L : (q^i, v^i) \to (q^i, \partial L/\partial v^i)$ ἔχει συνιστῶσες

$$\begin{cases} F_L{}^i = q^i \\ F_L{}^{i+n} = \partial L/\partial v^i \end{cases} , \quad i = 1, 2, \dots n. \tag{14.2}$$

Ἀπό τίς συνιστῶσες τοῦ Ω_{ab} πού εἶναι $\left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array}\right)$ (ἑνότητα 2, σελίδα 5) προσδιορίζουμε τώρα τίς συνιστῶσες τοῦ Ω_{ab}:

$$\Omega_{ab} = \Omega_{cm}\left(\frac{\partial F^c}{\partial x^a}\right)\left(\frac{\partial F^m}{\partial x^b}\right) , \tag{14.3}$$

ὅπου $\{x^a\} = \{q^1,\dots,q^n, v^1,\dots, v^n\}$ εἶναι οἱ συντεταγμένες τῆς T^aM. Βρίσκουμε

$$\Omega_{\alpha\beta} = \Omega_{cm}\frac{\partial F^c}{\partial q^\alpha}\frac{\partial F^m}{\partial q^\beta} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \Omega_{i,i+n}\frac{\partial F^i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial F^{i+n}}{\partial q^\beta} + \sum_{i=1}^n \Omega_{i+n,i}\frac{\partial F^{i+n}}{\partial q^\alpha}\frac{\partial F^i}{\partial q^\beta} =$$

$$= \sum_i (-1)\frac{\partial q^i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial}{\partial q^\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) + \sum_i (+1)\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)\frac{\partial q^i}{\partial q^\beta} =$$

$$= -\frac{\partial^2 L}{\partial q^\beta \partial v^\alpha} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^\alpha \partial v^\beta} ,$$

ἐπειδή $\partial q^i/\partial q^\alpha = \delta^i{}_\alpha$. Γράφουμε

$$\Omega_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha} , \quad \text{ὅπου } N_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial q^\alpha \partial v^\beta} . \tag{14.4}$$

Παρόμοια βρίσκουμε ὅτι

$$\begin{cases} \Omega_{\alpha,\beta+n} = -M_{\alpha\beta} , \\ \Omega_{\alpha+n,\beta} = M_{\alpha\beta} , \\ \Omega_{\alpha+n,\beta+n} = 0 , \end{cases} \tag{14.5}$$

ὅπου

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} . \tag{14.6}$$

Ὥστε λοιπόν

$$\Omega_{ab} = \left(\begin{array}{c:c} N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha} & -M_{\alpha\beta} \\ \hdashline M_{\alpha\beta} & 0 \end{array} \right) . \tag{14.7}$$

Γιά τόν πίνακα (14.7) εὔκολα βρίσκουμε ὅτι ἔχει ὁρίζουσα ἴση μέ $-(\det M_{\alpha\beta})^2$ καί συνεπῶς εἶναι ἀντιστρεπτός ἀκριβῶς τότε ὅταν

$$\det M_{\alpha\beta} = \det\left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \right\} \neq 0 . \tag{14.8}$$

Ἡ συνθήκη (14.8) εἶναι ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι ἡ Lagrangian L ὁμαλή. Ἄς εἶναι $M^{\alpha\beta}$ ὁ ἀντίστροφος τοῦ πίνακα $M_{\alpha\beta}$, $[\, M_{\alpha\beta} M^{\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\gamma \,]$. Πολύ εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ ἀντίστροφος τοῦ πίνακα (14.7) εἶναι ὁ πίνακας $\left(\begin{array}{c:c} 0 & M^{\alpha\beta} \\ \hdashline -M^{\alpha\beta} & A^{\alpha\beta} \end{array} \right)$, ὅπου $A^{\alpha\beta} = M^{\alpha i}(N_{ij} - N_{ji}) M^{j\beta}$. Συνεπῶς, ἐπειδή ὁ Ω^{ab} ὁρίσθηκε σάν ὁ τανυστής πού ἱκανοποιεῖ τή σχέση $\Omega^{am}\Omega_{bm} = \delta^a{}_b = -\Omega^{am}\Omega_{mb}$, ὁ πίνακας τῶν συνιστωσῶν τοῦ Ω^{ab} εἶναι ὁ ἀντίθετος τοῦ ἀντίστροφου τοῦ πίνακα (14.7)

$$\Omega^{ab} = \left(\begin{array}{c:c} 0 & -M^{\alpha\beta} \\ \hdashline M^{\alpha\beta} & -M^{\alpha i}(N_{ij} - N_{ji}) M^{j\beta} \end{array} \right) . \tag{14.9}$$

Ὁ ἑπόμενος στόχος μας εἶναι νά ὑπολογίσουμε τίς συνιστῶσες τῶν πεδίων $\nabla_a E$ καί E^a. Ἡ ἐνέργεια εἶναι

$$E = v^i p_i - L = v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L . \tag{14.10}$$

Συνεπῶς, ἀπό τήν $\nabla_a E = \left(\partial E / \partial q^\alpha , \partial E / \partial v^\alpha \right)$ βρίσκουμε:

$$\nabla_\alpha E = \frac{\partial E}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L \right) = v^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^\alpha \partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} =$$
$$= v^i N_{\alpha i} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} ,$$

$$\nabla_{\alpha+n} E = \frac{\partial}{\partial v^\alpha}\left(v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L \right) = \delta_\alpha{}^i \frac{\partial L}{\partial v^i} + v^i M_{\alpha i} - \frac{\partial L}{\partial v^\alpha} =$$
$$= v^i M_{\alpha i} .$$

Τέλος, ἀπό τήν $E^a = \Omega^{ma} \nabla_m E$ βρίσκουμε:

$$E^\alpha = -\Omega^{\alpha\beta} \nabla_\beta E - \Omega^{\alpha,\beta+n} \nabla_{\beta+n} E = 0 + M^{\alpha\beta} v^i M_{\beta i} =$$
$$= v^i \delta^\alpha{}_i = v^\alpha , \quad \text{kai} \tag{14.11}$$

$$E^{\alpha+n} = -\Omega^{\alpha+n,\beta} \nabla_\beta E - \Omega^{\alpha+n,\beta+n} \nabla_{\beta+n} E =$$
$$= -M^{\alpha\beta}\left(v^i N_{\beta i} - \frac{\partial L}{\partial q^\beta} \right) + M^{\alpha i}(N_{ij} - N_{ji}) M^{j\beta} v^\gamma M_{\beta\gamma} =$$
$$= -M^{\alpha\beta} v^i N_{\beta i} + M^{\alpha\beta} \frac{\partial L}{\partial q^\beta} + M^{\alpha i}(N_{ij} - N_{ji}) v^j =$$
$$= M^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\beta} - N_{j\beta} v^j \right) . \tag{14.12}$$

Κίνηση πάνω στίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου E^a σημαίνει ὅτι οἱ συντεταγμένες (q^α, v^α) τῆς $T^a M$ ἱκανοποιοῦν τίς διαφορικές ἐξισώσεις

$$\frac{dq^\alpha}{dt} = E^\alpha = v^\alpha , \tag{14.13}$$

$$\frac{dv^\alpha}{dt} = E^{\alpha+n} = M^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\beta} - N_{j\beta} v^j \right) , \tag{14.14}$$

ὅπου t εἶναι ἡ παράμετρος κατά μῆκος τῆς καμπύλης. Ἡ (14.13) ἀποτελεῖ ἕνα ἔλεγχο τῶν ὑπολογισμῶν μας ἐνῶ ἡ (14.14) δίνει:

$$M_{\gamma\alpha} \frac{dv^\alpha}{dt} = M_{\gamma\alpha} M^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\beta} - N_{j\beta} v^j \right) \Leftrightarrow$$

$$M_{\gamma\alpha} \frac{dv^\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^\gamma} - N_{j\gamma} v^j \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\gamma} \right) \frac{dv^\alpha}{dt} + \frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\gamma} \right) \frac{dq^j}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\gamma} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^\gamma} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\gamma} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^\gamma} ,$$

δηλαδή τίς ἐξισώσεις Euler-Lagrange γιά τήν Lagrangian L.

15. Ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν θεμελιώσεων κατά Hamilton καί κατά Lagrange.

Ἡ θεμελίωση τῆς μηχανικῆς κατά Lagrange πού πραγματευόμαστε στήν ἑνότητα 13 εἶναι παρόμοια μέ τή θεμελίωση τῆς μηχανικῆς κατά Hamilton πού πραγματευόμαστε στήν ἑνότητα 3. Στήν πρώτη δουλεύουμε στήν ἐφαπτόμενη δέσμη ἐνῶ στή δεύτερη δουλεύουμε στήν συνεφαπτόμενη δέσμη, πού καί οἱ δύο εἶναι ἰνώδεις χῶροι μέ βάση τό χῶρο μορφῆς. Καί στίς δύο θεμελιώσεις κάνουμε ἀκριβῶς τά ἴδια πράγματα γιά νά προβλέψουμε τήν ἐξέλιξη τοῦ συστήματος: θεωροῦμε ἕνα βαθμωτό πεδίο [τήν ἐνέργεια E στήν πρώτη, τήν Hamiltonian H στή δεύτερη], παίρνουμε τή συναλλοίωτη παράγωγό του, ἀνυψώνουμε τόν δείκτη της μέ τή βοήθεια μιᾶς συμπλεκτικῆς δομῆς καί ἀκολουθοῦμε τίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες τοῦ ἀνταλλοίωτου διανυσματικοῦ πεδίου πού προκύπτει. Ἐπιπλέον, οἱ χῶροι T^aM καί T_aM, καί οἱ συμπλεκτικές δομές Ω_{ab} καί Ω_{ab} εἶναι "πρακτικά οἱ ἴδιοι", ἀφοῦ συνδέονται μέ τόν διαμορφισμό F_L. Ἄν λοιπόν ἀπαιτήσουμε ὅτι καί τά βαθμωτά E καί H συνδέονται μέ τόν ἴδιο διαμορφισμό F_L, οἱ δύο θεμελιώσεις τῆς μηχανικῆς προβλέπουν ἰσοδύναμες ἐξελίξεις γιά τά διάφορα φυσικά συστήματα.

Ἀπό τίς παραπάνω παρατηρήσεις γίνεται φανερό ὅτι γιά νά πᾶμε ἀπό τή μηχανική κατά Lagrange στή μηχανική κατά Hamilton χρειάζεται ἁπλῶς νά ὁρίσουμε τήν Hamiltonian σάν τό push-forward τῆς ἐνέργειας ἀπό τό διαμορφισμό F_L :

$$H = F_{L\rightarrow} E = F_{L\rightarrow}(A_L - L). \tag{15.1}$$

Προσοχή ὅμως! Τό ἀντίστροφο δέν ἰσχύει καί ἐν γένει δέν μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἀπό τήν Hamiltonian τήν Lagrangian χωρίς καμμία ἐπιπλέον πληροφορία γιατί ὅταν δέν ξέρουμε τήν Lagrangian δέν ξέρουμε τήν ἀπεικόνιση F_L μεταξύ τῶν T^aM καί T_aM. Ἡ μηχανική λοιπόν κατά Hamilton εἶναι πιό γενική ἀπό τή μηχανική κατά Lagrange.