

Β Α Σ Ι Λ Η Κ. Ε Α Ν Θ Ο Π Ο Υ Λ Ο Υ

Πτυχιούχου Μαθηματικού Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης  
Κατόχου M.S. και Ph.D. Φυσικής Πανεπιστημίου Chicago  
Έπιμελητή στην Έδρα Αστρονομίας του Α.Π.Θ.

ΤΟΠΙΚΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΑΜΠΡΕΛΟΕΙΔΕΤΣ

Μ Ε Δ Α Ν Ε Σ Ο Π Ε Σ

Πραγματεία για Ύψηγεσία

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1982

Στούς δασκάλους μου

Ε.Ε., Α.Κ., Β.Σ., Γ.Κ.,  
Σ.Π., Ρ.Γ., Α.Α., Σ.Σ..

## Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

	Σελ.
ΠΡΟΛΟΓΟΣ	7
Κεφ. Α. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΜΕΛΑΝΩΝ ΟΠΩΝ	
1.1. Μεμονωμένες μελανές όπες	9
1.2. Τοπικές μελανές όπες	18
Κεφ. Β. ΤΟΠΙΚΕΣ ΜΕΛΑΝΕΣ ΟΠΕΣ ΜΕ ΣΦΑΙΡΙΚΟ ΟΡΙΖΟΝΤΑ	
2.1. Στατικές και άξισυμμετρικές εξισώσεις Einstein	23
2.2. Στατικές και άξισυμμετρικές λύσεις	25
2.3. Οι λύσεις που δέν καταστρέφουν τόν όρίζοντα	28
2.4. Ή σφαιρικότητα του όρίζοντα	32
Κεφ. Γ. ΤΟΠΙΚΕΣ ΜΕΛΑΝΕΣ ΟΠΕΣ ΜΕ ΣΑΜΠΡΕΛΟΕΙΔΗ ΟΡΙΖΟΝΤΑ	
3.1. Συνθήκη βαθμίδας για σαμπρελοειδείς συντεταγμένες	35
3.2. Οι εξισώσεις Einstein σε σαμπρελοειδείς συντεταγμένες	37
3.3. Κατασκευή της βασικής σαμπρελοειδοϋς μελανής όπης	39
3.4. Προσδιορισμός των παραμέτρων	43
3.5. Ή γενικότερη λύση των εξισώσεων Einstein	46
3.6. Ή γενικότερη σαμπρελοειδής τοπική μελανή όπή	49
Κεφ. Δ. ΦΥΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΜΕΛΑΝΩΝ ΟΠΩΝ	
4.1. Μάζα	55
4.2. Ήπιφάνεια του όρίζοντα	59
4.3. Ήπιφανειακή ένταση βαρύτητας	60
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	63
SUMMARY	65
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	67

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ πραγματεία αὐτή ἀσχολεῖται μέ τίς στατικές καί ἀξισυμμετρικές τοπικές μελανές όπές τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας καί τήν ἀναλυτική κατασκευή τῶν γενικότερων λύσεων αὐτῶν μέ σφαιρικό καί σαμπρελοειδῆ ὀρίζοντα.

Σχεδόν ὅλες οἱ ἐργασίες πάνω στίς μελανές όπές ἀναφέρονται στή μελέτη τῶν μεμονωμένων μελανῶν όπῶν, δηλαδή στή μελέτη φυσικῶν μοντέλων πού περιγράφουν μία - μόνη τῆς - μελανή όπή στό χωρόχρονο, καί τίποτε ἄλλο. Γι'αὐτές τίς μελανές όπές οἱ κατάλληλες ὀριακές συνθήκες πού ικανοποιεῖ ὁ χωρόχρονος πού τίς περιγράφει εἶναι ὅτι ἀσυμπτωτικά (στό ἄπειρο) τείνει πρός τόν ἐπίπεδο χωρόχρονο τοῦ Minkowski.

Οἱ τοπικές μελανές όπές δέν εἶναι ἐν γένει μεμονωμένες ἀλλά περιβάλλονται ἀπό μία ἀξονικά συμμετρική κατανομή ὕλης. Ἐφ' ὅσον πλέον οἱ ἐξισώσεις Einstein μέ μηδενικές πηγές (source free Einstein equations) ἀπαιτεῖται νά ικανοποιοῦνται μόνο σέ μία περιοχή γύρω ἀπό τή μελανή όπή καί ἐφ' ὅσον ὁ μετρικός ταυιστής τῆς μελανῆς όπῆς δέν ἀπαιτεῖται νά εἶναι ἀσυμπτωτικά ἐπίπεδος, οἱ ἐξισώσεις Einstein ἐπιτρέπουν τήν ὕπαρξη πολύ περισσότερων λύσεων τοπικῶν μελανῶν όπῶν ἀπό τίς λύσεις μεμονωμένων μελανῶν όπῶν. Στήν πραγματεία αὐτή ἀναπτύσσουμε μία μέθοδο προσδιορισμοῦ τῶν λύσεων τῶν ἐξισώσεων Einstein πού περιγράφουν στατικές καί ἀξισυμμετρικές τοπικές μελανές όπές καί βρίσκουμε ἀναλυτικά ὅλες αὐτές τίς λύσεις. Οἱ λύσεις ἐμπίπτουν σέ δύο διαφορετικές κατηγορίες, ἀνάλογα μέ τό ἂν ὁ ὀρίζοντάς τους εἶναι τοπολογικά μιᾶ σφαῖρα ἢ μιᾶ σαμπρέλα. Οἱ σφαιρικές τοπικές μελανές όπές εἶναι ἤδη γνωστές.



Τό πίο ανέλπιστο αποτέλεσμα τῆς ἔρευνας αὐτῆς εἶναι ὅτι οἱ λύσεις τῶν στατικῶν καί ἀξισυμμετρικῶν τοπικῶν μελανῶν ὁπῶν ἐκφράζονται ἀναλυτικά μέ τή βοήθεια τῶν πολυώνυμων Legendre.

Εὐχαριστῶ θερμά τούς καθηγητές S. Chandrasekhar, Β. Μπαμπάνη, Σ. Περσίδη καί Γ. Θεοδώρου γιά πολλές χρήσιμες συζητήσεις, εὐστοχες ὑποδείξεις καί συνεχῆ συμπαράσταση. Ἐπίσης εὐχαριστῶ τήν παρασκευάστρια τοῦ Ἐργαστηρίου Ἀστρονομίας κ. Μυρτώ Βασιλειάδη γιά τήν ἔξοχη δακτυλογράφηση ἑνός δύσκολου χειρόγραφου.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΜΕΛΑΝΩΝ ΟΠΩΝ

#### 1.1. Μειμονωμένες μελανές όπες

Ἄναμφισβήτητα ἡ Γενική Θεωρία τῆς Σχετικότητας ἀποτελεῖ τὴν καλύτερη θεωρία βαρύτητας πού ἔχει διατυπωθεῖ μέχρι σήμερα. Ἀπό τό 1916 πού προτάθηκε ἀπό τόν Einstein<sup>1-3</sup> ἔχει ὑποβληθεῖ σέ πολλές δοκιμασίες, θεωρητικές καί πειραματικές, καί τίς ἔχει περάσει ὅλες μέ μεγάλη ἐπιτυχία. Ἀπό τή θεωρητική σκοπιά ἡ Γενική Θεωρία τῆς Σχετικότητας εἶναι α) αὐτοσυνεπής, β) συμβιβαστή μέ τό πεπερασμένο τῆς ταχύτητας διάδοσης τοῦ φωτός πού ἀποτελεῖ καί τό πάνω ὄριο ταχύτητας διάδοσης οἰουδήποτε κλασσικοῦ πεδίου καί οἰασδήποτε πληροφορίας καί γ) συμφωνεῖ μέ τή Νευτώνεια θεωρία βαρύτητας στίς περιοχές ἀσθενῶν βαρυτικῶν πεδίων. Ἀξίζει νά σημειωθεῖ ὅτι στή δεκαετῆ προσπάθειά του πού ὀδήγησε στή διατύπωση τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας, ὁ Einstein<sup>4</sup> προσπάθησε νά κατασκευάσει μιὰ θεωρία βαρύτητας πού νά γενικεύει τή θεωρία τοῦ Νεύτωνα καί πού νά εἶναι συμβιβαστή μέ τό πεπερασμένο τῆς ταχύτητας διάδοσης ὅλων τῶν κλασσικῶν πεδίων.

Ἐφ' ὅσον οἱ προβλέψεις τῆς Νευτώνειας θεωρίας βαρύτητας καί τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας συμφωνοῦν στίς περιοχές τῶν ἀσθενῶν βαρυτικῶν πεδίων, ὁ πλοῦτος τῆς Σχετικότητας, οἱ οὐσιαστικοί πειραματικοί ἔλεγχοι πού τήν καθιερώνουν σάν τήν καλύτερη θεωρία βαρύτητας, καί τά καινούργια φυσικά φαινόμενα πού προβλέπει γίνονται ἀντιληπτά στίς περιοχές ἰσχυρῶν βαρυτικῶν πεδίων. (Ἐξαίρεση ἀποτελεῖ ἡ πρόβλεψη τῆς ὑπαρξης τῶν κυμάτων βαρύτητας). Περιοχές ἰσχυρῶν βαρυτικῶν πεδίων ἀποτελοῦν ἡ Big Bang, ἡ ἀρχική ἔκρηξη πού δημιούργησε τό σύμπαν, καί οἱ μελανές όπες (black holes). Αὐτές εἶναι οἱ περιοχές τοῦ σύμπαντος ὅπου "ἀνακαλύπτουμε" τή Γενι-

κή Σχετικότητα και συγχρόνως τό εργαστήριο όπου θά μπορέσουμε νά τήν ἐλέγξουμε πειραματικά. Ἡ πραγματεία αὐτή ἀναφέρεται στή μελέτη τῶν μελανῶν ὀπῶν.

Μιά ἀπλουστευμένη εἰκόνα τῶν μελανῶν ὀπῶν εἶναι δυνατόν νά παρουσιαστεῖ καί μέ τή βοήθεια ἰδεῶν τῆς Νευτώνειας Μηχανικῆς: Ἡ ταχύτητα διαφυγῆς ἀπό τήν ἐπιφάνεια σφαιρικῆς μάζας  $M$  πού ἔχει ἀκτίνα  $R$  εἶναι  $v = \sqrt{2GM/R}$ . Γιά κάθε μάζα λοιπόν  $M$ , μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἡ χαρακτηριστική ἐκείνη ἀκτίνα  $R_S$ , γιά τήν ὁποία ἡ ταχύτητα διαφυγῆς ἰσοῦται μέ τήν ταχύτητα τοῦ φωτός. Ἡ ἀκτίνα αὐτή λέγεται ἀκτίνα Schwarzschild<sup>5</sup> τῆς μάζας  $M$  καί δίνεται ἀπό τή σχέση  $R_S = 2GM/c^2$ . Προφανῶς, ἂν ἡ μάζα  $M$  περιοριστεῖ σέ ἀκτίνα μικρότερη τῆς  $R_S$ , τό φῶς, πού δεχόμαστε ὅτι ὑφίσταται τήν ἐπίδραση τοῦ βαρυτικοῦ πεδίου, δέν μπορεῖ νά διαφύγει μακριά ἀπό τή μάζα  $M$ . Ἐφ'ὅσον μάλιστα ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός ἀποτελεῖ τό πάνω ὄριο τῶν ταχυτήτων μέ τίς ὁποῖες μποροῦν νά μεταφερθοῦν πληροφορίες τίποτε δέν μπορεῖ νά διαφύγει μακριά ἀπό τή μάζα  $M$ . Ἡ μάζα  $M$  ἀποτελεῖ μιὰ μελανή ὀπή πού προδίδει τήν ὕπαρξή της μόνο ἀπό τό πεδίο βαρύτητας πού δημιουργεῖ. Φυσικά οἱ ἀπλουστευμένες αὐτές μελανές ὀπές δέν εἶναι "ἀπόλυτα μαῦρες". Φῶς καί σωματίδια μέ κατάλληλες ταχύτητες μποροῦν θεωρητικά νά βγοῦν ἀπό τόν ὀρίζοντα (γεγονότων), πού εἶναι ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια ἀκτίνας  $R=R_S$ · μόνο πού δέν μποροῦν νά φτάσουν σέ ἀπειρη ἀπόσταση ἀπό τή μάζα  $M$ . Εὐκόλα μπορεῖ νά διαπιστωθεῖ ὅτι φῶς ἢ σωματίδια πού φεύγουν ἀπό ἀπόσταση  $r < R_S$  ἀπό τό κέντρο τῆς σφαιρικῆς μάζας  $M$  μποροῦν νά φτάσουν τό πολύ μέχρι τήν ἀπόσταση  $R$  ἀπό τό κέντρο πού δίνεται ἀπό τή σχέση  $1/r - 1/R_S = 1/R$ .

Ἡ Γενική Θεωρία τῆς Σχετικότητας προβλέπει τήν ὕπαρξη μελανῶν ὀπῶν. Ἐχουν ἀνακαλυφθεῖ τέσσερις ἀκριβεῖς λύσεις τῶν ἐξισώσεων πεδίου τοῦ Einstein πού περιλαμβάνουν καί περιοχές τοῦ χώρου ἀπό τίς



όποιες τίποτε δέν μπορεῖ νά διαφύγει στό ἔξωτερικό σύμπαν. Οἱ τέσσε-  
ρις αὐτές λύσεις εἶναι ἡ λύση Schwarzschild<sup>5</sup> (1916), ἡ Reissner -  
Nordström<sup>6,7</sup> (1918-19), ἡ Kerr<sup>8</sup> (1963) καί ἡ Kerr-Newman<sup>9</sup> (1965).  
Ἐξαρτῶνται, ἀντίστοιχα, ἀπό τίς παράμετρος  $M$ ,  $M$  καί  $Q$ ,  $M$  καί  $J$ ,  
 $M$  καί  $J$  καί  $Q$ , ὅπου  $M$  εἶναι ἡ ὅλική μάζα,  $J$  ἡ ὅλική στροφορμή καί  
 $Q$  τό ὅλικό φορτίο τῆς μελανῆς ὀπῆς. Οἱ δύο πρῶτες εἶναι σφαιρικά  
συμμετρικές ἐνῶ οἱ δύο τελευταῖες, πού ἔχουν καί στροφορμή, δέν εἶ-  
ναι. Οἱ τρεῖς πρῶτες λύσεις μποροῦν νά θεωρηθοῦν σάν μερικές περι-  
πτώσεις τῆς μελανῆς ὀπῆς Kerr-Newman. Ἐπιπλέον, μία συλλογική προ-  
σπάθεια<sup>10-13</sup> πού ἄρχισε τό 1968 καί πρακτικά ὁλοκληρώθηκε τό 1975  
(Robinson) ἀπόδειξε ὅτι οἱ παραπάνω τέσσερις λύσεις εἶναι οἱ μονα-  
δικές λύσεις τῶν ἐξισώσεων Einstein πού περιγράφουν τίς ἀξονικά  
συμμετρικές (ἀξισυμμετρικές) καί μεμονωμένες μελανές ὀπές στά πλαί-  
σια τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας. Ἔτσι, πράγμα σπανιότατο  
γιά τή σχετικότητα, ξέρουμε ἀναλυτικά ὅλες τίς λύσεις ἀξισυμμετρι-  
κῶν καί μεμονωμένων μελανῶν ὀπῶν, οἱ ὁποῖες μάλιστα εἶναι ἀρκετά  
ἀπλές καί μποροῦν νά μελετηθοῦν ἀναλυτικά.

Τό γεγονός πῶς ἡ γενικότερη λύση μελανῆς ὀπῆς ἐξαρτᾶται μόνον  
ἀπό τίς τρεῖς παράμετρος  $M$ ,  $J$  καί  $Q$  συνεπάγεται κάτι πολύ σημαντικό:  
Ὅλες οἱ πληροφορίες οἱ σχετικές μέ τό εἶδος τῆς ὕλης πού σχημάτισε  
τή μελανή ὀπή, τήν κατανομή της, τίς ροπές ἀδράνειάς της, τίς λεπτο-  
μέρειες τῆς κατανομῆς τῆς στροφορμῆς, τῆς κατανομῆς τῶν φορτίων κλπ.,  
χάνονται κατά τό σχηματισμό τῆς μελανῆς ὀπῆς. Ἡ μόνη πληροφορία  
πού διατηρεῖται στό βαρυτικό (καί τό ἠλεκτρομαγνητικό, ὅταν ὑπάρχει  
μὴ μηδενικό φορτίο) πεδίο εἶναι ἡ πληροφορία γιά τήν ὅλική μάζα, τήν  
ὅλική στροφορμή καί τό ὅλικό φορτίο τῆς μελανῆς ὀπῆς. Τό συμπέρασμα  
αὐτό εὐφημιστικά ἀναφέρεται σάν τό "no hair theorem"<sup>12</sup>.

Γιά τήν ἀπλούστερη, τή μελανή ὀπή Schwarzschild, ἡ Γενική Θεω-  
ρία τῆς Σχετικότητας προβλέπει ὅτι ἡ ἀκτίνα Schwarzschild  $R_S$  καί ἡ  
ὅλική μάζα  $M$  συνδέονται ἀκριβῶς μέ τήν ἴδια σχέση  $R_S = 2GM/c^2$

μέ την οποία συνδέονται και στίς απλουστευμένες μελανές όπές της Νευτώνειας θεωρίας. Υπάρχει όμως και μία θεμελιώδης διαφορά: Στη Σχετικότητα ή σφαιρική επιφάνεια  $r = R_S$  είναι ένας απόλυτος όριζοντας γεγονότων: Τίποτε δέν μπορεί νά φύγει από τόν όριζοντα, ούτε και γιά λίγο, ούτε κι αν προσπαθοῦμε νά τό έκτοξεύσουμε από τήν επιφάνεια  $r = R_S$ . Οί μελανές όπές της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας είναι πραγματικές "μαῦρες τρύπες στό χῶρο". Καί στίς άλλες τρεῖς λύσεις τῶν ἐξισώσεων Einstein πού περιγράφουν μελανές όπές ὁ όριζοντας γεγονότων είναι μιά επιφάνεια μονῆς κατεύθυνσης πού ἡ ἀκτίνα της δίνεται, γιά τή γενικότερη μελανή όπή Kerr-Newman, από τή σχέση  $R_S = M + (M^2 - J^2/M^2 - Q^2/M^2)^{1/2}$ .

Ένα άλλο χαρακτηριστικό τῶν μελανῶν όπῶν της Σχετικότητας είναι πῶς σώματα πού ἔχουν περάσει μέσα στόν όριζοντα γεγονότων ὄχι μόνο δέν μποροῦν νά ξαναφύγουν ἔξω, ἔστω και γιά λίγο, ἀλλά ούτε και μποροῦν νά σταθοῦν σέ μιά σταθερή ἀπόσταση  $r = a < R_S$  από τό κέντρο, ἔστω κι αν διαθέτουν ὅσοδῆποτε ἰσχυροῦς πύραυλους. Όπως στήν καθημερινή μας ζωῆ δέν μποροῦμε νά συγκρατήσουμε τήν πρός τό μέλλον κίνησή μας στό χρόνο, ἔτσι και μέσα στή μελανή όπή δέν μποροῦμε νά σταματήσουμε τήν κίνησή μας πρός τό κέντρο. Αὐτή ἡ παρατήρηση είναι μιά ἀπλοϊκή ἐξήγηση τοῦ γεγονότος ὅτι οἱ ρόλοι τοῦ χῶρου και τοῦ χρόνου ἐναλλάσσονται μέσα στή μελανή όπή. Στό σημεῖο αὐτό ἀναφέρουμε ὅτι ἡ διαδρομή από τόν όριζοντα μέχρι τίς ἀποστάσεις πού δεχόμαστε ὅτι ἰσχύει ἡ θεωρία της Σχετικότητας διανύεται σέ χρόνο  $10^{-5}$  sec. περίπου γιά μιά μελανή όπή μέ μάζα μιά ἡλιακή μάζα.

Οἱ σχετικιστικές μελανές όπές είναι ἕνα πεδίο ὅπου ἡ ἔρευνα συνεχίζεται και καινούργιες ἰδιότητες και φαινόμενα συνεχῶς ἀνακαλύπτονται. Αναφέρουμε μερικά:

- Έξαγωγή ἐνέργειας<sup>14-17</sup> από μελανές όπές: "Αν και τίποτε δέν μπορεί νά διαφύγει από τίς μελανές όπές, ἔχει βρεθεῖ ἕνας πολύ ἔξυ-



πνος μηχανισμός με τόν όποιο - χωρίς νά παραβιάζεται καμμιά από τίς άρχές τής σχετικότητας - ένέργεια μπορεί νά άφαιρεθεϊ άπ'αυτές. 'Ο μηχανισμός όφείλεται στόν Penrose (1969), άναφέρεται συνηθως σάν ή "Penrose process" και έφαρμόζεται άποκλειστικά στίς περιστρεφόμενες μελανές όπές Kerr και Kerr-Newman. Σ'αυτές τίς μελανές όπές ύπάρχει μιá περιοχή έξω από τόν όρίζοντα, ή έργόσφαιρα, στήν όποία είναι δυνατές και τροχιές ύλικών σωματιδίων με άρνητική ένέργεια. ('Εργόσφαιρα δέν ύπάρχει στίς μή περιστρεφόμενες, σφαιρικά συμμετρικές μελανές όπές). 'Η μέθοδος του Penrose είναι ή έξής: Σώμα συνολικής ένέργειας  $E_0$  εισέρχεται στήν έργόσφαιρα όπου και διασπάται σέ δύο κομμάτια. Τό ένα από τά δύο περνά τόν όρίζοντα άκολουθώντας τροχιά άρνητικής ένέργειας  $E_1$ , ένώ τό δεύτερο άκολουθεϊ τροχιά πού τό φέρνει έξω από τή μελανή όπή. Διατήρηση τής ένέργειας στό σημείο τής διάσπασης δίνει  $E_0 = E_1 + E_2$ . 'Εφ'όσον λοιπόν  $E_1 < 0$ , τό δεύτερο κομμάτι άπομακρύνεται με ένέργεια  $E_2$ , μεγαλύτερη από τήν άρχική  $E_0$ . Λεπτομερεϊς ύπολογισμοί έχουν δείξει ότι: Πρώτον, ή ένέργεια πού άφαιρεϊται από τή μελανή όπή είναι κυρίως άρνητική ένέργεια με άποτέλεσμα, μετά από άρκετές έφαρμογές τής μεθόδου Penrose, ή στροφορμή τής μελανής όπής νά έλαττώνεται, ή έργόσφαιρα νά μικραίνει (και τελικά νά έξαφανίζεται) και ή μέθοδος νά μήν είναι πλέον έφαρμόσιμη. Καί δεύτερον, όταν οι διασπάσεις των σωματιδίων στήν έργόσφαιρα συμβαίνουν τυχαία, μόνον ένα πολύ μικρό ποσοστό άπ'αυτές δίνουν σωματίδια πού διαφεύγουν με μεγαλύτερη ένέργεια από τήν άρχική. "Ετσι ή μέθοδος Penrose δέν φαίνεται νά μπορεί νά χρησιμοποιηθεϊ στήν άστροφυσική για νά έξηγηθοϋν οι τεράστιες έκλύσεις ένέργειας πού παρατηροϋνται σέ μερικά άστροφυσικά φαινόμενα (π.χ Quasars). Αύτή ή άδυναμία της φυσικά δέν έλαττώνει καθόλου τό μεγάλο θεωρητικό ένδιαφέρον πού παρουσιάζει.



-"Θερμοδυναμική" των μελανών όπών: "Έχει αποδειχθεί, τελείως γενικά, ότι όταν μιά μελανή όπή ύποστει μιά οποιαδήποτε φυσική μεταβολή (π.χ πτώση ενός σώματος στη μελανή όπή, απορρόφηση ήλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας) ή επιφάνεια του όριζοντα της μελανής όπης μεγαλώνει ή παραμένει σταθερή· ποτέ δέν μικραίνει!<sup>15-17,21-23</sup> 'Η επιφάνεια του όριζοντα λοιπόν, σέ πρώτη όψη, μοιάζει πολύ μέ τήν έντροπία ενός συστήματος. 'Η όμοιότητα αυτή είναι ακόμη βαθύτερη. Θεωρούμε ένα κλειστό φυσικό σύστημα πού περιέχει καί μελανές όπές. "Ας είναι  $A$  ή συνολική επιφάνεια των όριζόντων των μελανών όπών καί  $S$  ή συνολική έντροπία της ύλης καί της ενέργειας του συστήματος πού βρίσκεται έξω από τις μελανές όπές. "Όταν κάποια μάζα πέσει στις μελανές όπές, ή  $S$  ελαττώνεται καί ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής φαίνεται ότι παραβιάζεται. Συγχρόνως όμως αύξάνει ή  $A$ . Για να συνδυαστούν οι δύο παραπάνω μεταβολές έχει προταθεί τό γενικευμένο δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα:<sup>24-26</sup> Κατά τις μεταβολές ενός κλειστού φυσικού συστήματος ή γενικευμένη έντροπία του συστήματος

$$\tilde{S} = S + \frac{\pi k c^3}{2Gh} A \quad (1.1)$$

δέν ελαττώνεται. Στην παραπάνω σχέση  $k$  είναι ή σταθερή του Boltzman,  $h$  ή σταθερή του Planck,  $G$  ή σταθερή του Νεύτωνα καί  $c$  ή ταχύτητα του φωτός. Σέ όλα τά φυσικά συστήματα πού έχουν μελετηθεί, τό γενικευμένο δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα ισχύει. 'Επιπλέον, υπάρχουν ισχυρές ένδείξεις (καί αποδείξεις σέ μερικές περιπτώσεις) πώς ή καθολική ισχύς του γενικευμένου θερμοδυναμικού αξιώματος ίσοδυναμεί μέ μία άλλη είκασία, πώς όλες οι ανωμαλίες (singularities) του χωρόχρονου πού σχηματίζονται μετά από βαρυτική κατάρρευση περιβάλλονται από όριζοντες γεγονότων (Cosmic Censor Hypothesis)<sup>14</sup>. 'Ο γενικευμένος δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής συνδυάζοντας σχετικότητα, θερμοδυναμική καί κβαντομηχανική, πιθανόν να αποτελεί μιά από τις θεμελιώδους σημασίας ανα-

καλύψεις της δεκαετίας του έβδομήντα.

- Θερμοκρασία των μελανών όπών:<sup>25,26</sup> 'Η παραδοχή της ισχύος της θερμοδυναμικής σχέσης  $dE = TdS$  (μεταβολή ενέργειας για ισόχωρες και αντιστρεπτές μεταβολές) και στις μεταβολές που ύφιστανται οι μελανές όπες με έντροπία  $\frac{\pi kc^3}{2Gh}$  A μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να οριστεί η θερμοκρασία μιας μελανής όπης. Για τη μελανή όπη Schwarzschild βρίσκουμε

$$T = \frac{hc^3}{16\pi^2 kG} \cdot \frac{1}{M} = \frac{6 \times 10^{-8}}{(M/M_{\odot})} \text{ } ^{\circ}\text{K} . \quad (1.2)$$

'Η θερμοκρασία μιας μελανής όπης είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας της. 'Ανάλογες σχέσεις, και με την ίδια εξάρτηση ως προς τη μάζα, μπορούν να γραφούν για τη θερμοκρασία και των άλλων μελανών όπών.

- 'Ακτινοβολία σωματιδίων από τις μελανές όπες (φαινόμενο Hawking):<sup>27-32</sup> Οι μελανές όπες που μέχρι τώρα περιγράψαμε είναι οι μελανές όπες που προβλέπει η κλασική σχετικότητα. "Αν και προς τό παρόν δέν υπάρχει κβαντική θεωρία βαρύτητας, μπορούμε φυσικά να μελετήσουμε τη συμπεριφορά μερικῶν κβαντισμένων πεδίων, π.χ., βαθμωτῶν ἢ ἠλεκτρομαγνητικῶν, στὸν καμπύλο χῶρο πού δημιουργεῖται γύρω ἀπό μιὰ μελανή όπη. 'Από τις μελέτες αυτές προέκυψε κάτι τό τελείως ἀναπάντεχο: κβαντομηχανικά οι μελανές όπες ακτινοβολούν σωματίδια με κατανομή μέλανος σώματος και θερμοκρασία πού δίνεται ἀπό τή σχέση (1.2)! 'Η ἀνακάλυψη αὐτή τοῦ Hawking<sup>27</sup> (1974) δείχνει ἐπιπλέον πώς ἡ θερμοκρασία πού ἀναφέραμε στήν προηγούμενη παράγραφο είναι κάτι παραπάνω ἀπό τό συντελεστή ἀναλογίας τῆς σχέσης  $dE = TdS$ , και ἀρχίζουμε νά τή δεχόμαστε σάν τή θερμοκρασία τῆς μελανῆς όπης. 'Επειδή ἡ θερμοκρασία ἐλαττώνεται με τήν αὔξηση τῆς μάζας τῆς μελανῆς όπης, σημαντική είναι μόνο ἡ ἀκτινοβολία ἀπό μικρές μελανές όπες. Πάντως, καθώς ἡ μελανή όπη ἀκτινοβολεῖ, ἡ μάζα



της ελαττώνεται, ή θερμοκρασία της αύξάνει, και ή ακτινοβολία της συνεχίζεται με έντονοτερο ρυθμό! Οί προβλέψεις τών προσεγγιστικῶν λογαριασμῶν, πού εἶναι οί μόνοι πού γίνονται πρὸς τό παρόν, εἶναι πῶς οί μελανές όπές εξαερώνονται, με μιά έκρηξη κατά τίς τελευταῖες στιγμές τῆς ὕπαρξής τους. Ἡ (προσεγγιστική) κβαντομηχανική λοιπόν πού πρὸς τό παρόν διαθέτουμε, προβλέπει πῶς και οί μελανές όπές ἔχουν πεπερασμένη ζωή! Μόνο πού ή συνολική τους ζωή βρίσκεται πῶς εἶναι περίπου  $10^{66} (M/M_{\odot})^3$  ἔτη, δηλαδή πολλές-πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη ἀπό τήν ὀλική ήλικία τοῦ σύμπαντος γιά μελανές όπές με μάζες  $1 M_{\odot}$  πού προκύπτουν κατά τήν κατάρρευση ἀστέρων. Τό φαινόμενο Hawking λοιπόν θά ἔχει ἀστροφυσική σημασία μόνον ἂν ὑπάρχουν και μικρές μελανές όπές στό σύμπαν, με μάζα περίπου  $10^{15}$  gr, (γιά τίς ὁποῖες ή θεωρία προβλέπει ἀκτίνα περίπου 1 fermi, δηλαδή περίπου σάν τήν ἀκτίνα ἑνός ἐλαφροῦ πυρήνα!) οί ὁποῖες θά ἔχουν ζωή ὅση περίπου και ή ήλικία τοῦ σύμπαντος και αὐτό τόν καιρό θά ἐκρήγνυνται. Φυσικά δέν ξέρουμε κανένα φυσικό μηχανισμό σχηματισμοῦ τέτοιων μελανῶν όπῶν. Παρ' ὅλα αὐτά, ή θεωρητική σημασία τοῦ φαινομένου Hawking εἶναι τεράστια γιὰτί μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν ἕνα πρῶτο βῆμα πρὸς τή δημιουργία μιᾶς κβαντικῆς θεωρίας τῆς βαρύτητας.

-Διαταραχές τών μελανῶν όπῶν: Οί ἀναλυτικές ἐκφράσεις τών λύσεων πού περιγράφουν μελανές όπές στή σχετικότητα εἶναι ἀρκετά ἀπλές ὥστε νά ἐπιτρέπουν τή μαθηματική ἀνάλυση τῆς θεωρίας διαταραχῶν πρώτης τάξης.<sup>33</sup> Πράγματι, γιά τίς μελανές όπές Schwarzschild,<sup>34-42</sup> Reissner-Nordström<sup>43-53</sup> και Kerr<sup>54-69</sup> οί γενικότερες διαταραχές πρώτης τάξης ἔχουν ἤδη μελετηθεῖ ικανοποιητικά. Ἀπό τίς μελέτες αὐτές ἔχουν προκύψει πολλά ἐνδιαφέροντα συμπεράσματα. Π.χ. ἔχει βρεθεῖ πῶς στή μελανή όπή Kerr ἐμφανίζεται τό φαινόμενο τῆς ὑπερακτινοβολίας<sup>56,57</sup> (superradiance): Κύματα πού προσπίπτουν στή μελανή όπή με κατάλληλη συχνότητα και χωρική ἐξάρτηση ἀνακλῶνται με ἔνταση και ἐνέργεια μεγαλύτερη ἀπό τήν εἰσερχόμενη. Μ' αὐτό τόν τρόπο τό κύμα ἀφαιρεῖ κινητική ἐνέργεια ἀπό τή μελανή όπή. Τό φαινόμενο τῆς ὑπερακτινοβολίας

μπορεί να παρατηρηθεί μόνο σε μελανές όπες που περιστρέφονται. Για τις μελανές όπες Schwarzschild και Reissner-Nordström προέκυψε ότι οι διαταραχές τους διαχωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τις διαταραχές άρτιας (even) και περιττής (odd) όμοτιμίας (parity)<sup>34,35,43-45</sup>. Η μελέτη και των δύο ειδών διαταραχών ανάγεται στη μελέτη σκέδασης κυμάτων από δυναμικά "μικρής έμβέλειας"<sup>40,50</sup> (short range potentials). Επίσης βρέθηκε ότι οι διαταραχές άρτιας όμοτιμίας μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν<sup>49</sup> από τις διαταραχές περιττής όμοτιμίας και αντίστροφα και ότι και οι δύο κατηγορίες διαταραχών περιγράφονται από ίσοδύναμα προβλήματα σκέδασης<sup>49,51</sup>. Ένα άλλο φαινόμενο<sup>33,49</sup> που προέκυψε από μελέτη διαταραχών πρώτης τάξης είναι πώς, κατά τη σκέδαση βαρυτικών κυμάτων από τη μελανή όπη Reissner-Nordström, ένα μέρος της ενέργειας που ακτινοβολείται εκπέμπεται σαν ενέργεια ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, και αντίστροφα. Δυστυχώς τό ποσοστό της ενέργειας που μετατρέπεται από βαρυτική σε ηλεκτρομαγνητική είναι πολύ μικρό ώστε η ιδέα να διαπιστώσουμε την ύπαρξη κυμάτων βαρύτητας έμμεσα παρατηρώντας τά ηλεκτρομαγνητικά στά όποια μετατράπηκαν τά βαρυτικά κύματα να μή φαίνεται πραγματοποιήσιμη. Στις μελέτες διαταραχών ή μελανή όπη Kerr-Newman αποτελεί τή μεγάλη εξαίρεση<sup>33</sup>. Γι'αυτήν, όλες σχεδόν οι ενδιαφέρουσες έρωτήσεις παραμένουν αναπάντητες, γιατί έχουν παρουσιαστεί αναπάντεχες δυσκολίες στη μελέτη των έξιόσεων που περιγράφουν τά διάφορα φυσικά φαινόμενα. Είναι φανερό πώς μιά καινούργια ιδέα απαιτείται για τή λύση και των προβλημάτων αυτών.

## 1.2. Τοπικές μελανές όπες

Στήν πραγματεία αυτή κατασκευάζουμε αναλυτικά τίς γενικότερες λύσεις τών έξιωσεων Einstein πού περιγράφουν στατικές, άξισυμμετρικές, τοπικές μελανές όπες (static, axisymmetric, local black holes) τών οποίων ο όρίζοντας είναι τοπολογικά μιά σαμπρέλα (torus). 'Η μέθοδος τής κατασκευής πού άκολουθοϋμε είναι γενική, εφαρμόζεται καί για τίς στατικές, άξισυμμετρικές, τοπικές μελανές όπες μέ (τοπολογικά) σφαιρικό όρίζοντα, καί στήν περίπτωση αυτή δίνει τά ίδια άποτελέσματα μ'αυτά πού πρόσφατα βρέθηκαν από τόν Chandrasekhar<sup>33</sup>. 'Η μέθοδος του Chandrasekhar είναι διαφορετική από τή δική μας καί δέν εφαρμόζεται για τίς σαμπρελοειδεΐς μελανές όπες.

'Ο μετρικός τανυστής μιās τοπικής μελανής όπής έν γένει δέν είναι άσυμπτωτικά επίπεδος (asymptotically flat ή asymptotically Minkowskian) καί συνεπώς δέν περιγράφει μιά μεμονωμένη μελανή όπή. 'Εφ'όσον λοιπόν δέν ικανοποιείται μιά από τίς βασικότερες προϋποθέσεις του θεωρήματος μοναδικότητας τών Israel, Carter καί Robinson<sup>10-13</sup>, (τό no hair theorem), είναι δυνατή ή ύπαρξη κι άλλων λύσεων μελανών όπών έξω από τήν τριπαραμετρική οίκογένεια λύσεων Kerr-Newman. "Ας σημειωθεί ότι τά μοντέλα τοπικών μελανών όπών άνταποκρίνονται καλύτερα πρós τή φυσική πραγματικότητα από τά μοντέλα μεμονωμένων μελανών όπών.

'Η φυσική κατάσταση πού περιγράφουν οι τοπικές μελανές όπες είναι ή έξής: Σε μιά περιοχή του χώρου ύπάρχει μιά μελανή όπή καί για όρισμένη πεπερασμένη άπόσταση έξω από τή μελανή όπή (δηλαδή έξω από τόν όρίζοντα τής μελανής όπής) δέν ύπάρχει τίποτε άλλο έκτός από τό πεδίο βαρύτητας. Μάζα, φορτία κλπ., όπως καί άλλα φυσικά πεδία είναι δυνατό νά ύπάρχουν πέρα από τήν παραπάνω πεπερασμένη άπόσταση από τή μελανή όπή. 'Εφ'όσον



λοιπόν η μελανή όπή περιβάλλεται από ύλη δέν είναι μεμονωμένη, και συνεπώς ο χωρόχρονος δέν απαιτείται νά τείνει άσυμπτωτικά προς τόν επίπεδο χωρόχρονο Minkowski. Φυσικά η έξωτερική κατανομή τής ύλης έπηρεάζει τή μορφή του χωρόχρονου γύρω από τή μελανή όπή.

Στό σημείο αυτό θά πρέπει νά τονιστεϊ ότι η μελέτη μας και η κατασκευή τής γεωμετρίας του χωρόχρονου περιορίζεται μόνο στή περιοχή του χωρόχρονου γύρω από τή μελανή όπή όπου δέν υπάρχει τίποτε άλλο έκτός από τό πεδίο βαρύτητας.

Τά κυριώτερα χαρακτηριστικά τών τοπικών μελανών όπών (και συγχρόνως και οι προϋποθέσεις για νά θεωρηθεϊ ότι μια λύση τών έξισώσεων Einstein περιγράφει μια τοπική μελανή όπή) είναι τά έξής:

(α) Στόν χωρόχρονο τους υπάρχει μια λεία (smooth,  $C^\infty$ ), φωτοειδής (null) υπερεπιφάνεια (hyper-surface) "μονής κατεύθυνσης", ο όρίζοντας γεγονότων<sup>23</sup> (event horizon). Στό χωρόχρονο ο όρίζοντας είναι μια πολλαπλότητα με τοπολογία  $N \times R$  όπου  $N$  είναι μια συμπαγής, φωτοειδής επιφάνεια δύο διαστάσεων. Η επιφάνεια  $N$  είναι η τομή του όριζοντα με μια χωροειδή (spacelike) υπερεπιφάνεια (τήν επιφάνεια σταθερού χρόνου  $t_0$ ) και συνήθως αναφέρεται κι αυτή σαν ο όρίζοντας τής μελανής όπης. Η  $N$  είναι ο όρίζοντας τής μελανής όπης στήν τρισδιάστατη παράστασή της σ' ένα διάγραμμα χώρου. Στίς μελανές όπες πού κατασκευάζουμε στήν πραγματεία αυτή ο όρίζοντας  $N$  έχει τήν τοπολογία τής σφαίρας  $S^2$  ή τής σαμπρέλας  $S^1 \times S^1$ .

(β) Ο μετρικός τανυστής του χωρόχρονου ικανοποιεϊ, σε μία άνοιχτή περιοχή  $U = N \times R \times R$  του όριζοντα, τίς έξισώσεις Einstein (vacuum Einstein equations) με τανυστή πίεσης και ένέργειας (stress energy tensor) ίσο με τό μηδέν.



(γ) Όλες οι ανωμαλίες (singularities) του χωρόχρονου περι- κλείονται από τόν ορίζοντα, πού σημαίνει ότι δέν υπάρχουν στον χωρόχρονο "γυμνές ανωμαλίες"<sup>23</sup> (naked singularities).

Οι λύσεις τών εξισώσεων Einstein πού προσδιορίζουμε έχουν δύο συμμετρίες: 'Ο μετρικός τανυστής τών μελανών όπών έχει άξο- νική συμμετρία ένω συγχρόνως είναι ανεξάρτητος καί του χρόνου. 'Η ύπαρξη τών συμμετριών αύτών έκφοράζεται μαθηματικά μέ τή συν- θήκη ότι ο μετρικός τανυστής στην περιοχή  $U$  τής μελανής όπής δέχεται δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανυσματικά πεδία Killing<sup>71</sup> (Killing vector fields) τά όποια αντιμετατίθενται κι άπ'τά όποια τό ένα έχει κλειστές χωροειδεΐς ολοκληρωτικές καμπύλες. 'Υποθέ- τουμε επίσης ότι ένα τουλάχιστον άπό τά διανυσματικά πεδία είναι όρθογώνιο σέ υπερεπιφάνεια (hyper-surface orthogonal) όποτε άπο- δεικνύεται, μέ τή βοήθεια καί τών εξισώσεων Einstein, ότι καί κάθε γραμμικός συνδυασμός τών δύο διανυσματικών πεδίων Killing ικανοποιεί τήν παραπάνω συνθήκη πού έκφοράζει ότι ή μελανή όπή δέν περιστρέφεται. Οι λύσεις τών εξισώσεων Einstein πού ικανο- ποιούν τίς παραπάνω συνθήκες αναφέρονται στή βιβλιογραφία σαν οι στατικές καί άξισυμμετρικές (static and axisymmetric) λύσεις τών εξισώσεων Einstein.

Οι στατικές καί άξισυμμετρικές εξισώσεις Einstein μπορούν νά αναχθοϋν<sup>72,73</sup> σέ μία εξίσωση του Laplace σέ τρεις διαστάσεις καί δύο άλλες άπλές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης μέ μερικές παραγώγους. Οι λύσεις τών εξισώσεων αύτών αναφέρονται συνήθως σαν οι λύσεις Weyl. Τό βασικό μας πρόβλημα στην κατασκευή τών τοπι- κών μελανών όπών δέν είναι ή εύρεση τής γενικής λύσης Weyl αλλά ο προσδιορισμός εκείνων τών λύσεων Weyl πού παριστάνουν τοπικές μελανές όπές.

Όρισμένες λύσεις Weyl που παριστάνουν τοπικές μελανές όπες έχουν βρεθεί από τους Mysak και Szekeres<sup>74</sup>, Israel και Khan<sup>75</sup>, Israel<sup>76</sup>, και Peters<sup>77</sup>. Οι μελανές όπες των τριών πρώτων εργασιών έχουν όριζοντα που είναι ομοιομορφικός με τη διδιάστατη σφαίρα, ενώ η λύση που κατασκευάστηκε από τον Peters έχει δύο αθάιρετες παράμετρος και όριζοντα ομοιομορφικό με τη διδιάστατη τοπολογική σαμπρέλα. Σε μία πρόσφατη εργασία τους, που δέν έχει ακόμη δημοσιευτεί, οι Geroch και Hartle<sup>78</sup> αποδεικνύουν θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας για τις στατικές και άξισυμμετρικές τοπικές μελανές όπες. Για τη μοναδικότητα αποδεικνύουν τό πολύ σημαντικό συμπέρασμα ότι οι μόνες δυνατές τοπολογίες των όριζόντων των στατικών και άξισυμμετρικών τοπικών μελανών όπών είναι οι τοπολογίες της σφαίρας  $S^2$  και της σαμπρέλας  $S^1 \times S^1$ . Για τήν ύπαρξη, οι Geroch και Hartle καταλήγουν στό συμπέρασμα ότι υπάρχουν στατικές και άξισυμμετρικές τοπικές μελανές όπες και ότι οι μετρικοί τους τανυστές έξαρτώνται από μία λύση της έξίσωσης του Laplace, χωρίς όμως νά προσδιορίζουν αναλυτικά τις λύσεις αυτές.

Οι πρώτες αναλυτικές έκφράσεις για τή γενικότερη στατική και άξισυμμετρική τοπική μελανή όπή με σφαιρικό όριζοντα δόθηκαν από τόν Chandrasekhar<sup>33</sup> στό υπό έκδοση βιβλίο του, ή μέθοδος του όμως δέν μπορεί νά εφαρμοστεί για τόν προσδιορισμό και των στατικών άξισυμμετρικών τοπικών μελανών όπών με σαμπρελοειδή όριζοντα.

Η συνεισφορά της πραγματείας αυτής είναι ή ανάπτυξη μιās καινούργιας γενικής μεθόδου για τόν προσδιορισμό των στατικών και άξισυμμετρικών λύσεων των έξισώσεων Einstein που παριστάνουν τοπικές μελανές όπες τόσο με σφαιρικό όσο και με σαμπρελοειδή όριζοντα. Επιπλέον, εφαρμόζουμε τή μέθοδο αυτή και βρίσκουμε για μέν τις σφαιρικές μελανές όπες τις λύσεις του Chandrasekhar, ενώ για τις σαμπρελοειδείς μελανές όπες βρίσκουμε τή γενικότερη στα-

τική και άξισυμμετρική τοπική μελανή όπή. Σύμφωνα με τό θεώρημα μοναδικότητας τών Geroch και Hartle οί λύσεις πού κατασκευάσαμε αποτελοϋν τίς γενικότερες στατικές και άξισυμμετρικές τοπικές μελανές όπές τής Γενικής Θεωρίας τής Σχετικότητας.

Τό δεύτερο κεφάλαιο πραγματεύεται τήν αναλυτική κατασκευή τών λύσεων πού παριστάνουν τοπικές μελανές όπές με σφαιρικό όριζοντα και τό τρίτο τήν κατασκευή τών λύσεων με σαμπρελοειδή όριζοντα. Τό τέταρτο κεφάλαιο πραγματεύεται τόν προσδιορισμό τών φυσικῶν χαρακτηριστικῶν τών γενικῶν στατικῶν και άξισυμμετρικῶν τοπικῶν μελανῶν όπῶν.

2.1. Στατικές και άξισυμμετρικές εξισώσεις Einstein.

Ο μετρικός τανυστής που περιγράφει τη γενικότερη στατική και άξισυμμετρική λύση των εξισώσεων Einstein (σέ μονάδες με ταχύτητα του φωτός  $c=1$  και σταθερή παγκόσμιας έλξης  $G=1$ ) έχει τη μορφή<sup>79,80,33</sup>

$$ds^2 = e^{2\nu} (dt)^2 - e^{2\psi} (d\varphi)^2 - e^{2\mu_2} (dx^2)^2 - e^{2\mu_3} (dx^3)^2, \quad (2.1)$$

όπου  $\varphi$  είναι η άξισυμμετρική γωνία που μετρά στροφή γύρω από τον άξονα συμμετρίας,  $t$  είναι ο χρόνος και  $x^2=r$  και  $x^3=\theta$  είναι οι δύο άλλες χωρικές συντεταγμένες, άκτινική και γωνιακή αντίστοιχα.

Η υπόθεση ότι ο μετρικός τανυστής (2.1) είναι στατικός και άξισυμμετρικός σημαίνει ότι οι μεταβλητές  $\nu$ ,  $\psi$ ,  $\mu_2$  και  $\mu_3$  του προβλήματος είναι ανεξάρτητες του χρόνου  $t$  και της άξισυμμετρικής γωνίας  $\varphi$ . συνεπώς οι τέσσερις παραπάνω μεταβλητές εξαρτώνται μόνον από τις συντεταγμένες  $x^2$  και  $x^3$ . Επιπλέον, συστηματική μελέτη των εξισώσεων Einstein για τό μετρικό τανυστή (2.1) δείχνει ότι μπορούμε νά έπιβάλουμε μία συνθήκη βαθμίδας (gauge condition) μεταξύ των μεταβλητών  $\mu_2$  και  $\mu_3$ . Ας είναι

$$\beta = \psi + \nu. \quad (2.2)$$

Οι στατικές άξισυμμετρικές εξισώσεις Einstein ανάγονται στις τέσσερις εξισώσεις<sup>80</sup>

$$\left[ e^{\mu_3 - \mu_2} (e^\beta)_2 \right]_2 + \left[ e^{\mu_2 - \mu_3} (e^\beta)_3 \right]_3 = 0, \quad (2.3)$$

$$\left[ e^{\beta + \mu_3 - \mu_2} (\psi - \nu)_2 \right]_2 + \left[ e^{\beta + \mu_2 - \mu_3} (\psi - \nu)_3 \right]_3 = 0, \quad (2.4)$$

$$\beta_{23} - \beta_2 \mu_{2,3} - \beta_3 \mu_{3,2} + \psi_2 \psi_{3,2} + \nu_2 \nu_3 = 0, \quad (2.5)$$



και

$$2e^{\beta+\mu_3-\mu_2} (\beta_2\mu_3, 2+\psi_2\nu_2) - 2e^{\beta+\mu_2-\mu_3} (\beta_3\mu_2, 3+\psi_3\nu_3) =$$

$$= \left[ e^{\mu_3-\mu_2} (e^\beta)_2 \right]_2 - \left[ e^{\mu_2-\mu_3} (e^\beta)_3 \right]_3, \quad (2.6)$$

όπου η μερική παραγωγή υποδηλώνεται με κόμμα στους δείκτες τό-  
 οποίο (κόμμα) συνήθως παραλείπεται όταν δεν υπάρχει κίνδυνος συγ-  
 χυσης.

Ενδιαφερόμαστε για λύσεις των παραπάνω εξισώσεων που δέχονται  
 μία λεία, διδιάστατη, φωτοειδή επιφάνεια για όριζοντα. Άς είναι

$$N(x^2, x^3) = 0 \quad (2.7)$$

η εξίσωση του όριζοντα. Η συνθήκη ότι ο όριζοντας είναι φωτοειδής  
 επιφάνεια είναι η

$$g^{ij} N_i N_j = 0, \quad (2.8)$$

που για τον μετρικό τανυστή (2.1) γράφεται

$$e^{2(\mu_3-\mu_2)} N_r^2 + N_\theta^2 = 0. \quad (2.9)$$

Εκμεταλλευόμενοι την έλευθερία που έχουμε να επιβάλουμε μία συνθήκη  
 βαθμίδας μεταξύ των μεταβλητών της μετρικής (2.1) θέτουμε<sup>80</sup>

$$e^{2(\mu_3-\mu_2)} = \Delta(r). \quad (2.10)$$

Συνεπώς, οι ρίζες της εξίσωσης  $\Delta(r) = 0$  προσδιορίζουν τον όρι-  
 ζοντα γεγονότων. Τέλος, απαιτώντας ότι η επιφάνεια  $\Delta(r)=0$  συμ-  
 πύπτει με τον όριζοντα Killing (Killing horizon) των δύο διανυσματι-  
 κών πεδίων Killing  $(\partial/\partial t)$  και  $(\partial/\partial \varphi)$  του χωρόχρονου και θεωρώντας  
 απλές λύσεις της εξίσωσης (2.3) για τις όποιες οι μεταβλητές διαχω-  
 ρίζονται (separable variables) βρίσκουμε<sup>80</sup> ότι

$$e^{\mu_3 - \mu_2} = \sqrt{\Delta} \quad (2.11)$$

και

$$e^{\beta} = \sqrt{\Delta} \sin\theta, \quad (2.12)$$

όπου

$$\Delta = r^2 - 2mr \quad (2.13)$$

Πρός τό παρόν  $m$  είναι μία θετική παράμετρος, ή φυσική σημασία τής οποίας θά διαπιστωθεῖ ἀργότερα. Ὁ ὀρίζοντας τοῦ μετρικοῦ τανυστῆ (2.1) προσδιορίζεται ἀπό τή μεγαλύτερη ρίζα  $r = 2m$  τῆς συνάρτησης (2.13).

## 2.2. Στατικές και ἀξισυμμετρικές λύσεις.

Μέ τήν ἐπιβολή τῆς συνθήκης βαθμίδας (2.11) και τή λύση (2.12) και (2.13) τῆς ἐξίσωσης (2.3) οἱ στατικές και ἀξισυμμετρικές ἐξισώσεις Einstein (2.3)-(2.6) ἀπλοποιοῦνται σημαντικά. Ἦδη οἱ μόνοι ἀγνωστοί τοῦ προβλήματος εἶναι οἱ  $\psi$ -ν και  $\mu_2 + \mu_3$ .

Οἱ ἐξισώσεις ἀπλοποιοῦνται κι ἄλλο ἂν θεωρήσουμε τή συνάρτηση

$$K = \beta + \nu - \psi \quad (2.14)$$

σάν τό θεμελιώδη ἀγνωστο τοῦ προβλήματος και συγχρόνως ἀλλάξουμε<sup>33</sup> τίς ἀνεξάρτητες μεταβλητές (τίς συντεταγμένες)  $r$  και  $\theta$  στίς  $\eta$  και  $\mu$  πού ὀρίζονται ἀπό τίς

$$\eta = \frac{r-m}{m} \quad \text{και} \quad \mu = \cos\theta. \quad (2.15)$$

Μέ τήν ἀλλαγὴ (2.15) ὁ ὀρίζοντας παριστάνεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια

$$\eta = 1 \quad (2.16)$$

ἐνῶ, ὅπως θά διαπιστωθεῖ ἀμέσως, οἱ ὑπόλοιπες ἐξισώσεις γίνονται συμμετρικές ὡς πρὸς τίς συντεταγμένες  $\eta$  και  $\mu$ . Ἡ δεῦτερη ἀπό



τίς εξισώσεις Einstein, ή εξίσωση (2.4), ανάγεται στην άπλή μορφή

$$\left[ (\eta^2 - 1) K_\eta \right]_\eta + \left[ (1 - \mu^2) K_\mu \right]_\mu = 0 . \quad (2.17)$$

Μέ την αντικατάσταση (2.14) ή έρευνα για στατικές και άξισυμμετρικές λύσεις τών εξισώσεων Einstein έχει αναχθεί στη γραμμική εξίσωση (2.17) στην οποία μπορούμε νά εφαρμόσουμε την αρχή τής έπαλληλίας<sup>78</sup> (superposition principle). Τήν κατασκευή τών τοπικών μελανών όπών λοιπόν μπορούμε νά τήν πετύχουμε σέ δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα βρίσκουμε μιá άπλή λύση τής εξίσωσης (2.17) πού δέχεται έναν όρίζοντα για  $\eta=1$ . ή λύση αυτή θά αναφέρεται σάν ή βασική λύση τοπικής μελανής όπης (ή και ή βασική τοπική μελανή όπη) και θά συμβολίζεται μέ  $K_0$ . Στο δεύτερο βήμα βρίσκουμε τή γενικότερη λύση τής εξίσωσης (2.17) πού δέν καταστρέφει τήν ύπαρξη του όρίζοντα τής προηγούμενης λύσης. Το άθροισμα τών λύσεων πού προσδιορίζονται στά δύο παραπάνω βήματα άποτελεεί τή γενικότερη λύση τών στατικών και άξισυμμετρικών εξισώσεων Einstein πού περιγράφουν τοπικές μελανές όπές. Φυσικά για κάθε μιá από τίς λύσεις αυτές θά πρέπει νά προσδιορίσουμε και τήν ποσότητα  $\mu_2 + \mu_3$  από τίς εξισώσεις (2.5) και (2.6). Οι εξισώσεις αυτές δέν είναι γραμμικές και συνεπώς ή έπαλληλία δέν μπορεί νά εφαρμοστεί και για τόν προσδιορισμό τής μεταβλητής  $\mu_2 + \mu_3$ .

ή κατασκευή τών τοπικών μελανών όπών μέ σφαιρικό όρίζοντα είναι σχετικά άπλή γιατί ή βασική λύση  $K_0$  γι' αυτές είναι γνωστή: Είναι ή λύση Schwarzschild, πού αντιστοιχεεί στην έκλογή

$$K_0 = \log \left( \frac{\eta - 1}{\eta + 1} \right) . \quad (2.18)$$

Στό επόμενο κεφάλαιο θά διαπιστώσουμε ότι ο προσδιορισμός τής αντίστοιχης πρós τή λύση (2.18) βασικής λύσης τοπικής μελανής όπης μέ σαμπρελοειδή όρίζοντα άποτελεεί ένα αρκετά δύσκολο πρόβλημα.

ή εξίσωση (2.17) μπορεί εύκολα νά λυθεί μέ τή μέθοδο του δια-

χωρισμού των μεταβλητών<sup>33</sup>, θέτοντας

$$S(\eta, \mu) = R(\eta)T(\mu) \quad (2.19)$$

εύκολα βλέπουμε ότι οι  $R$  και  $T$  πρέπει και οι δύο να ικανοποιούν την εξίσωση Legendre. Η γενική λύση λοιπόν της εξίσωσης (2.17) είναι ή

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(\eta) P_k(\mu), \quad (2.20)$$

όπου  $P_k$  είναι τά πολυώνυμα Legendre τάξης  $k$  και  $R_k$  είναι γραμμικοί συνδυασμοί με σταθερούς συντελεστές των πολυώνυμων Legendre και των συναρτήσεων Legendre δεύτερου είδους και τάξης  $k$ . Στους δεύτερους παράγοντες των προσθετέων της εξίσωσης (2.20) συναρτήσεις Legendre δεύτερου είδους δέν έχουν περιληφθεί γιατί αυτές άπειρίζονται για  $\mu = \pm 1$ , δηλαδή στον άξονα συμμετρίας του χωρόχρονου. Θεωρούμε τη λύση

$$K = K_0 + S \quad (2.21)$$

της εξίσωσης (2.17).

Τό επόμενο βήμα για την κατασκευή των στατικών και άξισυμμετρικών τοπικών μελανών όπών με σφαιροειδή όρίζοντα είναι ο προσδιορισμός της μεταβλητής  $\mu_2 + \mu_3$  από τις εξισώσεις (2.5) και (2.6) με γνωστή τη λύση  $K$  της εξίσωσης (2.17) οι εξισώσεις (2.5) και 2.6 δίνουν τις παραγώγους του  $\mu_2 + \mu_3$  ως προς  $\eta$  και  $\mu$ , ενώ η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας (integrability condition) των εξισώσεων αυτών είναι ή εξίσωση (2.17). Αντί για τη μεταβλητή  $\mu_2 + \mu_3$  χρησιμοποιούμε<sup>33</sup>, ίσοδύναμα, τη μεταβλητή  $\sigma$  που δίνεται από τη σχέση

$$e^\sigma = \left[ \frac{(\eta-1)}{(\eta+1)} \right]^{1/2} \times e^{\mu_2 + \mu_3 + S}, \quad (2.22)$$

έπειδή αυτή άπλοποιεί πολύ τις αντίστοιχες εξισώσεις. Με τη βοήθεια των μεταβλητών  $\sigma$  και  $S$  ο μετρικός τανυστής (2.21) γράφεται

$$ds^2 = \frac{\eta-1}{\eta+1} e^S (dt)^2 - \frac{m^2(\eta+1)}{\eta-1} e^{\sigma-S} (d\eta)^2 - m^2(\eta+1)^2 e^{-S} \left[ (1-\mu^2) d\varphi^2 + \frac{e^\sigma}{1-\mu^2} d\mu^2 \right], \quad (2.23)$$

όπου η συνάρτηση  $\sigma$  προσδιορίζεται από τη συνάρτηση  $S$  από τις εξισώσεις

$$\frac{2(\eta^2-\mu^2)}{(\eta^2-1)(1-\mu^2)} \sigma_\eta = \frac{4\eta}{\eta^2-1} S_\eta - \frac{4\mu}{\eta^2-1} S_\mu - 2\mu S_\eta S_\mu + \frac{\eta}{\eta^2-1} \left[ (\eta^2-1) S_\eta^2 - (1-\mu^2) S_\mu^2 \right] \quad (2.24)$$

και

$$\frac{2(\eta^2-\mu^2)}{(\eta^2-1)(1-\mu^2)} \sigma_\mu = \frac{4\mu}{1-\mu^2} S_\eta + \frac{4\eta}{\eta^2-1} S_\mu + 2\eta S_\eta S_\mu + \frac{\mu}{1-\mu^2} \left[ (\eta^2-1) S_\eta^2 - (1-\mu^2) S_\mu^2 \right]. \quad (2.25)$$

### 2.3. Οι λύσεις που δέν καταστρέφουν τόν όρίζοντα.

Στήν ένότητα αυτή προσδιορίζουμε εκείνες από τις λύσεις (2.20) που περιγράφουν, με τη βοήθεια των εξισώσεων (2.23)-(2.25), στατικές και άξισυμμετρικές τοπικές μελανές όπές. Από τό σημείο αυτό και πέρα η μεθοδολογία μας είναι τελείως διαφορετική από τη μεθοδολογία που έκτίθεται στό βιβλίο του Chandrasekhar<sup>33</sup>.

Ενδιαφερόμαστε για τις λύσεις  $S$  για τις όποϊες :

- (i) ό όρίζοντας  $\eta=1$  είναι μία λεία έπιφάνεια.
- (ii) 'Ο τετραδιάστατος μετρικός τανυστής (2.23) είναι λείος και άντιστρεπτός στήν έπιφάνεια αυτή.

(iii) 'Ο έπαγόμενος από τόν (2.23) μετρικός τανυστής στον όρίζοντα (the induced metric on the horizon) είναι επίσης λείος και άντι-στρεπτός.

Οί συνθήκες αυτές έξασφαλίζονται μέ τίς συνθήκες:

(α) Τό όριο

$$G = -16m^6 \left[ \lim e^{2\sigma-2S} \right] \quad (2.26)$$

τής όρίζουσας του τετραδιάστατου μετρικού τανυστή (2.23) είναι πεπερασμένο και διάφορο του μηδενός στον όρίζοντα  $\eta=1$ .

(β) Τό όριο

$$g = 16m^4 \left[ \lim e^{\sigma-2S} \right] \quad (2.27)$$

τής όρίζουσας του διδιάστατου μετρικού τανυστή του όρίζοντα (δηλαδή του μετρικού τανυστή της δεύτερης σειράς της σχέσης (2.23) ) είναι πεπερασμένο και διάφορο του μηδενός. (Όλα τά όρια είναι για  $\eta \rightarrow 1$ .)

Οί συνθήκες (α) και (β) άπαιτούν μεταξύ άλλων ότι και τό όριο  $\lim e^S$  θά πρέπει νά είναι πεπερασμένο και διάφορο του μηδενός. Συνεπώς οί πρώτοι όροι τών προσθετέων του άθροίσματος (2.20) δέν πρέπει νά περιλαμβάνουν συναρτήσεις Legendre δεύτερου είδους. Καταλήγουμε λοιπόν στή τελική μορφή της συνάρτησης S:

$$S = S(\eta, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(\eta) P_k(\mu) , \quad (2.28)$$

όπου οί  $A_k$  είναι σταθερές και τά  $P_k$  είναι τά πολυώνυμα Legendre τάξης  $k$ .

Θεωρούμε κατόπιν τά όρια τών έξισώσεων (2.24) και (2.25) για  $\eta \rightarrow 1$ , δηλαδή στον όρίζοντα. 'Η έξίσωση (2.24) δίνει μία πολύπλοκη σχέση πού περιλαμβάνει και τά όρια τών παραγώγων τών  $\sigma$  και  $S$



Έξω από τόν όρίζοντα ενώ ή έξίσωση (2.25) δίνει τήν πολύ άπλή έξίσωση

$$(\sigma-2S)_\mu = 0 . \quad (2.29)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στόν όρίζοντα

$$\sigma-2S = 2\alpha , \quad (2.30)$$

όπου  $\alpha$  είναι μιá αύθαίρετη σταθερή.

Στό επόμενο βήμα θεωρούμε τά όρια τών έξισώσεων (2.24) και (2.25) για  $\mu^2 \rightarrow 1$ , δηλαδή πάνω στόν άξονα συμμετρίας του χωρόχρο-νου. Η έξίσωση (2.24) δίνει

$$\sigma_\eta = 0 . \quad (2.31)$$

Συνεπώς ή συνάρτηση  $\sigma$  είναι σταθερή σε κάθε συνεκτικό τμήμα του άζιμουθιακού άξονα. Η σταθερή τιμή του  $\sigma$  πάνω στόν άξονα θα μπορούσε νά έκλεγεί αύθαίρετα. Επιπλέον όμως άπαιτούμε ότι ό λόγος τής περιφέρειας κάθε κύκλου, πού τό επίπεδό του είναι κάθετο στόν άξονα άζιμουθιακής συμμετρίας, προς τήν άκτίνα του κύκλου αυτού τείνει προς  $2\pi$  όταν ή άκτίνα του κύκλου τείνει προς τό μη-δέν. Η άπαίτηση αύτή είναι ισοδύναμη μέ τή συνθήκη ότι  $\sigma=0$  σε όλα τά σημεία του άξονα. Συνεπώς θέτουμε

$$\sigma(\mu=1) = \sigma(\mu=-1) = 0 . \quad (2.32)$$

Έφ'όσον ό άζιμουθιακός άξονας και ό όρίζοντας τέμνονται, στά σημεία τομής ισχύουν συγχρόνως οι έξισώσεις (2.30) και (2.32). Συ-νεπώς έχουμε

$$\sigma(1)+2S(1,1) = \sigma(-1)+2S(1,-1), \quad (2.33)$$

δηλαδή ότι

$$S(1,1) = S(1,-1). \quad (2.34)$$

Ο συνδυασμός των σχέσεων (2.28) και (2.34) δίνει ότι οι συντελεστές της σειράς (2.28) ικανοποιούν την

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{2k+1} = 0, \quad (2.35)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και την καθιερωμένη κανονικοποίηση

$$P_k(1) = 1 \quad \text{και} \quad P_k(-1) = (-1)^k \quad (2.36)$$

των πολυώνυμων Legendre.

Συνοψίζουμε: Η γενικότερη στατική και άξισυμμετρική τοπική μελανή όπη με σφαιροειδή όριζοντα περιγράφεται από τον μετρικό τανυστή (2.23). Η συνάρτηση  $S$  δίνεται από τη σχέση (2.28) όπου τα  $P_k$  είναι πολυώνυμα Legendre και οι σταθερές  $A_k$  ικανοποιούν τη σχέση (2.35). Η συνάρτηση  $\sigma$  προσδιορίζεται από τις εξισώσεις (2.24) και (2.25) των οποίων η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας ικανοποιείται αυτόματα. Ο όριζοντας της μελανής όπης είναι η επιφάνεια  $\eta=1$ . Η σταθερή  $m$  που εμφανίζεται στο μετρικό τανυστή (2.23) είναι η ολική μάζα της μελανής όπης. Το συμπέρασμα αυτό θα αποδειχθεί στο τέταρτο κεφάλαιο.



2.4. Ἡ σφαιρικότητα τοῦ ὀρίζοντα.

Στὴν ἐνότητα αὐτὴ ὑπολογίζουμε τὸν ἀριθμὸ Euler<sup>81</sup> τοῦ ὀρίζοντα μέ τὴ βοήθεια τοῦ θεωρήματος τῶν Gauss καὶ Bonnet.<sup>81</sup> Ὁ ἀριθμὸς τοῦ Euler εἶναι μιὰ τοπολογικὴ σταθερὴ (topological invariant) τοῦ ὀρίζοντα. Συνεπῶς, ὅλοι οἱ διάφοροι μετρικοὶ τανυστές (2.23) θὰ πρέπει νὰ δίνουν τὴν ἴδια τιμὴ  $\chi=2$  γιὰ τὸν ἀριθμὸ Euler τοῦ ὀρίζοντα, τὸν ἀριθμὸ Euler τῆς τοπολογικῆς σφαίρας  $S^2$ . Τὸ θεώρημα τῶν Gauss-Bonnet λέει ὅτι σὲ κάθε συμπαγῆ πολλαπλότητα μέ μετρικὸ τανυστή, τὸ ὁλοκλήρωμα ὄγκου τῆς βαθμωτῆς καμπυλότητας σ' ὅλη τὴ πολλαπλότητα ἰσοῦται μέ τέσσερις φορές  $\pi$  ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ Euler τῆς πολλαπλότητας:

$$4\pi\chi = \int R dV, \quad (2.37)$$

ὅπου  $R$  εἶναι ἡ βαθμωτὴ καμπυλότητα τῆς πολλαπλότητας. Στὶς διδιάστατες πολλαπλότητες, γιὰ τίς ὁποῖες μόνον ἐνδιαφερόμαστε στὴν πραγματεία αὐτὴ, ἡ βαθμωτὴ καμπυλότητα ἰσοῦται μέ τὸ διπλάσιο τῆς καμπυλότητας τοῦ Gauss (Gaussian curvature) τῆς πολλαπλότητας.

Στὶς σφαιρικὲς τοπικὲς μελανὲς ὀπές ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ Euler ἀπὸ τὸ θεώρημα τῶν Gauss-Bonnet ἀποτελεῖ ἀπλῶς ἓνα ξεχωριστό ἐλεγχὸ τῆς σφαιρικότητας τοῦ ὀρίζοντα. Ἡ κατάσταση εἶναι διαφορετικὴ στὶς σαμπρελοειδεῖς μελανὲς ὀπές: Σ' αὐτὲς ὁ ἄξονας ἀξιομυθιακῆς συμμετρίας εἶναι συνεκτικὸς (connected) καὶ γι' αὐτὸ δὲν μπορούμε εὐκόλα νὰ βροῦμε μιὰ σχέση μεταξὺ τῶν συντελεστῶν  $B_k$  σάν τὴ σχέση (2.35). Ὁ βασικὸς λόγος λοιπὸν γιὰ τὸν ὁποῖο ὑπολογίζουμε τὸν ἀριθμὸ Euler στὴν ἐνότητα αὐτὴ εἶναι γιὰ νὰ ἐλέγξουμε τὴν ἰδέα (καὶ νὰ πειστοῦμε γιὰ τὴν ὀρθότητά της) ὅτι ἡ

άπαιτούμενη σχέση μεταξύ τών συντελεστών τών άγνώστων θά μπορούσε νά βρεθεί καί μέ τήν εφαρμογή του θεωρήματος τών Gauss-Bonnet.

Κάθε διδιάστατη πολλαπλότητα μέ μετρικό τανυστή είναι σύμμορφα επίπεδη (conformally flat), πού σημαίνει ότι ο μετρικός τανυστής της μπορεί νά γραφεί, σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, στη μορφή

$$d\tau^2 = \Omega^2(dy^2+dz^2), \quad (2.38)$$

όπου  $y$  καί  $z$  είναι οι συντεταγμένες της πολλαπλότητας. Εύκολα τότε αποδεικνύεται ότι η βαθμωτή καμπυλότητα δίνεται από τή σχέση

$$R = -2\Omega^{-2} \left[ (\log\Omega)_{yy} + (\log\Omega)_{zz} \right]. \quad (2.39)$$

Ο μετρικός τανυστής του ορίζοντα τών τοπικών μελανών όπων πού κατασκευάσαμε στην ένότητα 2.3 δίνεται από τή σχέση

$$d\tau^2 = 4\pi^2 e^{-S} \left[ (1-\mu^2) (d\varphi)^2 + \frac{e^\sigma}{1-\mu^2} (d\mu)^2 \right], \quad (2.40)$$

όπου τώρα  $S$  καί  $\sigma$  είναι οι όριακές τιμές τών συναρτήσεων της προηγούμενης ένότητας για  $\eta=1$ . Γράφοντας τό μετρικό τανυστή (2.40) στη μορφή (2.38), έκτελώντας μερικές πολύπλοκες πράξεις για τόν ύπολογισμό της βαθμωτής καμπυλότητας καί αντικαθιστώντας στον τύπο (2.37) βρίσκουμε τή σχέση

$$2x = e^{-\alpha} \int_{-1}^{+1} e^{-S} \left[ (1-\mu^2) S_{\mu\mu} - 4\mu S_\mu + (\mu^2-1) S_\mu^2 + 2 \right] d\mu, \quad (2.41)$$

όπου  $a$  είναι η σταθερή της σχέσης (2.30). Έφ'όσον  $\sigma=0$  στον άξονα,  $-a=S(1)$ . Το ολοκλήρωμα (2.41) μπορεί εύκολα να υπολογιστεί. Δίνει

$$x = 1 + e^{S(1)-S(-1)} \quad (2.42)$$

Συνεπώς η απαίτηση ότι ο αριθμός του Euler του ορίζοντα ίσοῦται με 2 είναι ισοδύναμη με τή σχέση (2.34), δηλαδή ισοδύναμη καί με τή συνθήκη (2.35) μεταξύ τῶν σταθερῶν συντελεστῶν τῆς συνάρτησης  $S$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

### ΤΟΠΙΚΕΣ ΜΕΛΑΝΕΣ ΟΠΕΣ ΜΕ ΣΑΜΠΡΕΛΟΕΙΔΗ ΟΡΙΖΟΝΤΑ

#### 3.1. Συνθήκη βαθμίδας για σαμπρελοειδεῖς συντεταγμένες.

Γιὰ νά γράψουμε τίς στατικές καί ἀξισυμμετρικές ἐξισώσεις Einstein σέ σαμπρελοειδεῖς (toroidal) συντεταγμένες ἀρχίζουμε πάλι ἀπό τή μορφή (2.1) τοῦ μετρικοῦ τανυστῆ τοῦ χωρόχρονου. Ἡ βασική διαφορά μέ τή θεωρία τοῦ προηγούμενου κεφάλαιου εἶναι πώς τώρα θά πρέπει νά θεωρήσουμε τίς συντεταγμένες  $x^2=\lambda$  καί  $x^3=\vartheta$  σάν σαμπρελοειδεῖς συντεταγμένες.<sup>82</sup> Τά πεδία ὀρισμοῦ τῶν συντεταγμένων αὐτῶν εἶναι  $0<\lambda<\infty$  καί  $-\pi<\vartheta<\pi$ .

Οἱ ἐξισώσεις Einstein εἶναι οἱ ἐξισώσεις (2.3)-(2.6), ἐφ' ὅσον στήν ἐνότητα (2.1) εἶχαν γραφεῖ στό τυχαῖο σύστημα συντεταγμένων  $x^2, x^3$ . Ὅπως καί στό προηγούμενο κεφάλαιο θέτουμε

$$e^{2(\mu_3-\mu_2)} = \Delta(\lambda) \quad , \quad (3.1)$$

ἔτσι ὥστε οἱ ρίζες τῆς ἐξίσωσης  $\Delta(\lambda)=0$  νά προσδιορίζουν τόν ὀρίζοντα. Ἀπαιτώντας, ὅπως καί στήν ἐνότητα (2.1), ὅτι ὁ ὀρίζοντας συμπίπτει μέ τόν ὀρίζοντα Killing τῶν διανυσματικῶν πεδίων  $\partial/\partial t$  καί  $\partial/\partial \varphi$  θέτουμε

$$e^\beta = \sqrt{\Delta} \operatorname{ch} \lambda f(\vartheta) \quad , \quad (3.2)$$

ὅπου οἱ συναρτήσεις  $\Delta$  καί  $f$  πρέπει νά προσδιοριστοῦν ἀπό τήν ἐξίσωση (2.3). (Ἐφ' ὅσον ἡ ἐξίσωση  $\operatorname{ch} \lambda=0$  δέν ἔχει καμμιά πραγματική ρίζα, ὁ ὀρίζοντας γεγονότων  $\Delta=0$  καί ὁ ὀρίζοντας Killing συμπίπτουν). Ἀντικατάσταση τῆς (3.2) στήν ἐξίσωση (2.3) δίνει εὐκόλα τή λύση



$$f(\vartheta) = \cos^{\vartheta}/2 \quad (3.3)$$

και

$$\Delta = \frac{s(s-4m)}{4ch^2\lambda} \quad (3.4)$$

Στή σχέση (3.4) και στο υπόλοιπο μέρος της πραγματείας χρησιμοποιούμε για συντομία το συμβολισμό

$$s = sh \lambda \quad (3.5)$$

Η έκλογή της τριγωνομετρικής λύσης (3.3) έγινε έτσι ώστε ο μετρικός τανυστής να είναι αντιστρεπτός σ'όλο το διάστημα ορισμού της συντεταγμένης  $\vartheta$ . Επιπλέον, η σταθερή της ολοκλήρωσης συμβολίστηκε με  $4m$  ώστε η ολική μάζα της μελανής όπης να ισούται με  $m$ . Ο υπολογισμός της μάζας της μελανής όπης θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο. Οι σχέσεις (3.1)-(3.5) συνεπάγονται ότι

$$e^{\mu_3 - \mu_2} = \frac{\sqrt{s(s-4m)}}{2ch\lambda} \quad (3.6)$$

και

$$e^{\beta} = \frac{1}{2} \sqrt{s(s-4m)} \cos^{\vartheta}/2 \quad (3.7)$$

Ο ορίζοντας της μελανής όπης που προσπαθούμε να κατασκευάσουμε θα είναι η επιφάνεια

$$s = 4m \quad (3.8)$$

3.2. Οι εξισώσεις Einstein σε συμπελοειδείς συντεταγμένες.

Οι θεωρήσεις τής προηγούμενης ένότητας έχουν προσδιορίσει μονοσήμαντα τό σύστημα τών συμπελοειδών συντεταγμένων στό όποιο θά δουλέψουμε. Τό επόμενό μας πρόβλημα είναι νά μελετήσουμε τίς υπόλοιπες εξισώσεις Einstein (2.4)-(2.6) στό σύστημα αυτό.

Θέτουμε

$$\mu = \sin^{\vartheta}/2 . \quad (3.9)$$

Ή εξίσωση (2.4) ανάγεται στην πολύ απλή μορφή

$$\left[ s(s-4m) (\psi-\nu) \right]_s + \left[ (1-\mu^2) (\psi-\nu) \right]_{\mu} = 0 . \quad (3.10)$$

Οι εξισώσεις (2.5) καί (2.6) πού προσδιορίζουν τή συνάρτηση  $\mu_2+\mu_3$  είναι πολύ πιο πολύπλοκες. Οι σχέσεις απλουστεύουν λίγο αν αντί για τή συνάρτηση  $\mu_2+\mu_3$  χρησιμοποιήσουμε, ισοδύναμα, τή συνάρτηση  $K$  πού δίνεται από τή σχέση

$$\mu_2+\mu_3 = \frac{1}{4} \log \left\{ \frac{(1+s^2)^2 [(s-2m)^2 - 4m^2\mu^2]^4}{s^3 (s-4m)^3 (1-\mu^2)} \right\} + K . \quad (3.11)$$

Ό μετρικός τανυστής (2.1) τότε γράφεται

$$ds^2 = e^{2\nu} (dt)^2 - e^{2\psi} (d\varphi)^2 -$$

$$- \frac{2 [(s-2m)^2 - 4m^2\mu^2] e^K}{[s(s-4m)(1-\mu^2)]^{1/4}} \left[ \frac{(ds)^2}{s(s-4m)} + \frac{(d\mu)^2}{1-\mu^2} \right] . \quad (3.12)$$

Ἡ μεταβλητὴ  $K$  προσδιορίζεται ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις (συνέπεια τῶν ἐξισώσεων (2.5) καὶ (2.6) )

$$K_S = \frac{1-\mu^2}{(s-2m)^2 - 4m^2\mu^2} \left[ \frac{1}{2}(s-2m)A - s\mu(s-4m)B \right], \quad (3.13)$$

καὶ

$$K_\mu = \frac{s(s-4m)(1-\mu^2)}{(s-2m)^2 - 4m^2\mu^2} \left[ (s-2m)B + \frac{\mu}{2(1-\mu^2)} A \right], \quad (3.14)$$

ὅπου

$$A = s(s-4m)(\psi-\nu)_S^2 - (1-\mu^2)(\psi-\nu)_\mu^2 \quad (3.15)$$

καὶ

$$B = (\psi-\nu)_S(\psi-\nu)_\mu \quad (3.16)$$

Συνεπῶς, γιὰ νὰ προσδιορίσουμε τὶς στατικές καὶ ἀξισυμμετρικές λύσεις τῶν ἐξισώσεων Einstein σέ συμπελοειδεῖς συντεταγμένες, γιὰ τὶς ὁποῖες ὁ μετρικὸς ταυνοστής εἶναι ὁ (3.12), θὰ πρέπει πρῶτα νὰ προσδιορίσουμε τὶς λύσεις  $\psi-\nu$  τῆς ἐξίσωσης (3.10), κατόπιν νὰ ὑπολογίσουμε τὰ  $A$  καὶ  $B$  τῶν ἐξισώσεων (3.15) καὶ (3.16) καὶ τέλος νὰ ὑπολογίσουμε τὴ μεταβλητὴ  $K$  ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις (3.13) καὶ (3.14). Ὁ προσδιορισμὸς τῶν λύσεων τῆς (3.10) δέν εἶναι δύσκολος· τὸ δύσκολο εἶναι νὰ προσδιορίσουμε ποιές ἀπὸ τὶς λύσεις αὐτές παριστάνουν τοπικὲς μελανὲς ὀπές μὲ συμπελοειδῆ ὀρίζοντα.

### 3.3. Κατασκευή της βασικής συμπελοειδοϋς μελανής όπης

Όπως και στην περίπτωση των σφαιρικών έτσι και για την κατασκευή των συμπελοειδών τοπικών μελανών όπών θα χρησιμοποιήσουμε την άρχή της έπαλληλίας. Ο πρώτος στόχος λοιπόν είναι ή κατασκευή μιās, της βασικής, στατικής και άξιςυμμετρικής τοπικής μελανής όπης μέ συμπελοειδή όρίζοντα. Κατόπιν, στή λύση αυτή θα προσθέσουμε τή γενικότερη λύση της έξίσωσης (3.10) πού δέν καταστρέφει τόν όρίζοντα.

Υπολογίζουμε τά όρια στόν όρίζοντα των όριζουσών του τετραδιάστατου μετρικού τανυστή (3.12) και του διδιάστατου μετρικού τανυστή του όρίζοντα πού επάγεται από τόν τανυστή (3.12). Βρίσκουμε, αντίστοιχα,

$$G = -8m^3(1-\mu^2) \left[ m(1-\mu^2) \right]^{1/2} \lim_{s \rightarrow 4m} \frac{e^{2K}}{(s-4m)^{1/2}} \quad (3.17)$$

και

$$g = 4m^2 \left[ 4m(1-\mu^2) \right]^{1/4} \lim_{s \rightarrow 4m} \left[ (s-4m)^{1/4} e^{K+\psi-\nu} \right], \quad (3.18)$$

όπου όλα τά όρια είναι στόν όρίζοντα, δηλαδή για  $s \rightarrow 4m$ . Απαιτούμε και οι δύο, ο τετραδιάστατος μετρικός τανυστής του χωρόχρονου και ο διδιάστατος μετρικός τανυστής του όρίζοντα, να είναι λείτοι και αντιστρεπτοί στόν όρίζοντα  $s=4m$ . Οι συνθήκες αυτές είναι ισοδύναμες μέ τις συνθήκες ότι τά όρια (3.17) και (3.18) είναι πεπερασμένα και διάφορα του μηδενός. Σύγκριση των σχέσεων (3.17) και (3.18) δίνει ότι και τό όριο



$$\lim \left[ (s-4m)^{1/2} e^{\psi-v} \right] \quad (3.19)$$

θά πρέπει νά είναι πεπερασμένο καί διάφορο τοῦ μηδενός. Συνεπῶς, γιά τήν κατασκευή τῆς βασικῆς τοπικῆς μελανῆς ὁπῆς μέ σαμπρελοειδῆ ὀρίζοντα πρέπει νά προσδιορίσουμε μία λύση τῆς ἐξίσωσης (3.10) πού νά ἔχει κοντά στόν ὀρίζοντα τήν ἀσυμπτωτική συμπεριφορά

$$\psi-v \sim -\frac{1}{2} \log(s-4m) \quad (3.20)$$

Παίρνοντας ὑπόψη καί τή μορφή τῆς ἐξίσωσης (3.10) ψάχνουμε νά βροῦμε λύσεις τῆς τῆς μορφῆς

$$\psi-v = \log b - \frac{1}{2} \log [s(s-4m)] + f(\mu) \quad (3.21)$$

ὅπου  $b$  εἶναι μιά σταθερή καί  $f$  μιά συνάρτηση μιᾶς μεταβλητῆς, ἄγνωστη πρός τό παρόν, πού θά προσδιοριστεῖ ἀπό τήν ἐξίσωση (3.10).

Ἀντικατάσταση τῆς σχέσης (3.21) στήν ἐξίσωση (3.10) δίνει ὅτι ἡ συνάρτηση  $f$  πρέπει νά ικανοποιεῖ τήν ἐξίσωση

$$\left[ (1-\mu^2) \dot{f} \right]' = 1 \quad (3.22)$$

ὅπου ἡ τελεία ὑποδηλώνει παραγώγιση ὡς πρός  $\mu$ . Ἡ ἐξίσωση (3.22) δέχεται τό ὀλοκλήρωμα

$$\dot{f} = \frac{\mu+2\beta}{1-\mu^2} \quad (3.23)$$

ὅπου  $\beta$  εἶναι μιά σταθερή. Τή σταθερή  $\beta$  πρέπει νά τήν προσδιο-

ρίσουμε κατάλληλα έτσι ώστε ο ορίζοντας της μελανής όπης (3.21) να είναι σαμπρελοειδής.

Παρατηρούμε ότι με τη βοήθεια των σχέσεων (3.21) και (3.23) μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά το μετρικό τανυστή (3.12). Ο υπολογισμός επιτυγχάνεται με τα παρακάτω βήματα:

(i) Η ολοκλήρωση της (3.23) δίνει

$$f = \log \frac{(1+\mu)^{\frac{2\beta-1}{2}}}{(1-\mu)^{\frac{2\beta+1}{2}}} \quad (3.24)$$

(Η σταθερή της ολοκλήρωσης παραλείπεται γιατί εύκολα απορροφάται σε μία γραμμική αλλαγή των συντεταγμένων).

(ii) Ξέροντας το  $\psi$ -ν υπολογίζουμε τα A και B από τις σχέσεις (3.15) και (3.16). Βρίσκουμε:

$$A = \frac{(s-2m)^2}{s(s-4m)} - \frac{(\mu+2\beta)^2}{1-\mu^2} \quad (3.25)$$

και

$$B = - \frac{(s-2m)(\mu+2\beta)}{s(s-4m)(1-\mu^2)} \quad (3.26)$$

(iii) Από τα A και B υπολογίζουμε τα δεξιά μέλη των εξισώσεων (3.13) και (3.14). Η ολοκλήρωση των εξισώσεων αυτών δίνει

$$K = \frac{1}{4} \log [s(s-4m)] + \frac{1}{4} \log \left[ (1-\mu)^{(2\beta+1)^2} (1+\mu)^{(2\beta-1)^2} \right] - \beta^2 \log [(s-2m)^2 - 4m^2\mu^2] + \log 2c, \quad (3.27)$$

όπου  $c$  είναι η σταθερή της ολοκλήρωσης.

(iv) Η σχέση (3.7) προσδιορίζει το  $\beta = \psi + v$  ενώ η σχέση (3.21) προσδιορίζει το  $\psi - v$ . Συνεπώς, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τὰ  $\psi$  και  $v$ .

Αντικατάσταση στο μετρικό τανυστή (3.12) δίνει τη λύση τών εξισώσεων Einstein

$$ds^2 = \frac{s(s-4m)(1-\mu)^{\beta+1}}{2b(1+\mu)^{\beta-1}} (dt)^2 - \frac{b}{2} \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\beta} (d\varphi)^2 - 4c \left[ (s-2m)^2 - 4m^2\mu^2 \right]^{1-\beta^2} (1-\mu)^{\beta^2+\beta} (1+\mu)^{\beta^2-\beta} \left[ \frac{(ds)^2}{s(s-4m)} + \frac{(d\mu)^2}{1-\mu^2} \right] \quad (3.28)$$

θέτοντας  $t = \text{σταθ.}$  και  $s = 4m$  στο μετρικό τανυστή (3.28) βρίσκουμε τόν διδιάστατο μετρικό τανυστή του ορίζοντα

$$d\tau^2 = \frac{b}{2} \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\beta} (d\varphi)^2 + 4c(4m^2)^{1-\beta^2} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\beta} (d\mu)^2 \quad (3.29)$$

Προφανώς για  $\beta = 0$  ο μετρικός τανυστής (3.29) είναι επίπεδος και συνεπώς ο ορίζοντας της μελανής όπης (3.28) γίνεται τοπολογική σαμπρέλα με τη ταυτοποίηση τών γραμμών  $\varphi = 0$  και  $\varphi = 2\pi$  και  $\mu = -1$  και  $\mu = +1$ .

Θά τελειώσουμε την ένότητα με την απόδειξη του συμπεράσματος ότι η μόνη έκλογή της σταθερής  $\beta$  που μπορεί να κάνει τη διδιάστατη πολλαπλότητα με μετρικό τανυστή (3.29) μιὰ τοπολογική σαμπρέλα

είναι η έκλογή  $\beta=0$ . Για την απόδειξη υπολογίζουμε τη βαθμωτή καμπυλότητα του μετρικού τανυστή (3.29).

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που εκτέθηκε στην ενότητα (2.4) βρίσκουμε, μετά από έναν αρκετά πολύπλοκο υπολογισμό, ότι η βαθμωτή πολλαπλότητα του (3.29) ισοϋται με

$$R = - \frac{\beta(\beta+\mu)}{c} (4m^2)^{\beta-1} \frac{(1+\mu)^{\beta-2}}{(1-\mu)^{\beta+2}} . \quad (3.30)$$

Για να μπορούν να ταυτοποιηθούν οι γραμμές  $\mu=-1$  και  $\mu=+1$  του ορίζοντα θα πρέπει η βαθμωτή καμπυλότητα (3.30) να έχει πεπερασμένο, και τό ίδιο, όριο για  $\mu \rightarrow \pm 1$ . Από τη σχέση (3.30) εύκολα βλέπουμε ότι αυτό μπορεί να συμβεί μόνον για  $\beta=0$ . Έφ'όσον  $\beta=0$  δίνει  $R=0$ , για την τιμή αυτή ο μετρικός τανυστής (3.29) παριστάνει μια επίπεδη (μετρική) σαμπρέλα.

#### 3.4. Προσδιορισμός των παραμέτρων.

Στην ενότητα 3.3 προσδιορίσαμε τη βασική στατική, άξισυμμετρική, τοπική μελανή όπη με σαμπρελοειδή ορίζοντα από την οποία θα κατασκευαστεί, με βάση την αρχή της έπαλληλίας, η γενικότερη τοπική μελανή όπη με σαμπρελοειδή ορίζοντα. Ο μετρικός τανυστής της μελανής όπης δίνεται από τη σχέση (3.28) με  $\beta=0$ . Στην ενότητα αυτή θα διαλέξουμε κατάλληλα τις σταθερές  $b$  και  $c$  του (3.28), που προέκυψαν σαν σταθερές ολοκλήρωσης, έτσι ώστε ορισμένα έξωτερικά φυσικά χαρακτηριστικά της μελανής όπης να έχουν τις ίδιες τιμές που έχουν και στις σφαιρικές μελανές όπες. Για τό σκοπό αυτό υπολογίζουμε την όλική μάζα, την επιφάνεια του ορίζοντα και την επιφανειακή ένταση βαρύτητας<sup>83</sup> (surface gravity) της μελανής όπης (3.28) με  $\beta=0$ .



Ἡ μέθοδος ὑπολογισμοῦ τῶν ποσοτήτων αὐτῶν γιά τίς γενικό-  
τερες τοπικές σφαιρικές καί σαμπρελοειδεῖς μελανές όπές ἐκτίθε-  
ται στό τέταρτο κεφάλαιο. Στήν ἐνότητα αὐτή δίνουμε μόνο τά ἀπο-  
τελέσματά τους γιά τήν εἰδική περίπτωση τῆς μελανῆς όπῆς μέ μετρι-  
κό τανυστή (3.28) μέ  $\beta=0$ .

(i) Τό ὁλοκλήρωμα Komar<sup>84</sup> (Komar integral) τοῦ διανυσματικοῦ πε-  
δίου Killing  $(\partial/\partial t)$  δίνει

$$M = \frac{1}{16\pi} \iint \epsilon_{abmn} (\nabla^a \xi^b) dA^{mn} = m \quad (3.31)$$

Συνεπῶς ἡ μάζα τῆς βασικῆς μελανῆς όπῆς εἶναι  $m$ .

(ii) Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁρίζοντα εἶναι

$$A = 8\pi m \sqrt{2bc} \quad (3.32)$$

(iii) Ἡ ἐπιφανειακή ἔνταση τῆς βαρύτητας εἶναι

$$k = \lim \left\{ \frac{1}{2} (\nabla_m \xi_n) (\nabla^m \xi^n) \right\}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{8bc}} \quad (3.33)$$

Θά ἀπαιτήσουμε τίς σχέσεις

$$\frac{kA}{4\pi} = m \quad (3.34)$$

καί

$$A = 16\pi m^2 \quad (3.35)$$

πού ἰσχύουν γιά τή μελανή όπή Schwarzschild. Οἱ σχέσεις αὐτές  
προσδιορίζουν μόνον τό γινόμενο  $bc$ . Δίνουν

$$bc = 2m^2 \quad (3.36)$$

Γιά εύκολία, και χωρίς να χάνουμε τη γενικότητα της λύσης, διαλέγουμε

$$b = 8m^2 \quad \text{και} \quad c = 1/4 \quad (3.37)$$

Συνεπώς ο μετρικός τανυστής της βασικής στατικής και άξισυμμετρικής τοπικής μελανής όπης με σαμπρελοειδή ορίζοντα είναι

$$ds^2 = \frac{s(s-4m)(1-\mu^2)}{16m^2} (dt)^2 - 4m^2 (d\varphi)^2 - \left[ (s-2m)^2 - 4m^2 \mu^2 \right] \left[ \frac{(ds)^2}{s(s-4m)} + \frac{(d\mu)^2}{1-\mu^2} \right] \quad (3.38)$$

Ο ορίζοντας της μελανής όπης είναι η επιφάνεια  $s = 4m$ . Ο μετρικός τανυστής (3.38) αντιστοιχεί στη λύση

$$(\psi-v)_0 = \log \frac{8m^2}{[s(s-4m)(1-\mu^2)]^{1/2}} \quad (3.39)$$

της εξίσωσης (3.10).

3.5. Ἡ γενικότερη λύση τῶν ἐξισώσεων Einstein.

Ἐνδιαφερόμαστε τώρα νά κατασκευάσουμε τή γενικότερη στατική, ἀξισυμμετρική, τοπική μελανή ὀπή μέ σαμπρελοειδῆ ὀρίζοντα. Ἡ βασική ἰδέα εἶναι νά προσθέσουμε στή λύση (3.39) τή γενικότερη λύση τῆς ἐξίσωσης (3.10), ἡ ὁποία δέν καταστρέφει τήν ὕπαρξη τοῦ ὀρίζοντα.

Πρῶτα κάνουμε μιὰ ἀλλαγὴ τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς  $s$ . Στίς καινούργιες μεταβλητές ἡ ἐξίσωση (3.10) θά εἶναι συμμετρική ὡς πρὸς  $\eta$  καί  $\mu$  ἐνῶ συγχρόνως οἱ λύσεις της θά μποροῦν εὐκόλα νά ἐκφραστοῦν μέ τή βοήθεια γνωστῶν εἰδικῶν συναρτήσεων.

Θέτουμε

$$s = 2m(\eta+1) . \tag{3.40}$$

Ἡ ἐξίσωση (3.10) γράφεται

$$\left[ (\eta^2-1) (\psi-\nu)_{\eta} \right]_{\eta} + \left[ (1-\mu^2) (\psi-\nu)_{\mu} \right]_{\mu} = 0 , \tag{3.41}$$

ἐνῶ στίς καινούργιες μεταβλητές ὁ ὀρίζοντας εἶναι ἡ ἐπιφάνεια

$$\eta = 1 . \tag{3.42}$$

Προφανῶς, ὅπως εἶδαμε καί στήν ἐνότητα (2.2), ἡ ἐξίσωση (3.41) δέχεται λύσεις μέ διαχωριζόμενες μεταβλητές καί ὄρους συναρτήσεις Legendre. Γράφουμε λοιπόν τή γενική λύση τῆς (3.41) στή μορφή

$$\psi-\nu = (\psi-\nu)_0 + S(\eta, \mu) , \tag{3.43}$$

ὅπου

$$s(\eta, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} [B_k P_k(\eta) + \Gamma_k Q_k(\eta)] P_k(\mu) . \quad (3.44)$$

Τά  $P_k$  είναι τά πολυώνυμα Legendre καί οί  $Q_k$  οί συναρτήσεις Legendre δεύτερου είδους καί τάξης  $k$ , ένώ οί  $B_k$  καί  $\Gamma_k$  είναι αύθαίρετες σταθερές. Όπως καί στήν ένότητα (2.2), παραλείπουμε τίς συναρτήσεις Legendre ώς πρός τή μεταβλητή  $\mu$  γιατί άπειρίζονται γιά  $\mu \pm 1$ .

Άπό τίς σχέσεις (3.7) καί (3.43) εύκολα ύπολογίζονται τά  $\psi$  καί  $\nu$ . Τό πιό πολύπλοκο βήμα είναι ό ύπολογισμός τής συνάρτησης  $K$  τών έκφράσεων (3.11) καί (3.12). Ίσοδύναμα, αντί γιά τή συνάρτηση  $K$ , μπορούμε νά ύπολογίσουμε τή συνάρτηση  $\sigma = \sigma(\eta, \mu)$  πού συνδέεται μέ τήν  $K$  μέ τή σχέση

$$K = \frac{1}{4} \log [(\eta^2 - 1)(1 - \mu^2)] + \sigma - S . \quad (3.45)$$

Έπιπλέον βρίσκουμε ότι οί ποσότητες  $A$  καί  $B$  τών σχέσεων (3.15) καί (3.16) παίρνουν γιά τή λύση (3.43) τίς τιμές

$$A = \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} - \frac{\mu^2}{1 - \mu^2} + (\eta^2 - 1)S_\eta^2 - 2\eta S_\eta - (1 - \mu^2)S_\mu^2 - 2\mu S_\mu \quad (3.46)$$

καί

$$B = \frac{1}{2m} \left[ \frac{\mu}{1 - \mu^2} S_\eta - \frac{\eta}{\eta^2 - 1} S_\mu + S_\eta S_\mu - \frac{\eta\mu}{(\eta^2 - 1)(1 - \mu^2)} \right] . \quad (3.47)$$

Έχουμε λοιπόν όλα τά στοιχεΐα πού μās χρειάζονται γιά νά γράψουμε άναλυτικά τίς έξιώσεις (3.13) καί (3.14). Άλλάζοντας τήν άνεξάρτητη μεταβλητή από  $s$  σέ  $\eta$  (έξίωση 3.40), άντι-



καθιστώντας τά  $A$  και  $B$  από τις εξισώσεις (3.46) και (3.47) και κρατώντας, αντί για  $K$ , την  $\sigma$  (εξίσωση (3.45)) σαν την εξαρτημένη μεταβλητή παίρνουμε μετά από αρκετά πολύπλοκους υπολογισμούς τις σχετικά απλές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta} = & \frac{\eta(1-\mu^2)}{2(\eta^2-\mu^2)} \left[ (\eta^2-1)S_{\eta}^2 - (1-\mu^2)S_{\mu}^2 \right] - \\ & - \frac{\mu(\eta^2-1)(1-\mu^2)}{\eta^2-\mu^2} S_{\eta}S_{\mu} \end{aligned} \quad (3.48)$$

και

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu} = & \frac{\mu(\eta^2-1)}{2(\eta^2-\mu^2)} \left[ (\eta^2-1)S_{\eta}^2 - (1-\mu^2)S_{\mu}^2 \right] + \\ & + \frac{\eta(\eta^2-1)(1-\mu^2)}{\eta^2-\mu^2} S_{\eta}S_{\mu} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας των εξισώσεων (3.48) και (3.49) είναι η εξίσωση (3.41), πράγμα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για έναν ανεξάρτητο έλεγχο των τελικών εξισώσεων (3.48) και (3.49) του προβλήματος.

Ο μετρικός τανυστής των σαμπρελοειδών μελανών όπων προσδιορίζεται από τη σχέση (3.12) αν χρησιμοποιήσουμε τά  $\nu$  και  $\psi$  που προσδιορίζουμε από τις εξισώσεις (3.7) και (3.43) και αντικαταστήσουμε τό  $K$  από τη σχέση (3.45). Βρίσκουμε

$$ds^2 = \frac{1}{4}(\eta^2-1)(1-\mu^2)e^{-S}(dt)^2 - 4m^2e^S(d\varphi)^2 - 4m^2(\eta^2-\mu^2)e^{\sigma-S} \left[ \frac{(d\eta)^2}{\eta^2-1} + \frac{(d\mu)^2}{1-\mu^2} \right] \quad (3.50)$$

Τό συμπέρασμα, μέχρι τό σημείο αυτό, είναι ότι ο μετρικός τανυστής (3.50) αποτελεί λύση τών εξισώσεων Einstein όταν ή  $S$  δίνεται από τή σχέση (3.44) και ή  $\sigma$  προσδιορίζεται από τήν  $S$  μέ τή βοήθεια τών εξισώσεων (3.48) και 3.49).

### 3.6. Ή γενικότερη σαμπρελοειδής τοπική μελανή όπή.

Τό επόμενο βήμα είναι νά προσδιορίσουμε έκεινες από τίς λύσεις (3.50) τών εξισώσεων Einstein πού περιγράφουν στατικές και άξισυμμετρικές τοπικές μελανές όπές μέ σαμπρελοειδή όρίζοντα.

Γιά τίς λύσεις (3.50) ισχύουν:

- (i) Τό όριο τής όρίζουσας του τετραδιάστατου μετρικού τανυστή στον όρίζοντα είναι

$$G = -16m^6(1-\mu^2)^2 \lim e^{2\sigma-2S} \quad (3.51)$$

- (ii) 'Ο διδιάστατος μετρικός τανυστής στον όρίζοντα είναι

$$d\tau^2 = 4m^2 \left[ e^S(d\varphi)^2 + e^{\sigma-S}(d\mu)^2 \right] \quad (3.52)$$

όπου μέ  $S$  και  $\sigma$  δηλώνουμε τίς όριακές τιμές τών συναρτήσεων αύτων στον όρίζοντα ( $\eta=1$ ).

(iii) Ἡ ὀρίζουσα τοῦ μετρικοῦ τανυστῆ τοῦ ὀρίζοντα εἶναι

$$g = 16m^4 \lim e^\sigma . \quad (3.53)$$

Γιὰ νά εἶναι λοιπόν οἱ μετρικοί τανυστές (3.50) καί (3.52) λεῖτοι καί ἀντιστρεπτοί πρέπει τά ὄρια (3.51) καί (3.53) νά εἶναι πεπερασμένα καί διάφορα τοῦ μηδενός. Συνεπῶς πρέπει νά εἶναι

$$\lim e^S = \text{πεπερασμένο, διάφορο τοῦ μηδενός} \quad (3.54)$$

καί

$$\lim e^\sigma = \text{πεπερασμένο, διάφορο τοῦ μηδενός} . \quad (3.55)$$

Ἡ (3.54) ικανοποιεῖται ἀκριβῶς τότε ὅταν ἡ ἔκφραση (3.44) δέν περιέχει καθόλου συναρτήσεις Legendre δεύτερου εἴδους. Στήν περίπτωση αὐτή συμπεραίνουμε, ἀπό τίς ἐξισώσεις (3.48) καί (3.49), ὅτι καί ἡ συνθήκη (3.55) ικανοποιεῖται. Ὡστε λοιπόν

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} B_k P_k(\eta) P_k(\mu) . \quad (3.56)$$

θεωροῦμε κατόπιν τά ὄρια τῶν ἐξισώσεων (3.48) καί (3.49):

(α) Γιὰ  $\eta \rightarrow 1$ , δηλαδή στόν ὀρίζοντα, βρίσκουμε ὅτι

$$\sigma_\mu = 0 . \quad ((3.57))$$

Συνεπῶς ἡ  $\sigma$  εἶναι σταθερή πάνω στόν ὀρίζοντα.

(β) Γιὰ  $\eta \rightarrow -1$ , δηλαδή στόν ἄξονα τῆς ἀξιμουθιακῆς συμμετρίας, βρίσκουμε ὅτι

$$\sigma_{\mu} = 0 \quad . \quad (3.58)$$

Συνεπώς ή  $\sigma$  είναι σταθερή πάνω στον άξονα συμμετρίας.

(γ) Για  $\mu^2 \rightarrow 1$ , δηλαδή στο ίσημερινό επίπεδο, βρίσκουμε ότι

$$\sigma_{\eta} = 0 \quad . \quad (3.59)$$

Συνεπώς ή  $\sigma$  είναι σταθερή πάνω στο ίσημερινό επίπεδο.

Έφ'όσον ο όριζοντας, τό ίσημερινό επίπεδο και ο άξονας συμμετρίας έχουν κοινά σημεία, ή σταθερή τιμή του  $\sigma$  είναι ή ίδια και στα τρία αυτά σύνολα. "Ας είναι

$$\sigma = 2\alpha \quad (3.60)$$

ή σταθερή αυτή τιμή.

Τό τελευταίο βήμα είναι ή εφαρμογή του θεωρήματος τών Gauss-Bonnet πού θα δώσει μιά σχέση μεταξύ τών συντελεστών τής σειράς (3.56) ανάλογη (άλλά αρκετά πιο πολύπλοκη) μέ τή σχέση (2.35) .

Γιά νά υπολογίσουμε τή βαθμωτή καμπυλότητα του μετρικού τανυστή (3.52) τόν γράφουμε στή μορφή

$$d\tau^2 = \Omega^2 \left[ (d\varphi)^2 + (dy)^2 \right] \quad , \quad (3.61)$$

όπου

$$\Omega^2 = 4m^2 e^S \quad \text{και} \quad \frac{d\mu}{dy} = e^{S-\alpha} \quad . \quad (3.62)$$



Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$(\log \Omega)_{YY} = \frac{1}{2} e^{S-2\alpha} (e^S)^{**}, \quad (3.63)$$

όπου η τελεία δηλώνει παραγωγή ως προς τη συντεταγμένη  $\mu$ .  
Συνεπώς η βαθμωτή καμπυλότητα ίσοϋται με

$$R = - \frac{e^{-2\alpha}}{4m^2} (e^S)^{**}. \quad (3.64)$$

Τό θεώρημα των Gauss-Bonnet (2.37) με άριθμό του Euler  $\chi=0$  δίνει τή σχέση

$$(e^S)_{|\mu=1}^* = (e^S)_{|\mu=-1}^* \quad (3.65)$$

Γιά νά μπορεί ή πολλαπλότητα με μετρικό τανυστή (3.52) νά γίνει μιά τοπολογική σαμπρέλα θά πρέπει νά μπορούμε νά ταυτοποιήσουμε τίς γραμμές  $\mu=+1$  καί  $\mu=-1$  τής πολλαπλότητας. (Οί γραμμές  $\varphi=0$  καί  $\varphi=2\pi$  δέν παρουσιάζουν καμμιά δυσκολία έφ'όσον ο μετρικός τανυστής (3.52) είναι ανεξάρτητος τής γωνίας  $\varphi$ ). Θά πρέπει λοιπόν νά απαιτήσουμε, έπιπλέον από τή συνθήκη πού δίνει τό θεώρημα των Gauss-Bonnet, καί ότι ο μετρικός τανυστής (3.52) καί ή βαθμωτή καμπυλότητα (3.64) έχουν τίς ίδιες τιμές στίς γραμμές  $\mu=+1$  καί  $\mu=-1$ . 'Η όριακή τιμή στον όρίζοντα τής συνάρτησης  $S$  θά πρέπει λοιπόν νά ικανοποιεί καί τίς συνθήκες

$$S(\mu=1) = S(\mu=-1) \quad (3.66)$$

καί

$$(e^S)_{|\mu=1}^{\ddot{}} = (e^S)_{|\mu=-1}^{\ddot{}} \quad (3.67)$$

Οι συνθήκες (3.65)-(3.67) ικανοποιούνται ακριβώς τότε όταν οι συντελεστές  $B_k$  της σειράς (3.56) ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \dot{P}_{2k}(1) = 0, \quad \text{καί} \quad (3.68)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} \ddot{P}_{2k+1}(1) = 0 .$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι για τις συμπελοειδεῖς μελανές όπες οι συνθήκες μεταξύ τών συντελεστών είναι πιό πολύπλοκες άπ'ότι για τις σφαιρικές μελανές όπες καί περιλαμβάνουν καί τις άριθμητικές τιμές τής πρώτης καί τής δεύτερης παραγώγου τών πολυώνυμων Legendre για  $\mu=1$ .

Θά τελειώσουμε τό κεφάλαιο μέ συνόψιση τής κατασκευής τής γενικότερης στατικής καί άξισυμμετρικής τοπικής μελανής όπης μέ συμπελοειδή όρίζοντα: 'Ο μετρικός τανυστής δίνεται άπό τή σχέση (3.50). 'Η συνάρτηση  $S$  δίνεται άπό τή σχέση (3.56) όπου τά  $P_k$  είναι πολύνομα Legendre καί οι συντελεστές  $B_k$  περιορίζονται άπό τις σχέσεις (3.68). 'Η συνάρτηση  $\sigma$  προσδιορίζεται άπό τις έξισώσεις (3.48) καί (3.49). 'Ο όρίζοντας τής μελανής όπης είναι ή έπιφάνεια  $\eta=1$  καί ή μάζα της (θά άποδειχθεῖ στο έπόμενο κεφάλαιο) είναι  $m$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

### ΦΥΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΜΕΛΑΝΩΝ ΟΠΩΝ

#### 4.1. Μάζα

Στήν ένότητα αυτή προσδιορίζουμε τή συνολική μάζα τών γενικότερων στατικών καί άξισυμμετρικών τοπικών μελανών όπών μέ σφαιρικό ή σαμπρελοειδή όρίζοντα, τών όποιών ό μετρικός τανυστής δίνεται αντίστοιχα από τίς σχέσεις (2.23) καί (3.50). Τό κοινό άποτέλεσμα καί για τά δύο είδη τών μελανών όπών είναι ότι ή μάζα τους ίσοϋται μέ τήν παράμετρο  $m$  πού έμφανίζεται στίς αναλυτικές έκφράσεις τών μετρικών τανυστών (2.23) καί (3.50).

Ο προσδιορισμός τής μάζας γίνεται μέ τή βοήθεια του ολοκληρώματος Komar<sup>84</sup> (Komar integral). Τό ολοκλήρωμα Komar παίζει στή Σχετικότητα τό ρόλο πού παίζει τό ολοκλήρωμα Gauss<sup>85</sup> στον ήλεκτρομαγνητισμό: Όπως μέ τό ολοκλήρωμα Gauss έπιτυγχάνεται ό υπολογισμός του όλικου φορτίου μιās πεπερασμένης κατανομής φορτίων χωρίς νά χρειάζεται νά πλησιάσουμε στήν περιοχή τών φορτίων (μέ τον υπολογισμό τής ροής του ήλεκτρικου πεδίου από μιá κλειστή δι-διάστατη έπιφάνεια πού περιλαμβάνει όλα τά φορτία) έτσι καί μέ τό ολοκλήρωμα Komar έπιτυγχάνεται ό προσδιορισμός τής όλικής μάζας του χωρόχρονου μέ υπολογισμούς πού γίνονται στίς περιοχές του χωρόχρονου στίς όποιες ισχύουν οι έξισώσεις Einstein μέ μηδενικό τανυστή πίεσης-ένέργειας.

\*As είναι

$$\xi^a = (\partial/\partial t)^a \quad (4.1)$$

τό διανυσματικό πεδίο Killing πού είναι χρονοειδές (timelike)

Έξω από τόν όρίζοντα,  $\nabla_a$  ό τελεστής παραγωγήσις πού είναι συμβιβαστός μέ τό μετρικό τανυστή του χωρόχρονου, καί  $\epsilon_{abcd}$  ό όλικά άντισυμμετρικός τανυστής Levi-Civita<sup>70</sup> του χωρόχρονου. Ή μάζα του χωρόχρονου δίνεται από τό ολοκλήρωμα Komar

$$M = \frac{1}{16\pi} \iint_C \epsilon_{abmn} (\nabla_a \xi^b) dA^{mn}, \quad (4.2)$$

όπου τό έπιφανειακό ολοκλήρωμα (4.2) υπολογίζεται σε μία τυχαία συμπαγή διδιάστατη έπιφάνεια  $C$  της υπερεπιφάνειας  $t=\text{σταθ.}$  ή όποία (διδιάστατη έπιφάνεια) περικλείει τίς περιοχές του χωρόχρονου μέ μή μηδενικό τανυστή πίεσης-ένέργειας καί όλες τίς άνωμαλίες (singularities) του χωρόχρονου. Στη σχέση (4.2)  $dA^{mn}$  είναι ή στοιχειώδης έπιφάνεια (surface element) της έπιφάνειας ολοκλήρωσης  $C$ . Ή τιμή του ολοκληρώματος (4.2) είναι άνεξάρτητη της έκλογής της έπιφάνειας  $C$  καί συνεπώς χαρακτηρίζει τόν ίδιο τό χωρόχρονο. Πράγματι, έφ'όσον τό διανυσματικό πεδίο Killing είναι μία συμμετρία του χωρόχρονου, τό ολοκλήρωμα (4.2) είναι άνεξάρτητο από τήν έκλογή της τριδιάστατης υπερεπιφάνειας  $t=\text{σταθ.}$  Ή άνεξαρτησία του ολοκληρώματος από τήν έκλογή της έπιφάνειας  $C$  άποδεικνύεται άν θεωρήσουμε τή διαφορά των τιμών του για δύο διαφορετικές έπιφάνειες  $C_1$  καί  $C_2$  καί έφαρμόσουμε τό θεώρημα του Stokes καί τίς ιδιότητες

$$\nabla_m \nabla_n \xi_p = R_{mnpq} \xi^q \quad (4.3)$$

των διανυσματικών πεδίων Killing (όπου  $R_{mnpq}$  είναι ό τανυστής καμπυλότητας του Riemann του χωρόχρονου) καί



$$\epsilon_a^{mnp} R_{mnp}{}^q = 0 \quad (4.4)$$

του τανυστή του Riemann.

Τήν ανεξαρτησία της τιμής του ολοκληρώματος (4.2) από την έκλογή της επιφάνειας  $C$  θα την έκμεταλλευτούμε: Εάν επιφάνεια  $C$  θα διαλέξουμε τον ορίζοντα των μελανών όπών. Μέ τον τρόπο αυτό η ολοκληρωτέα ποσότητα απλοποιείται σημαντικά γιατί ενδιαφερόμαστε μόνο για τό όριό της για  $\eta=1$ .

(i) Σφαιρικές μελανές όπές: Στο σύστημα συντεταγμένων στό όποιο έχει έκφραστεϊ ό μετρικός τανυστής (2.23) της σφαιρικής τοπικής μελανής όπης τό ολοκλήρωμα Komar γράφεται αναλυτικά

$$M = \frac{1}{16\pi} \iint 2 \sqrt{-G} g^{tt} g^{n\eta} (\xi_{\eta,t} - \xi_{t,\eta}) d\mu d\phi \quad , \quad (4.5)$$

όπου τό  $G$  δίνεται από τή σχέση (2.26),  $g^{tt}$  καί  $g^{n\eta}$  είναι οί ανταλλοίωτες συνιστώσες του μετρικού τανυστή (2.23) καί  $\xi_\eta$  καί  $\xi_t$  οί συναλλοίωτες συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου Killing (4.1) στό σύστημα αυτό. Από τίς συνιστώσες αυτές μόνο ή

$$\xi_t = g_{tt} = \frac{\eta-1}{\eta+1} e^S \quad (4.6)$$

είναι διάφορη του μηδενός. Αντικατάσταση στή σχέση (4.5) δίνει

$$M = m \quad (4.7)$$

ότι δηλαδή ή μάζα της μελανής όπης είναι  $m$ .

(ii) Σαμπρελοειδείς μελανές όπές: Στο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο έχει έκφραστεί ο μετρικός τανυστής (3.50) τό ολοκλήρωμα Komar δίνεται πάλι από τή σχέση (4.5) όπου τώρα τό  $G$  δίνεται από τή σχέση (3.51), τά  $g^{tt}$  καί  $g^{\eta\eta}$  είναι οι ανταλλοίωτες συνιστώσες του μετρικού τανυστή (3.50) καί όπου ή μόνη μή μηδενική συνιστώσα του διανυσματικού πεδίου Killing είναι ή

$$\xi_t = \frac{1}{4}(\eta^2-1)(1-\mu^2)e^{-S} . \quad (4.8)$$

Αντικατάσταση στην (4.5) δίνει πάλι ότι

$$M = m . \quad (4.9)$$

Τό συμπέρασμα ότι ή μάζα της γενικότερης στατικής καί άξι-συμμετρικής τοπικής μελανής όπής μέ σφαιρικό ή σαμπρελοειδή όριζοντα ίσοϋται μέ τή μάζα  $m$  της αντίστοιχης βασικής μελανής όπής (της μελανής όπής Schwarzschild ή της μελανής όπής μέ μετρικό τανυστή (3.38) ) έκφράζει κάτι τό πολύ σημαντικό: Οι παραμορφώσεις πού υφίσταται ή βασική μελανή όπή μέ τήν πρόσθεση της συνάρτησης  $S(\eta, \mu)$  στις βασικές λύσεις (2.18) καί (3.39) δέν αλλάζουν καθόλου τή μάζα της μελανής όπής. Μπορούμε λοιπόν νά θεωρήσουμε ότι οι συναρτήσεις  $S$  (έξισώσεις (2.28) καί (3.56)) έκφράζουν τίς παραμορφώσεις πού υφίστανται οι βασικές μελανές όπές από τήν έξωτερική κατανομή της μάζας πού τίς περιβάλλει. Έφ'όσον σέ κάποια περιοχή του όριζοντα της μελανής όπής ο τανυστής πίεσης-ένέργειας είναι μηδέν, καθόλου μάζα από τήν έξωτερική κατανομή δέν έχει πέσει μέσα στη μελανή όπή. Συνεπώς, είναι λογικό νά περιμένουμε ότι ή όλική μάζα της παραμορφωμένης μελανής όπής ίσοϋται μέ τή μάζα

της άρχικης βασικης μελανης όπης.

#### 4.2. Έπιφάνεια του όρίζοντα

Ένα άλλο έξωτερικό χαρακτηριστικό κάθε μελανης όπης είναι η όλική έπιφάνεια του όρίζοντά της. Έκτός από τή γεωμετρική εικόνα πού μάς δίνει για τό μέγεθος τής μελανης όπης, η έπιφάνεια του όρίζοντα σχετίζεται καί μέ τή θερμοδυναμική τής μελανης όπης, όπως αναφέραμε στην ένότητα 1.1. Τό θεώρημα ότι η έπιφάνεια του όρίζοντα δέν έλαττώνεται κατά τή διάρκεια τών φυσικών μεταβολών τής μελανης όπης δέν είναι γνωστό άν ισχύει για τίς τοπικές μελανές όπές γιατί μιά από τίς βασικές ύποθέσεις πού χρησιμοποιήθηκε για τήν απόδειξη του είναι ότι ο χωρόχρονος τής μελανης όπης είναι άσυμπτωτικά επίπεδος. Στην ένότητα αυτή ύπολογίζουμε τήν έπιφάνεια του όρίζοντα τών γενικών τοπικών μελανών όπών μέ μετρικούς τανυστές (2.23) καί (3.50).

Η έπιφάνεια του όρίζοντα δίνεται από τή σχέση

$$A = \iint \sqrt{g} \, d\mu d\varphi, \quad (4.10)$$

όπου  $g$  είναι η όρίζουσα του μετρικού τανυστή του όρίζοντα. Τό  $g$  δίνεται από τίς έξισώσεις (2.27) καί (3.53) για τίς γενικότερες σφαιρικές καί σαμπρελοειδεΐς μελανές όπές αντίστοιχα. Ο ύπολογισμός του όλοκληρώματος δίνει ότι η έπιφάνεια του όρίζοντα καί στίς δύο περιπτώσεις ίσούται μέ

$$A = 16\pi m^2 e^{\alpha}, \quad (4.11)$$

όπου  $\alpha$  είναι οι σταθερές που ορίστηκαν στις σχέσεις (2.30) και (3.60) για τις σφαιρικές και τις σαμπρελοειδείς μελανές όπες αντίστοιχα. Υπενθυμίζεται ότι οι αντίστοιχες βασικές μελανές όπες έχουν επιφάνεια ορίζοντα

$$A = 16\pi m^2 \quad (4.12)$$

Τό συμπέρασμα ότι η έξωτερική κατανομή της μάζας αλλάζει την επιφάνεια του ορίζοντα δεν προξενεί έκπληξη. Οι έξωτερικές παραμορφώσεις, αν και δεν αλλάζουν την τοπολογική δομή του ορίζοντα, αλλάζουν τη μετρική δομή του και συνεπώς και την επιφάνειά του.

#### 4.3. Επιφανειακή ένταση βαρύτητας

Άς είναι  $\xi^a$  τό διανυσματικό πεδίο Killing (4.1) που γίνεται φωτοειδές στον ορίζοντα. Συνεπώς πάνω στον ορίζοντα της μελανής όπης τό  $\xi^a$  θά είναι γεωδαισιακό (geodesic) και θά ικανοποιεί την εξίσωση

$$\xi^m \nabla_m \xi^a = k \xi^a \quad (4.13)$$

όπου  $k$  είναι ένα βαθμωτό πεδίο στον ορίζοντα. Τό  $k$  μετρά<sup>12</sup> την απόκλιση του γεωδαισιακού διανυσματικού πεδίου  $\xi^a$  από την άφινική παραμετροποίηση (affine parametrization deviation) εξ' αίτίας του πεδίου βαρύτητας. Τό  $k$  λοιπόν είναι ένα μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας πάνω στον ορίζοντα της μελανής όπης. Ένα πολύ βασικό θεώρημα της γενικής θεωρίας των μελανών όπων<sup>12</sup> αποδεικνύει ότι τό  $k$  είναι σταθερό στον ορίζοντα. Τό



$k$  προσδιορίζεται σαν η θετική τετραγωνική ρίζα της ποσότητας

$$k^2 = \frac{1}{2} \lim (\nabla_a \xi_b) (\nabla^a \xi^b) \quad (4.14)$$

όπου τό όριο νοεΐται πάνω στον όρίζοντα.

Έκτός από τή γεωμετρική της σημασία, η έπιφανειακή ένταση της βαρύτητας έχει και φυσική σημασία. Στίς μελέτες της θερμοδυναμικής τών μεμονωμένων μελανών όπών αποδεικνύεται ότι η θερμοκρασία της μελανής όπής (σέ μονάδες όπου  $c=1$  και  $G=1$ ) δίνεται από τή σχέση

$$T = \frac{k}{8\pi} \quad (4.15)$$

Συνεπώς και για τίς μελανές όπές ίσχύει ο "μηδενικός νόμος" της θερμοδυναμικής: Η θερμοκρασία της μελανής όπής είναι σταθερή σ'όλη τήν έπιφάνεια του όρίζοντα.

Ο ύπολογισμός της έπιφανειακής έντασης βαρύτητας έπιτυγχάνεται μέ τή βοήθεια της σχέσης (4.14). Για τή γενικότερη στατική, άξισυμμετρική, σφαιρική, τοπική μελανή όπή μέ μετρικό τανυστή (2.23) ή σχέση (4.14) δίνει

$$k^2 = \frac{1}{4} \lim g^{\eta\eta} g^{tt} (\xi_{t,\eta})^2 \quad (4.16)$$

όπου τά διάφορα σύμβολα έχουν όριστεί στό τμήμα (i) της ένότητας 4.1. Αντικατάσταση δίνει

$$k^2 = \frac{1}{16m^2} \lim e^{2S-\sigma} = \frac{e^{-2\alpha}}{16m^2} \quad (4.17)$$

καί συνεπώς

$$k = \frac{e^{-\alpha}}{4m} , \quad (4.18)$$

όπου  $\alpha$  είναι ή σταθερή πού όρίστηκε στή σχέση (2.30).

Γιά τή γενικότερη στατική, άξισυμμετρική, σαμπρελοειδή, τοπική μελανή όπή μέ μετρικό τανυστή (3.50) τό  $k$  προσδιορίζεται πάλι από τή σχέση (4.16) όπου τώρα τά συμβολα έχουν όριστεί στό τμήμα (ii) τής ένότητας (4.1). Αντικατάσταση δίνει

$$k^2 = \frac{1}{16m^2} \lim e^{-\sigma} \quad (4.19)$$

καί συνεπώς ή έπιφανειακή ένταση τής βαρύτητας δίνεται πάλι από τή σχέση (4.18) όπου όμως  $\alpha$  είναι ή σταθερή πού όρίστηκε στή σχέση (3.60).

Γιά όλες τίς μελανές όπές πού κατασκευάσαμε στήν πραγματεία αύτή ίσχύει ή γενική σχέση

$$\frac{kA}{m} = 4\pi , \quad (4.20)$$

πού συνδέει τρία έξωτερικά χαρακτηριστικά τής μελανής όπης.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στήν πραγματεία αυτή αναπτύξαμε μιιά γενική μεθοδο για τόν προσδιορισμό τών γενικών στατικῶν καί άξισυμμετρικῶν λύσεων τών έξισώσεων Einstein πού παριστάνουν τοπικές μελανές όπές. Ἡ μέθοδος εφαρμόζεται για τίς τοπικές μελανές όπές μέ τοπολογικά σφαιρικό ή σαμπρελοειδη όρίζοντα, πού άποτελοϋν καί τίς μόνες περιπτώσεις στατικῶν, άξισυμμετρικῶν, τοπικῶν μελανῶν όπῶν. Καί στίς δύο περιπτώσεις ο μετρικός τανυστής πού περιγράφει τίς μελανές όπές προσδιορίζεται αναλυτικά, μέ τή βοήθεια πολυώνυμων Legendre.

Καί στίς δύο κατηγορίες τοπικῶν μελανῶν όπῶν, ή λύση τών έξισώσεων Einstein πού τίς περιγράφει προσδιορίζεται σε δύο βήματα, μέ τή βοήθεια τῆς άρχῆς τῆς έπαλληλίας. Στο πρώτο βήμα προσδιορίζεται μιιά άπλη λύση σφαιρικής ή σαμπρελοειδοϋς μελανῆς όπῆς, ή "βασική" μελανή όπή, ένῶ στο δεύτερο προστίθεται στή βασική λύση ή γενικότερη λύση τών έξισώσεων Einstein πού δέν καταστρέφει τόν όρίζοντα τῆς βασικής μελανῆς όπῆς. Ἡ βασική σφαιρική μελανή όπή εἶναι ή μελανή όπή Schwarzschild ένῶ ή βασική σαμπρελοειδῆς μελανή όπή εἶναι άρκετά πολύπλοκη καί προσδιορίζεται άπό τήν άπαίτηση ότι ο μετρικός τανυστής της εἶναι λεῖος καί άντιστρεπτός στον όρίζοντα. Τέλος, μέ εφαρμογή τοϋ θεωρήματος τών Gauss-Bonnet, βρίσκονται οι έπιπλέον συνθήκες μεταξύ τών παραμέτρων τών λύσεων έτσι ὥστε ο όρίζοντας νά έχει τήν έπιθυμητή τοπολογία.

## SUMMARY

In this treatise we develop a method for the construction of the most general static and axisymmetric solution of the Einstein equations which describes local black holes. The method is applied for the construction of black holes with a topologically spherical or toroidal horizon, which are the only cases of static, axisymmetric, local black holes. In both cases the metric of the black hole is expressed analytically, in terms of Legendre polynomials.

The solutions of the Einstein equations which describe both categories of local black holes are determined in two steps, by using the superposition principle. In the first step, a simple solution of a spherical or a toroidal black hole is determined, the "basic black hole", while in the second step it is added to the basic solution the most general solution of the Einstein equations which does not destroy the horizon of the basic black hole solution. The basic spherical black hole is the Schwarzschild black hole while the basic toroidal black hole is rather complicated and it is determined from the requirement that the spacetime metric is smooth and invertible on the horizon. Additional conditions among the free parameters of the solutions are determined, so that the horizon has the desired topology, as an application of the Gauss-Bonnet theorem.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber., 799, 1915.
2. A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber. 47, 831, 1915.
3. A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber., 844, 1915.
4. A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber., 778, 1915.
5. K. Schwarzschild, Sitzber, Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math-Phys. Tech. 189, 1916.
6. H. Reissner, Ann. Phys. (Germany) 50, 106, 1916.
7. G. Nordström, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 20, 1238, 1918.
8. R.P. Kerr, Phys. Rev. Lett. 11, 237, 1963.
9. E.T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash και R. Torrence, J. Math. Phys. 6, 918, 1965.
10. W. Israel, Phys. Rev. 164, 1776, 1968.
11. B. Carter, Phys. Rev. Lett. 26, 331, 1971.
12. B. Carter, στο βιβλίο Black Holes, σελ. 57, C. DeWitt και B.S. DeWitt eds., Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1973.
13. D.C. Robinson, Phys. Rev. Lett. 34, 905, 1975.
14. R. Penrose, Nuovo Cimento 1, special number, 252, 1969.
15. R. Penrose και R. M. Floyd, Nature Phys. Sci., 229, 177, 1971.
16. D. Christodoulou, Ph.D διατριβή "Investigations in gravitational collapse and the physics of black holes", Princeton University, 1971.
17. D. Christodoulou, Phys. Rev. Lett. 25, 1596, 1970.
18. J. M. Bardeen, W.H. Press και S.A Teukolsky, Astrophys. J. 178, 347, 1972.
19. R.M. Wald, Astrophys. J. 191, 231, 1974.
20. R.M. Wald, Ann. Phys. 82, 548, 1974.
21. S.W. Hawking, Phys. Rev. Lett. 26, 1344, 1971.
22. S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. 25, 152, 1972.

23. S.W. Hawking και G.F.R Ellis στο βιβλίο The large scale structure of spacetime, 1973, Cambridge University Press.
24. J. Bekenstein, Phys. Rev. D5, 1239, 1972.
25. J.D. Bekenstein, Phys. Rev. D12, 3077, 1975.
26. S.W. Hawking, Phys. Rev. D13, 191, 1976.
27. S.W. Hawking, Nature, 248, 30, 1974.
28. S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. 43, 199, 1975.
29. S.W. Hawking, Phys. Rev. D14, 2460, 1976.
30. D.N. Page, Phys. Rev. D13, 193, 1976.
31. R.M. Wald, Commun. Math. Phys. 45, 9, 1975.
32. R.M. Wald, Phys. Rev. D13, 3176, 1976.
33. S. Chandrasekhar στο βιβλίο The mathematical theory of black holes, 1982 (ὕπό ἔκδοσιν), Oxford at the Clarendon Press.
34. T. Regge και J.A. Wheeler, Phys. Rev. 108, 1063, 1957.
35. F.J. Zerilli, Phys. Rev. Lett. 24, 737, 1970.
36. F.J. Zerilli, Phys. Rev. D2, 2141, 1970.
37. C.V. Vishveshwara, Phys. Rev. D1, 2870, 1970.
38. J.M. Bardeen και W.H. Press, J. Math. Phys. 14, 7, 1972.
39. J.L. Friedman, Proc. R. Soc. Lond. A335, 163, 1973.
40. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A343, 289, 1975.
41. S. Chandrasekhar και S. Detweiler, Proc. R. Soc. Lond. A344, 441, 1975.
42. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A354, 145, 1975.
43. F.J. Zerilli, Phys. Rev. D9, 860, 1974.
44. V. Moncrief, Phys. Rev. D9, 2707, 1974.
45. V. Moncrief, Phys. Rev. D10, 1057, 1974.
46. V. Moncrief, Phys. Rev. D12, 1526, 1975.
47. D.M. Chitre, Phys. Rev. D13, 2713, 1976.
48. R.M. Wald, Proc. R. Soc. Lond. A369, 67, 1979.
49. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A365, 453, 1979.

50. S. Chandrasekhar και B.C. Xanthopoulos, Proc. R. Soc. Lond. A367, 1, 1979.
51. B.C. Xanthopoulos, Phys. Lett. 77A, 7, 1980.
52. B.C. Xanthopoulos, Proc. R. Soc. Lond. A378, 61, 1981.
53. B.C. Xanthopoulos, Proc. R. Soc. Lond. A378, 73, 1981.
54. S.A. Teukolsky, Phys. Rev. Lett. 29, 1114, 1972.
55. S.A. Teukolsky, Astrophys. J. 185, 635, 1973.
56. A.A. Starobinsky και S.M. Churilov, Zh. Exp. i. Teoret. Fiz. 65, 3, 1973, Μετάφραση στα άγγλικά στο Soviet Phys. JETP, 38, 1, 1973.
57. W.H. Press και S.A. Teukolsky, Astrophys. J. 185, 649, 1973.
58. J.D. Bekenstein, Phys. Rev. D7, 949, 1973.
59. J.M. Cohen και L.S. Kegeles, Phys. Rev. D10, 1070, 1974.
60. P.L. Chrzanowski, Phys. Rev. D11, 2042, 1975.
61. P.L. Chrzanowski, Phys. Rev. D13, 806, 1976.
62. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond, A348, 39, 1976.
63. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A349, 1, 1976.
64. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A358, 421, 1978.
65. S. Chandrasekhar και S. Detweiler, Proc. R. Soc. Lond. A352, 325, 1977.
66. S. Detweiler, Proc. R. Soc. Lond. A352, 381, 1977.
67. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A365, 425, 1979.
68. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A372, 475, 1980.
69. J.M. Stewart, Proc. R. Soc. Lond. A367, 527, 1979.
70. G.W. Misner, K.S. Thorne και J.A. Wheeler, στο βιβλίο Gravitation, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
71. L.P. Eisenhart, στο βιβλίο Riemannian Geometry, Princeton University Press, 1966.
72. H. Weyl, Ann. Physik 54, 117, 1917.

73. J.L. Synge στο βιβλίο *Relativity: The General Theory*, North Holland, Amsterdam, 1960.
74. L.A. Mysak και G. Szekeres, *Can. J. Phys.* 44, 617, 1966.
75. W. Israel και K.A. Khan, *Nuovo Cimento* 33, 331, 1964.
76. W. Israel, *Lett. Nuovo Cimento*, 6, 267, 1973.
77. P.C. Peters, *J. Math. Phys.* 20, 1481, 1979.
78. R. Geroch και J.B. Hartle, Enrico Fermi Institute, University of Chicago preprint, 1981.
79. S. Chandrasekhar και J.L. Friedman, *Astrophys. J.* 175, 379, 1972.
80. S. Chandrasekhar, *Proc. R. Soc. Lond.* A358, 405, 1978.
81. N.J. Hicks στο βιβλίο *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1971.
82. P.M. Morse και H. Feshbach στο βιβλίο *Methods of Theoretical Physics*, Mc Graw-Hill, New York, 1953.
83. B. Carter στο βιβλίο *General Relativity, An Einstein centenary survey*, S.W. Hawking και W. Israel eds., Cambridge University Press, σελ. 294, 1979.
84. A. Komar, *Phys. Rev.* 113, 934, 1959.
85. J.D. Jackson στο βιβλίο *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1975.



Μελανές όπές στή Θεωρία τής Σχετικότητας

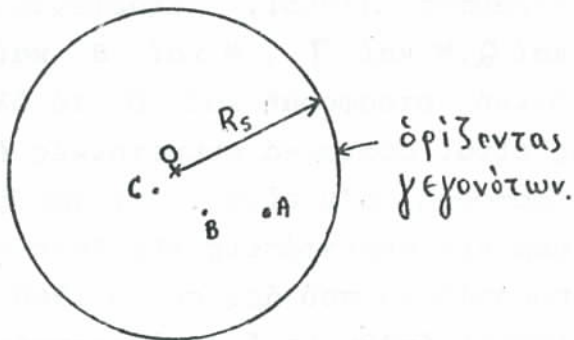
Ἡ Γενική Θεωρία τής Σχετικότητας προτάθηκε τό 1916 σάν μιá θεωρία βαρύτητας πού εἶναι συμβιβαστή καί μέ τίς ἀρχές τής Εἰδικῆς Θεωρίας τής Σχετικότητας, δηλαδή συμβιβαστή μέ τό πεπερασμένο τής ταχύτητας διαδόσεως τοῦ φωτός καί ὄλων γενικά τῶν δυναμικῶν πεδίων. Ἄν καί οἱ βασικές τῆς ἀρχές, ἡ διατύπωση καί ὁ φορμαλισμός διαφέρουν πολύ ἀπό τή Νευτώνεια Θεωρία, οἱ προβλέψεις τῶν δύο θεωριῶν διαφέρουν αἰσθητά μόνο στή γειτονιά ἰσχυρῶν βαρυτικῶν πεδίων.

Ἡ σχετικότητα προβλέπει τήν ὕπαρξη τῶν black holes: Ἐχουν ἀνακαλυφθεῖ τέσσερις ἀκρίβεις λύσεις τῶν ἐξισώσεων πεδίου τοῦ Einstein πού περιλαμβάνουν καί περιοχές τοῦ χώρου ἀπό τίς ὁποῖες τίποτε δέν μπορεῖ νά διαφύγει στό ἐξωτερικό σύμπαν. Οἱ τέσσερις αὐτές λύσεις εἶναι ἡ λύση Schwarzschild (1916), ἡ Reissner-Nordström (1918-19), ἡ Kerr (1963) καί ἡ Kerr-Newman (1965). Ἐξαρτῶνται, ἀντίστοιχα, ἀπό τίς παραμέτρους  $M$ ,  $M$  καί  $Q$ ,  $M$  καί  $J$ ,  $M$  καί  $J$  καί  $Q$ , ὅπου  $M$  εἶναι ἡ ὀλική μάζα,  $J$  ἡ ὀλική στροφορμή καί  $Q$  τό ὀλικό φορτίο τῆς black hole. Οἱ δύο πρῶτες εἶναι σφαιρικά συμμετρικές ἐνῶ οἱ δύο τελευταῖες, πού ἔχουν καί στροφορμή, δέν εἶναι. Οἱ τρεῖς πρῶτες λύσεις μποροῦν νά θεωρηθοῦν σάν μερικές περιπτώσεις τῆς Kerr-Newman black hole. Ἐπιπλέον, μιá συλλογική προσπάθεια πού ἄρχισε τό 1968 καί πρακτικά ὀλοκληρώθηκε τό 1975 (Robinson) ἀπόδειξε ὅτι οἱ παραπάνω τέσσερις λύσεις εἶναι οἱ μοναδικές πού περιγράφουν black holes στά πλαίσια τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας. Ἐτσι-πράγμα σπανιώτατο γιά τή σχετικότητα- ξέρουμε ἀναλυτικά ὄλες τίς λύσεις γιά black holes, οἱ ὁποῖες μάλιστα εἶναι ἀρκετά ἀπλές καί μποροῦν νά μελετηθοῦν ἀναλυτικά.

Τό γεγονός πῶς ἡ γενικότερη λύση black hole ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τίς τρεῖς παραμέτρους  $M$ ,  $J$  καί  $Q$  συνεπάγεται κάτι πολύ σημαντικό: Ὅλες οἱ πληροφορίες οἱ σχετικές μέ τό εἶδος τῆς ὕλης πού σχημάτισε τή black hole, τήν κατανομή τῆς, τίς ροπές ἀδρανείας τῆς, τίς λεπτομέρειες τῆς κατανομῆς τῆς στροφορμῆς, τῆς κατανομῆς τῶν φορτίων κλπ, χάνονται κατά τόν σχηματισμό τῆς black hole. Ἡ μόνη πληροφορία πού διατηρεῖται στό βαρυτικό (καί τό ἠλεκτρομαγνητικό, ὅταν ὕπάρχει μή μηδενικό φορτίο) πεδίο εἶναι ἡ πληροφορία γιά τήν ὀλική μάζα, τήν ὀλική στροφορμή καί τό ὀλικό φορτίο τῆς black hole. Τό συμπέρασμα αὐτό εὐφημιστικά ἀναφέρεται σάν τό "no hair theorem": Οἱ black holes δέν ἔχουν τρίχες!

Γιά τήν απλούστερη, τή Schwarzschild black hole, ή σχετικότητα προβλέπει ότι ή άκτίνα Schwarzschild καί ή όλική μάζα συνδέονται άκριβώς μέ τήν ίδια σχέση  $R_S = 2GM/c^2$  μέ τήν όποία συνδέονται καί στή Νευτώνεια θεωρία. Υπάρχει όμως καί μία θεμελιώδης διαφορά: Η σφαιρική επιφάνεια  $r = R_S$  είναι ένας άπόλυτος όρίζοντας γεγονότων στή σχετικότητα. Τίποτε δέν μπορεί νά φύγει, ούτε καί για λίγο, ούτε κι άν προσπαθούμε νά τό έκτοξεύσουμε άπό τήν επιφάνεια  $r = R_S$ . Οι black holes τής σχετικότητας είναι πραγματικές black holes. Για τίς άλλες τρεις λύσεις ό όρίζοντας γεγονότων είναι επίσης μία επιφάνεια μονής κατευθύνσεως ενώ ή "άκτίνα Schwarzschild" όρίζεται άπό μία σχέση λίγο πιο πολύπλοκη άπό τήν  $R_S = 2GM/c^2$ , πού έξαρτάται καί άπό τίς παραμέτρους  $J$  καί  $Q$ .

Τί υπάρχει στό έσωτερικό τής Schwarzschild black hole; Κατά τή σχετικότητα, στά σημεία A, B, C του σχήματος 10 δέν υπάρχει καθόλου μάζα· μόνο τό πεδίο βαρύτητας είναι αισθητό. Στο σημείο 0 όμως, τό κέντρο, προβλέπονται άπειρη πυκνότητα για τή μάζα καί άπειρη καμπυλότητα για τό χώρο, δηλαδή ένα σημείο άνωμαλίας (singularity) τής γεωμετρίας του χώρου. Τί σημαίνουν αυτά τά άπειρα; Α-



Σχ. 10

μαστε υπερβολικοί στίς άπαιτήσεις μας άπό τή σχετικότητα: Παρόμοια μέ όλες τίς φυσικές θεωρίες, καί για τή σχετικότητα υπάρχει ή περιοχή άποστάσεων για τίς όποιες ισχύει καί δεχόμαστε ότι δέν ισχύει, καί συνεπώς δέν πρέπει νά εφαρμοστεί, για  $r = 0$ . Από έπιχειρήματα πού βασίζονται κυρίως στίς ένοποιημένες θεωρίες των ύψηλών ένεργειών προκύπτει ότι ή σχετικότητα θα πρέπει νά αντικατασταθεϊ άπό μία, άγνωστη προς τό παρόν, κβαντική θεωρία βαρύτητας πού θα μπορεί νά περιγράψει τή βαρύτητα όταν ένδιαφερόμαστε για άποστάσεις τής τάξεως των  $10^{-33}$  cm. Για άπόλυτη σιγουριά άς θεωρήσουμε μία πολύ μεγαλύτερη άπόσταση, π.χ  $1 \text{ \AA}$ , καί άς προσδιορίσουμε άπ'έκει τό όριο εφαρμογής τής σχετικότητας: Για  $r > 1 \text{ \AA}$  ή σχετικότητα σίγουρα εφαρμόζεται, τήν έμπιστευόμαστε, καί προβλέπει τήν άνυπαρξία όποιασδήποτε μάζας.

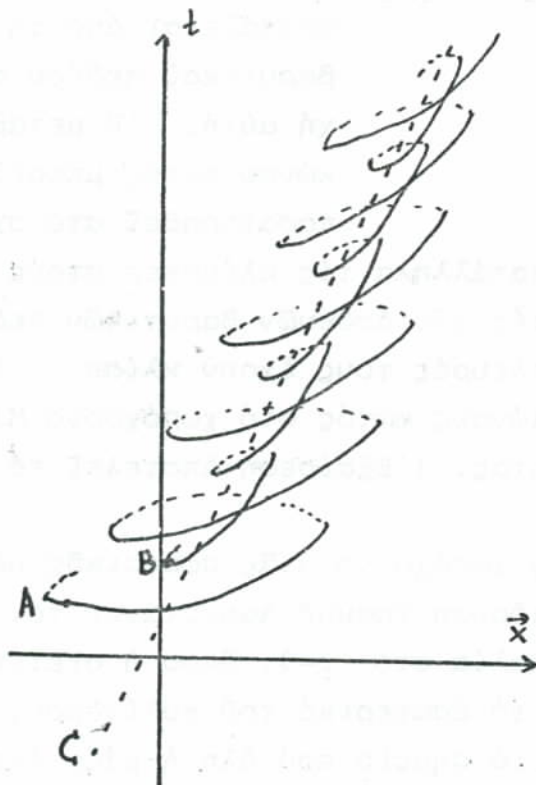
Για  $r < 1 \text{ \AA}$ , δέν έχουμε προς τό παρόν θεωρία. Φυσικά ή έννοια τής black hole, πού για άστρικές μάζες έχει μακροσκοπικές διαστάσεις,



μένει ανεπηρέαστη από την αδυναμία της θεωρίας να περιγράψει τη βαρύτητα με λεπτομέρειες της τάξεως των  $10^{-33}$  cm.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό της Schwarzschild black hole είναι πως όταν ένα σώμα περάσει τον ορίζοντα τότε, όχι μόνο δεν μπορεί να ξεναφύγει έξω, έστω και για λίγο, αλλά ούτε και να σταθεί δεν μπορεί σε μία σταθερή απόσταση  $r=a < R_S$  από το κέντρο, έστω κι αν διαθέτει όσοδηποτε ισχυρούς πυραύλους. Όπως στην καθημερινή μας ζωή δεν μπορούμε με τίποτε να συγκρατήσουμε την προς το μέλλον κίνησή μας στο χρόνο, έτσι και μέσα στη black hole δεν μπορούμε να σταματήσουμε την κίνησή μας προς το κέντρο. Αυτή η παρατήρηση είναι μία απλοϊκή εξήγηση του γεγονότος ότι οι ρόλοι του χώρου και του χρόνου εναλλάσσονται μέσα στη black hole. Στο σημείο αυτό αναφέρουμε ότι η διαδρομή από τον ορίζοντα μέχρι τις αποστάσεις που η θεωρία μας είναι παραδεκτή διανύεται σε χρόνο της τάξεως των  $10^{-5}$  sec. μόνο, σε μία  $1 M_{\odot}$  black hole.

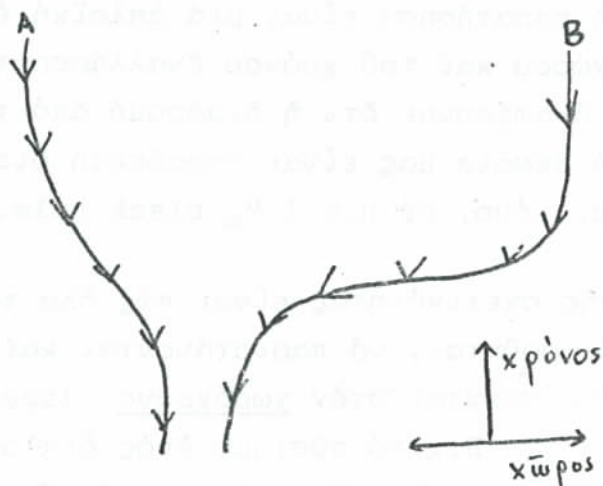
Μία βασική καινοτομία της σχετικότητας είναι πως όλα τα φυσικά συστήματα θά πρέπει να θεωρούνται, να παριστάνονται και να μελετώνται σαν συστήματα που εξελίσσονται στον χωρόχρονο (spacetime).



Σχ. 11

Π.χ το σύστημα ενός διπλού άστéρα δεν θά πρέπει πιά να περιγράφεται με το διάγραμμα χώρου του σχήματος 7, αλλά με το διάγραμμα χωρόχρονου του σχήματος 11: A και B είναι οι κοσμικές γραμμές (world lines) των δύο μελών του συστήματος και C η κοσμική γραμμή του κέντρου μάζας τους. Το κέντρο μάζας κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $(t, \vec{x})$ , και οι δύο άστéρες κινούνται κυκλικά γύρω από το κέντρο μάζης. Στα διαγράμματα χωρόχρονου ο κατακόρυφος άξονας πάντοτε παριστάνει τον χρόνο ενώ ο οριζόντιος παριστάνει τον χώρο στον οποίο τουλάχιστον μία συνήθως όμως και δύο διαστάσεις δεν δείχνονται.

Σέ κάθε σημείο του διαγράμματος δεχόμαστε πώς ξέρουμε τόν (μελλοντικό) κώνο φωτός (future light cone), πού δηλώνει τό διάγραμμα ενός σφαιρικού φωτεινού σήματος πού έκπέμφθηκε ίσοτροπικά άπ'τό σημείο αυτό. 'Η άρχή πώς όλα τά ύλικά σώματα κινούνται μέ ταχύτητα τό πολύ  $c$  έκφράζεται μέ τήν συνθήκη ότι, σέ κάθε σημείο του χωρόχρονου, τό έφαπτόμενο διάνυσμα στην κοσμική γραμμή κάθε συστήματος βρίσκεται μέσα στον αντίστοιχο κώνο φωτός· για συστήματα μηδενικής μάζας άδρανείας φυσικά τό έφαπτόμενο διάνυσμα κεΐται στον κώνο φωτός.



Σχ. 12

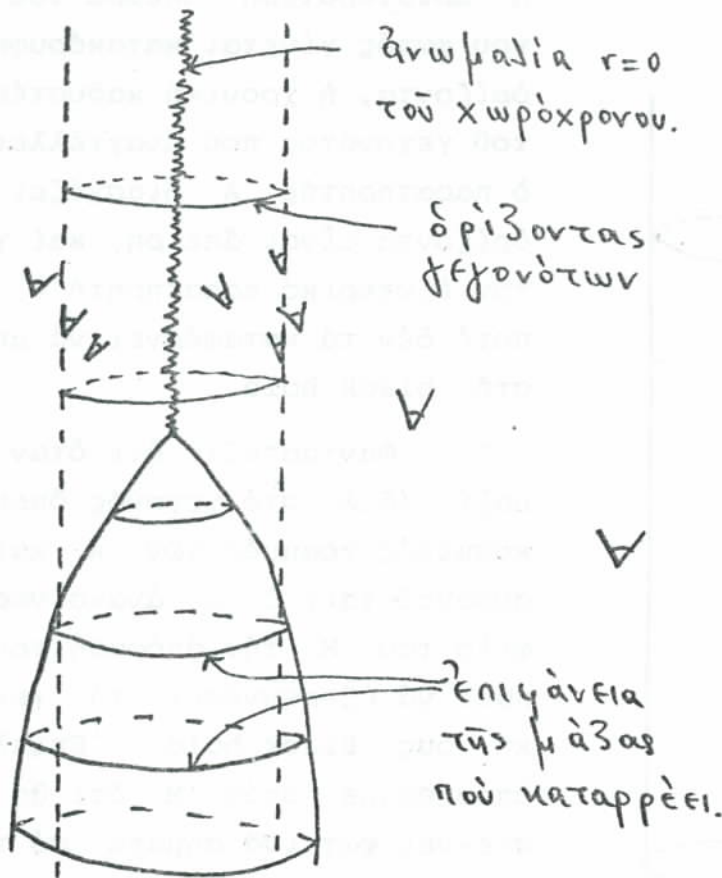
Π.χ. στό σχήμα 12 ή κοσμική γραμμή B δέν μπορεί νά είναι ή κοσμική γραμμή ενός φυσικού συστήματος.

Στή Γενική Σχετικότητα ό χωρόχρονος είναι καμπύλος, πού έκτός άπό πολλά άλλα σημαίνει καί πώς ή μορφή του κώνου φωτός μεταβάλλεται άπό σημείο σέ σημείο. 'Η μεταβολή αυτή του κώνου φωτός έπηρεάζεται άπό τή μορφή του βαρυτικού πεδίου στην περιοχή αυτή. 'Η μεταβολή του κώνου φωτός μπορεί π.χ. νά παρατηρηθεΐ στό σχήμα 12.

Εΐναι συνηθισμένο νά διαλέγουμε κατάλληλα τίς κλίμακες στους άξονες του χώρου καί χρόνου ώστε στις περιοχές των άσθενών βαρυτικών πεδίων οι κώνοι φωτός νά είναι κώνοι πού οι πλευρές τους έχουν κλίση  $45^\circ$  ως προς τήν κατακόρυφο, δηλαδή σαν τούς κώνους φωτός στό χωρόχρονο Minkowski της Εΐδικής Θεωρίας της Σχετικότητας. ('Εξαΐρεση άποτελεΐ τό σχήμα 11, για λόγους σχεδιάσεως).

Τό σχήμα 13 παριστάνει τόν χωρόχρονο μιΐς σφαιρικής μάζας πού καταρρέει. 'Η διακοπτόμενη κατακόρυφη γραμμή παριστάνει τόν όρίζοντα γεγονότων καί ή όδοντωτή τήν άνωμαλία στό  $r=0$ , όπου ή σχετικότητα δέν ισχύει. 'Η black hole είναι τό έσωτερικό του κυλίνδρου, άπό τόν όρίζοντα μέχρι τήν άνωμαλία, άπό τό σημείο πού όλη ή μάζα έχει περάσει μέσα στον όρίζοντα καί πάνω. Εΐναι πολύ σημαντικό νά κατανοηθεΐ ή μορφή των κώνων φωτός στις διάφορες περιοχές του διαγράμματος. 'Ο κώνος φωτός έφάπτεται στον όρίζοντα καί "άνοίγει" προς τό μέρος του χωρόχρονου τό έσωτερικό του όρίζοντα. "Αν καί στό σχήμα παριστάνεται σαν διδιάστατη, στην πραγματικότητα, στον χωρόχρονο ό όρίζοντας είναι μία





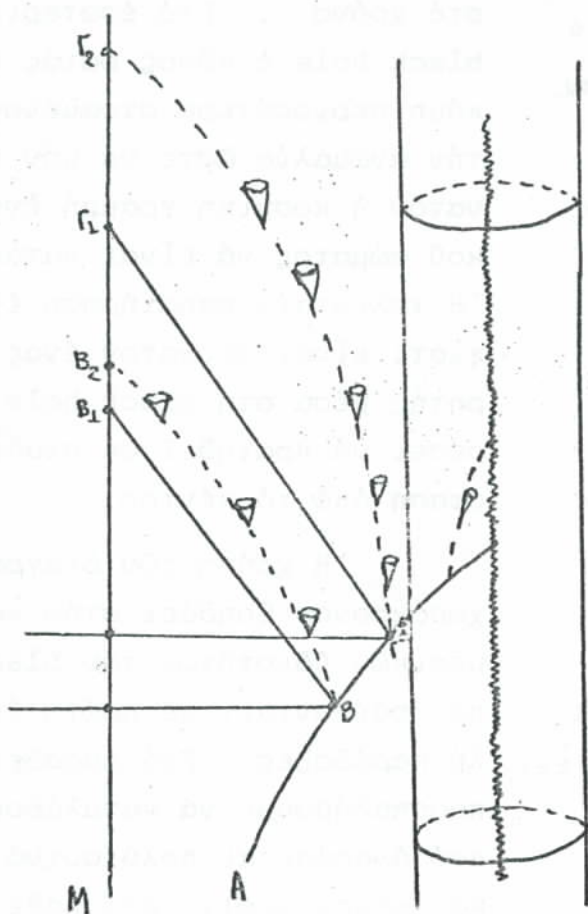
Σχ. 13

τρισδιάστατη επιφάνεια, ή επιφάνεια μιᾶς σφαίρας πού μεταφέρεται στο χρόνο. . Στο έσωτερικό τῆς black hole ὁ κῶνος φωτός εἶναι ἀκόμη περισσότερο στραμένος πρὸς τὴν ἀνωμαλία ὥστε νὰ μὴν εἶναι δυνατόν ἡ κοσμικὴ γραμμὴ ἑνὸς ὑλικοῦ σώματος νὰ εἶναι κατακόρυφη. Ἡ τελευταία παρατήρηση ἐξηγεῖ γιατί εἶναι ἀδύνατον ἕνας παρατηρητὴς μέσα στὴ black hole νὰ μπορέσει νὰ κρατηθεῖ σὲ σταθερὴ ἀπόσταση ἀπὸ τὸ κέντρο.

Ἡ χρῆση τῶν διαγραμμάτων χωρόχρονου βοηθάει στὴν κατανόηση μερικῶν ἰδιοτήτων τῶν black holes πού φαίνονται, σὲ πρώτη ἀποψη, πολὺ παράδοξες. Γιά παράδειγμα, ἄς προσπαθήσουμε νὰ καταλάβουμε κάτι πού ἀναφέρεται πολὺ συχνά (εἶναι καὶ σημαντικό): ὅτι κάθε παρατηρητὴς ἔξω ἀπὸ τὴ black hole βλέπει

πὼς κάθε σῶμα χρειάζεται ἀπειρο χρόνο γιὰ νὰ μπεῖ στὴ black hole.

Θεωροῦμε τὸν παρατηρητὴ  $A$  πού καθὼς πέφτει στὴ black hole στέλνει συνεχῶς φωτεινὰ σήματα πρὸς τὴν ἀντίθετη ἀπὸ τὴ black hole κατεύθυνση, στὸν ἀκίνητο παρατηρητὴ  $M$ . Ἡ πορεία τῶν φωτεινῶν ἀκτίνων καθορίζεται ἀπὸ τὴ μορφή τῶν κῶνων φωτός. Ἄν δὲν ὑπῆρχε τὸ βαρυτικὸ πεδίο τῆς black hole, τὰ σήματα πού στάλθηκαν κατὰ τὰ γεγονότα  $B$  καὶ  $\Gamma$  θὰ ἔφταναν στὸν  $M$  στὰ γεγονότα  $B_1$  καὶ  $\Gamma_1$ . Ἀντίθετα, στὴ παρουσία τῆς black hole, τὰ φωτεινὰ σήματα φτάνουν στὸν  $M$  κατὰ τὰ γεγονότα  $B_2$  καὶ  $\Gamma_2$ , δηλαδή πολὺ ἀργότερα. Εὐκόλα φαίνεται ἀπὸ τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 14 (μπορεῖ φυσικὰ νὰ ἀποδειχθεῖ καὶ ἀναλυτικὰ) ὅτι οἱ καθυστερήσεις λόγω τῆς βαρύτητας  $B_2-B_1$ ,  $\Gamma_2-\Gamma_1$ , κλπ., αὐξάνουν συνεχῶς καθὼς τὸ σημεῖο ἐκπομπῆς πλησιάζει πρὸς τὸν ὀρίζοντα, ἐπειδὴ ἡ "ἀριστερότερη" πλευρὰ τοῦ κῶνου φωτός πλησιάζει ὄλο καὶ περισσότερο πρὸς τὴν κατακόρυφο. Ἔτσι, ἡ περιοχὴ τοῦ κῶνου φωτός στὴν ὁποία πρέπει νὰ βρίσκεται ἡ κοσμικὴ γραμμὴ γιὰ νὰ ἀπομακρύνεται τὸ σῆμα ἀπὸ τὴ black hole μικραίνει συνεχῶς, μέ ἀποτέλεσμα νὰ πρέπει νὰ δαπανηθεῖ ὄλο καὶ περισσότερος χρόνος (δηλ. μετατόπιση πρὸς τὰ ἑπάνω) γιὰ νὰ ἐπιτευχθεῖ μιὰ ὀρισμένη μικρὴ χωρική μετατόπιση πρὸς τὰ ἀριστερά. Ἄφου λοιπὸν



Σχ. 14

σχeseή του και στέλνει τὰ σήματα άνελλιπώς. Ὁ Μ άπεναντίας παρατηρεϊ πώς τὰ χρονικά διαστήματα μεταξύ τών άφίξεων τών διαδοχικών σημάτων του Α, μεγαλώνουν συνεχώς και πώς πάντοτε, άν περιμένει άρκετά, άκολουθεϊ και έπόμενο σήμα από τόν Α. Πώς μπορεί νά έξηγήσει ο Μ αυτή τήν συμπεριφορά του Α, όταν είναι σίγουρος πώς ο Α ποτέ, έν γνώσει του, δέν θα είχε παραβεί τήν ύπόσχεσή του; Ἡ μοναδική έξηγήση είναι πώς ο χρόνος προχωρεϊ μέ πολύ σιγανότερο ρυθμό στη γειτονιά της black hole και πώς μάλιστα σταματά τελείως πάνω στον όριζοντα. Ἐνδέχεται άκόμη και νά ζηλέψει ο Μ τήν καλή τύχη του Α πού του έπιτρέπει νά ζήσει, φαντάζεται, μιά πολύ μεγαλύτερη ζωή. "Αδικα ζήλεψε! Ὁ Α αισθάνεται και παρατηρεϊ και μετρά πώς τὰ πάντα έξελίσσονται κανονικά, σε πεπερασμένο χρόνο. Μετρώντας τό χρόνο (σε δευτερόλεπτα) μέ τόν άριθμό τών σημάτων πού στέλνει βρίσκει πώς φτάνει στον όριζοντα σε πεπερασμένο χρόνο, τόν διασχίζει χωρίς νά αισθάνεται τίποτε τό ξεχωριστό, και πέφτει στην άνωμαλία  $r=0$  μέσα σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

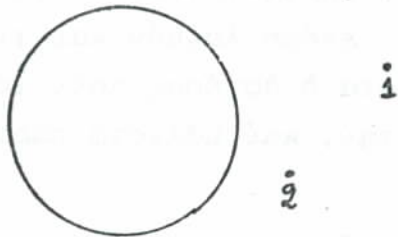
ή "άριστερότερη" πλευρά του κώνου φωτός γίνεται κατακόρυφη στον όριζοντα, ή χρονική καθυστέρηση του γεγονότος πού άναγγέλλει ότι ο παρατηρητής Α διασχίζει τόν όριζοντα είναι άπειρη, και για τόν έξωτερικό παρατηρητή ο Α ποτέ δέν τά καταφέρνει νά μπει στη black hole.

Φανταστεϊτε ότι όταν ήταν μαζί (δηλ. στο γεγονός όπου οι κοσμικές γραμμές τών Α και Μ συναντώνται) ο Α άνακοίνωσε στον φίλο του Μ τήν άπόφασή του νά πάει νά έξερευνησει τή γειτονική τους Black hole. Ἐπιπλέον ύποσχέθηκε στον Μ ότι θα του στέλνει φωτεινά σήματα σε τακτά χρονικά διαστήματα, π.χ. ένα κάθε δευτερόλεπτο, μέ τὰ όποια θα του άνακοινώνει τήν έκάστοτε θέση του. Ὁ Α τηρεϊ τήν ύπό-



Μέ τό ταξίδι του στή black hole κέρδισε τήν αιώνηότητά του στίς ζωές τών άλλων, όχι όμως καί γιά τόν ίδιο.

Έκτός του ότι άργούν τά σήματα του Α νά φτάσουν στον έξωτερικό παρατηρητή Μ, φτάνουν όλο καί μέ μικρότερη ενέργεια, μέ μικρότερη συχνότητα, δηλαδή φτάνουν όλο καί περισσότερο πιό μετατοπισμένα προς τό έρυθρό έξ αίτίας φαινόμενου Doppler. Μία εύκολη (Νευτώνεια) έξήγηση μπορεί νά δοθεϊ άν χρησιμοποιήσουμε τή σωματιδιακή φύση του φωτός. "Αν  $V_1$  καί  $V_2$  είναι ή δυναμική ενέργεια του φωτόνιου στά σημεία "1" καί "2" του βαρυτικού πεδίου, καί  $\nu_1$  καί  $\nu_2$  είναι οι αντίστοιχες συχνότητές του, ή διατήρηση τής ενέργειας δίνει  $h\nu_1 + V_1 = h\nu_2 + V_2$ . "Αρα, γιά  $V_1 > V_2$ ,  $\nu_1 < \nu_2$ .



Σχ. 15

Στήν πραγματικότητα, ή μετατόπιση προς τό έρυθρό όφείλεται στήν καθυστέρηση που ύφίστανται τά σήματα γιά νά φτάσουν στους έξωτερικούς παρατηρητές. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τήν έξήγηση γιά νά καταλήξουμε σ' ένα ποσοτικό συμπέρασμα.

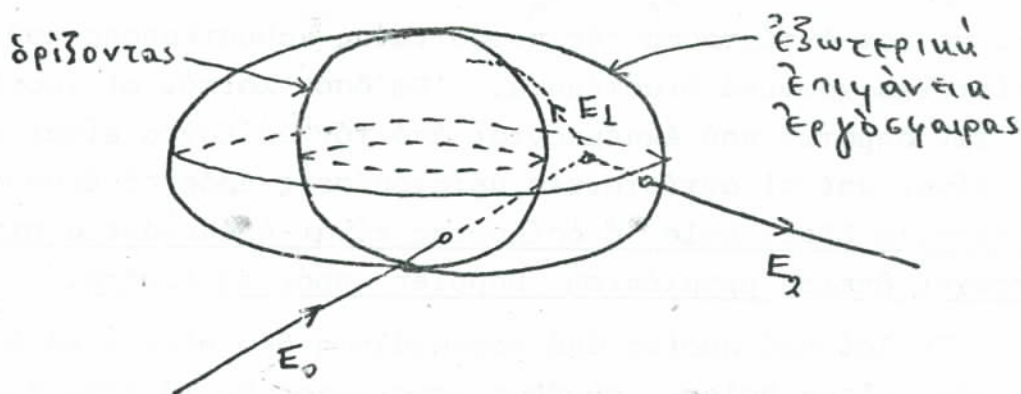
Θεωρούμε τήν κλασσική έξήγηση του φαινόμενου Doppler. 'Ο Α άπομακρύνεται από τόν Μ, στέλνοντας συνεχώς σήματα μέ συχνότητα  $\nu_A$ . Στο χρονικό διάστημα  $T_A$  όπως μετρά ό Α) στέλνει συνολικά  $\nu_A T_A$  παλμούς, που γίνονται δεκτοί από τόν Μ σέ χρονικό διάστημα  $T_M$ . Τό  $T_M$  είναι διαφορετικό από τό  $T_A$  ( $T_M > T_A$ ), λόγω τής απομάκρυνσης του Α. 'Η διατήρηση του συνολικού άριθμου τών παλμών άπαιτεί πώς  $\nu_A T_A = \nu_M T_M$ . Συνεπώς  $\frac{\nu_M}{\nu_A} = \frac{T_A}{T_M}$ , δηλαδή ό λόγος τών συχνοτήτων ίσοϋται μέ τόν αντίστροφο τής ποσοστιαίας καθυστέρησης που ύφίστανται τά αντίστοιχα χρονικά διαστήματα. 'Εφ'όσον λοιπόν οι χρονικές καθυστερήσεις τών σημάτων που έκπέμπονται από τόν όρίζοντα είναι άπειρες, άπειρες είναι καί οι αντίστοιχες μετατοπίσεις προς τό έρυθρό. Στή Schwarzschild black hole ό όρίζοντας είναι ή έπιφάνεια στήν όποία αντίστοιχεϊ άπειρη μετατόπιση Doppler προς τό έρυθρό.

Πολλοί που κυρίως από προκατάληψη δέν θέλουν νά δεχθούν τήν ύπαρξη τών black holes, συνήθως χρησιμοποιούν τό έξής έπιχείρημα: Στή φυσική ύπάρχουν μόνο τά αντικείμενα που μπορούν, τουλάχιστον θεωρητικά, πιθανόν έμμεσα, νά παρατηρηθούν (καί θεωρούνται διαφορετικές μόνον οι καταστάσεις που μπορούν νά διακριθούν). 'Εφ'όσον λοιπόν, κατά τήν κατάρρευση ενός άστέρα, ποτέ οι έξωτερικοί παρατηρητές δέν

βλέπουν τη λαμπρότητα του άστρα να μηδενίζεται - ίσοδύναμα, ποτέ δεν βλέπουν όλη τη μάζα του άστρα να περνά μέσα στον ορίζοντα - οι black holes ποτέ δεν προλαβαίνουν να σχηματιστούν. "Αν και τό επιχείρημα φαίνεται σωστό, νομίζω πώς μπορεί να αντικρουστεί χρησιμοποιώντας την ιδέα στην οποία στηρίζεται: 'Η λαμπρότητα της αστρικής ύλης που καταρρέει ελαττώνεται τόσο ώστε ο άστέρας πολύ σύντομα να γίνει άορατος εξ αιτίας της πολύ μεγάλης μετατόπισης Doppler προς τό έρυθρό που υφίστανται τά ηλεκτρομαγνητικά κύματα που ακτινοβολούνται από την έπιφάνεια του άστρα λίγο πιο έξω από τον ορίζοντα γεγονότων. Λεπτομερείς λογαριασμοί δείχνουν πώς ή ολική λαμπρότητα ελαττώνεται έκθετικά με ήμιχρονο ζωής περίπου  $10^{-5} (M/M_{\odot}) \text{ sec.}$  έτσι ώστε ο άστέρας, μετά από  $10^{-3} (M/M_{\odot}) \text{ sec.}$  άφ' ότου ή λαμπρότητά του έχει αρχίσει να ελαττώνεται, να γίνει, για κάθε πρακτικό λόγο, απόλυτα μαύρος. 'Ακόμη λοιπόν και για τόν παρατηρητή που θέλει να εξαφανιστεί απόλυτα ο άστέρας πριν τόν θεωρήσει black hole, ή black hole σχηματίζεται, και μάλιστα πάρα πολύ γρήγορα.

Οι σχετικιστικές black holes είναι ένα πεδίο όπου ή έρευνα συνεχίζεται και όπου καινούργιες ιδιότητες συνεχώς ανακαλύπτονται. Τελειώνοντας αναφέρουμε μερικές ακόμη ιδιότητές τους, που όλες σχεδόν έχουν ανακαλυφθεί μέσα στην τελευταία δεκαετία.

A. Έξαγωγή ενέργειας από black holes. "Αν και τίποτε δεν μπορεί να διαφύγει από τις black holes, έχει βρεθεί ένας πολύ έξυπνος μηχανισμός με τόν οποίο - χωρίς να παραβιάζεται καμιά από τις αρχές της σχετικότητας - ενέργεια μπορεί να αφαιρεθεί απ' αυτές.



Σχ. 16

'Ο μηχανισμός οφείλεται στον Penrose (1969), αναφέρεται συνήθως σαν ή Penrose process και εφαρμόζεται αποκλειστικά στις περιστρεφόμενες



Kerr και Kerr-Newman black holes. Σ'αυτές τις black holes υπάρχει μια περιοχή έξω από τον ορίζοντα, ή έργοσφαιρα (Σχήμα 16), στην οποία είναι δυνατές και τροχιές υλικών σωματιδίων με άρνητική ενέργεια. (Έργοσφαιρα δεν υπάρχει στις μη περιστρεφόμενες, σφαιρικά συμμετρικές black holes). Η μέθοδος του Penrose είναι η εξής: Σώμα συνολικής ενέργειας  $E_0$  εισέρχεται στην έργοσφαιρα όπου, μετά από έκρηξη που συμβαίνει σε κατάλληλη χρονική στιγμή, διασπάται σε δύο κομμάτια. Το ένα από τα δύο περνά τον ορίζοντα ακολουθώντας τροχιά άρνητικής ενέργειας  $E_1$ , ενώ το δεύτερο ακολουθεί τροχιά που το φέρνει έξω από τη black hole. Διατήρηση της ενέργειας στο σημείο της έκρηξης δίνει  $E_0 = E_1 + E_2$ . Έφ'όσον λοιπόν  $E_1 < 0$ , το δεύτερο κομμάτι απομακρύνεται με ενέργεια  $E_2$  περισσότερη από την αρχική. Λεπτομερείς λογαριασμοί έχουν δείξει ότι: Πρώτον, η ενέργεια που αφαιρείται από τη black hole είναι κυρίως κινητική ενέργεια με αποτέλεσμα, μετά από αρκετές εφαρμογές της μεθόδου του Penrose, η στροφορμή της black hole να ελαττώνεται, ή έργοσφαιρα να μικραίνει (και τελικά να εξαφανίζεται) και η μέθοδος να μην είναι πλέον εφαρμόσιμη. Καί δεύτερον, όταν οι διασπάσεις των σωματιδίων στην έργοσφαιρα συμβαίνουν τυχαία, ένα πολύ μικρό μόνο ποσοστό απ'αυτές δίνουν σωματίδια που διαφεύγουν με μεγαλύτερη ενέργεια από την αρχική. Έτσι η μέθοδος Penrose δεν φαίνεται να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην αστροφυσική για να εξηγηθούν οι τεράστιες εκλύσεις ενέργειας που παρατηρούνται σε μερικά αστροφυσικά φαινόμενα (π.χ Quasars). Αυτή η αδυναμία της φυσικά δεν ελαττώνει καθόλου το μεγάλο θεωρητικό ενδιαφέρον που παρουσιάζει η μέθοδος Penrose.

B. Θερμοδυναμική των black holes: Έχει αποδειχθεί τελείως γενικά ότι όταν μια black hole υποστεί μια οποιαδήποτε φυσική μεταβολή (π.χ πτώση ενός σώματος στη black hole, απορρόφηση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας) ή επιφάνεια του ορίζοντα της black hole μεγαλώνει ή παραμένει σταθερή· ποτέ δεν μικραίνει! Η επιφάνεια του ορίζοντα λοιπόν, σε πρώτη όψη, μοιάζει πολύ με την έντροπία ενός συστήματος. Η ομοιότητα αυτή είναι ακόμη βαθύτερη. Θεωρούμε ένα κλειστό φυσικό σύστημα που περιέχει και black holes. Άς είναι  $A$  η συνολική επιφάνεια των οριζόντων των black holes και  $S$  η συνολική έντροπία της ύλης και της ενέργειας του συστήματος που βρίσκεται έξω από τις black holes. Όταν κάποια μάζα πέσει στις black holes, η  $S$  ελαττώνεται και ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής παραβιάζεται. Συγχρόνως όμως αύξάνει η  $A$ . Για να συνδυαστούν οι δύο παραπάνω μεταβολές έχει προταθεί το γενικευμένο δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα: Κατά τις μεταβο-

λές ενός κλειστού φυσικού συστήματος ή γενικευμένη έντροπία του συστήματος

$$\xi = S + \left| \frac{\pi k c^3}{2 G h} \right| A \quad (14)$$

δέν ελαττώνεται. Στη σχέση (14),  $k$  είναι η σταθερή του Boltzman,  $h$  η σταθερή του Planck,  $G$  η σταθερή του Νεύτωνα και  $c$  η ταχύτητα του φωτός. Σέ όλα τά φυσικά συστήματα πού έχουν μελετηθεῖ, τό γενικευμένο δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα ισχύει. 'Επιπλέον υπάρχουν ισχυρές ένδείξεις (καί άποδείξεις σέ μερικές περιπτώσεις) πώς η καθολική ισχύς του γενικευμένου θερμοδυναμικού αξιώματος ίσοδυναμεί μέ μία άλλη είκασία πού γιά χρόνια παραμένει αναπόδεικτη στή σχετικότητα, τήν είκασία πώς όλες οι άνωμαλίες (singularities) του χωρόχρονου πού σχηματίζονται μετά από βαρυτική κατάρρευση περιβάλλονται από όρίζοντες γεγονότων (Cosmic Censor Hypothesis). 'Ο γενικευμένος δεύτερος νόμος τής θερμοδυναμικής, συνδυάζοντας σχετικότητα, θερμοδυναμική καί κβαντομηχανική, πιθανόν νά άποτελεῖ μία από τίς θεμελιώδους σημασίας ανακαλύψεις τής φυσικής τής δεκαετίας του έβδομήντα.

Γ. Θερμοκρασία τών black holes. 'Η παραδοχή τής ισχύος τής θερμοδυναμικής σχέσης  $dE = TdS$  (μεταβολή ένέργειας = θερμοκρασία επί τή μεταβολή τής έντροπίας) καί στίς μεταβολές πού ύφίστανται οι black holes μέ έντροπία  $\frac{\pi k c^3}{2 G h} A$  μπορεί νά χρησιμοποιηθεῖ γιά νά όριστεῖ η θερμοκρασία μιās black hole. Γιά τή Schwarzschild black hole βρίσκουμε

$$T = \frac{hc^3}{16\pi^2 k G} : \frac{1}{M} = \frac{6 \times 10^{-8}}{(M/M_{\odot})} \text{ } ^{\circ}\text{K.} \quad (15)$$

'Η θερμοκρασία μιās black hole είναι άντιστρόφως ανάλογη τής μάζας τής.

Δ. Διαταραχές τών black holes. Οι άναλυτικές έκφράσεις τών λύσεων πού περιγράφουν black holes στή σχετικότητα είναι άρκετά άπλές ώστε νά έπιτρέπουν τή μαθηματική άνάλυση τής θεωρίας διαταραχών πρώτης τάξεως. Πράγματι, γιά τίς Schwarzschild, Reissner-Nordström καί Kerr black holes, οι γενικότερες διαταραχές πρώτης τάξεως έχουν ήδη μελετηθεῖ άναλυτικά. 'Από τίς μελέτες αυτές έχουν προκύψει πολλά ένδιαφέροντα συμπεράσματα. Π.χ έχει βρεθεῖ πώς στήν Kerr black hole έμφανίζεται τό φαινόμενο τής ύπερακτινοβολίας (superradiance): Κύματα πού προσπίπτουν στή black hole μέ κατάλληλη συχνότητα καί χωρική έξάρτηση ανακλώνται μέ ένταση καί ένέργεια μεγαλύτερη από τήν είσερ-



χόμενη. Μ'αυτό τον τρόπο τό κύμα αφαιρεί κινητική ενέργεια από τήν black hole. Τό φαινόμενο τής υπερακτινοβολίας μπορεί νά παρατηρηθεί μόνο σέ black holes πού περιστρέφονται.

Ένα άλλο φαινόμενο πού προέκυψε από μελέτη διαταραχών πρώτης τάξεως είναι πώς, κατά τή σκέδαση βαρυτικών κυμάτων από τή Reissner-Nordström black hole, ένα μέρος τής ενέργειας πού ακτινοβολείται εκπέμπεται σάν ενέργεια ήλεκτρομαγνητικών κυμάτων, καί αντίθετα. Δυστυχώς τό ποσοστό τής ενέργειας πού μετατρέπεται από βαρυτική σέ ήλεκτρομαγνητική είναι πολύ μικρό ώστε ή ιδέα τής έμμεσης παρατήρησης βαρυτικών κυμάτων σάν μετατραπέντα ήλεκτρομαγνητικά δέν φαίνεται νά είναι πραγματοποιήσιμη.

Έπιπλέον έχει βρεθεί πώς ή μαθηματική ανάλυση τής θεωρίας διαταραχών τών black holes παρουσιάζει πολλές ομοιότητες μέ τή μαθηματική θεωρία τών σολιτονίων (solitons), αλλάδ βαθύς λόγος ύπόξεως τής ομοιότητας αύτης δέν είναι γνωστός.

Στίς μελέτες διαταραχών, ή Kerr-Newman black hole αποτελεί τή μεγάλη έξαιρέση. Γι'αυτήν, όλες σχεδόν οι ένδιαφέρουσες έρωτήσεις παραμένουν αναπάντητες, γιατί έχουν παρουσιαστεί αναπάντεχες δυσκολίες στή μελέτη τών έξισώσεων πού περιγράφουν τά διάφορα φυσικά φαινόμενα. Είναι φανερό πώς μιά καινούργια ιδέα απαιτείται γιά τή λύση καί τών προβλημάτων αύτων.

Έρευνα πάνω στίς διαταραχές τών black holes γίνεται καί στή Θεσσαλονίκη.

E. Συγκρούσεις black holes. Τό πρόβλημα τής μελέτης τής σύγκρουσης δύο black holes παρουσιάζει μεγάλο θεωρητικό καί άστροφυσικό ένδιαφέρον, ή δυσκολία του όμως είναι τόσο μεγάλη ώστε πός τό παρόν νά μελετάται μόνον άριθμητικά, μέ τή βοήθεια ήλεκτρονικών υπολογιστών. Θεμελιώδη έρωτήματα είναι τό ποσοστό τής συνολικής μάζας πού μετατρέπεται σέ ενέργεια κυμάτων βαρύτητας καί ή μορφή του φάσματος τών κυμάτων πού εκπέμπονται. Οι μέχρι τώρα λογαριασμοί δείχνουν πώς τό ποσοστό είναι πάρα πολύ μικρό, μικρότερο του 1% , καί πώς πιθανότατα αύξάνει σημαντικά αν οι δύο black holes ακολουθήσουν μιά σπειροειδή τροχιά πρίν πέσουν ή μιά στήν άλλη. Έπιπλέον ξέρουμε, από θεωρητικές μελέτες, πώς τό τελικό αποτέλεσμα θά είναι μιά μόνο black hole μέ έπιφάνεια ορίζοντα μεγαλύτερη από τό άθροισμα τών έπιφανειών τών οριζόντων τών αρχικών black holes.

Z. Φαινόμενο Hawking. Οι black holes πού μέχρι τώρα περιγράψαμε είναι οι black holes πού προβλέπει ή κλασσική σχετικότητα. "Αν και πρὸς τό παρόν δέν ὑπάρχει κβαντική θεωρία βαρύτητας, μπορούμε φυσικά νά μελετήσουμε τή συμπεριφορά μερικῶν κβαντισμένων πεδίων, π.χ., βαθμωτῶν ή ἠλεκτρομαγνητικῶν, στόν καμπύλο χῶρο πού δημιουργεῖται γύρω ἀπό μία black hole. Ἀπό τίς μελέτες αὐτές προέκυψε κάτι τό τελείως ἀναπάντεχο: κβαντομηχανικά οἱ black holes ἀκτινοβολοῦν σωματίδια μέ κατανομή μέλανος σώματος καί θερμοκρασία πού δίνεται ἀπό τή σχέση (15)! Ἡ ἀνακάλυψη αὐτή τοῦ Hawking (1974) δείχνει ἐπιπλέον πὼς ή θερμοκρασία πού ἀναφέραμε στό "Γ" εἶναι κάτι παραπάνω ἀπό τό συντελεστή ἀναλογίας τῆς σχέσεως  $dE = TdS$ , καί ἀρχίζουμε νά τή δεχόμαστε σάν τήν θερμοκρασία τῆς black hole. Ἐπειδή ή θερμοκρασία ἐλαττώνεται μέ τήν αὔξηση τῆς μάζας τῆς black hole, σημαντική εἶναι μόνο ή ἀκτινοβολία φωτονίων, κι αὐτή μόνο ἀπό μικρές black holes. Πάντως καθώς ή black hole ἀκτινοβολεῖ, ή μάζα της ἐλαττώνεται, ή θερμοκρασία της αὐξάνει, καί ή ἀκτινοβολία της συνεχίζεται μέ ἐντονότερο ρυθμό! Οἱ προβλέψεις τῶν προσεγγιστικῶν λογαριασμῶν πού πρὸς τό παρόν μόνο γίνονται εἶναι πὼς οἱ black holes ἐξαερῶνονται (evaporate) μέ μία ἔκρηξη κατὰ τίς τελευταῖες στιγμές τῆς ὑπαρξῆς τους. Ἡ (προσεγγιστική) κβαντομηχανική λοιπόν πού πρὸς τό παρόν διαθέτουμε προβλέπει πὼς καί οἱ black holes ἔχουν πεπερασμένη ζωή! Μόνο πού ή συνολική τους ζωή βρίσκεται πὼς εἶναι περίπου  $10^{66} (M/M_{\odot})^3$  ἔτη, δηλαδή πολλές-πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη ἀπό τήν ὀλική ἡλικία τοῦ σύμπαντος γιά τίς black holes μέ μάζες  $\sim 1 M_{\odot}$  πού προκύπτουν κατὰ τήν κατάρρευση ἀστέρων. Τό φαινόμενο Hawking ἄλλοιπὸν θά ἔχει ἀστροφυσική σημασία μόνον ἂν ὑπάρχουν καί μικρές black holes στό σύμπαν, μέ μάζα περίπου  $10^{15}$  gr, (γιά τίς ὁποῖες ή θεωρία προβλέπει ἀκτίνα περίπου 1 fermi, δηλ. περίπου σάν τήν ἀκτίνα ἑνός ἐλαφροῦ πυρήνα!) οἱ ὁποῖες θά ἔχουν ζωή ὅση περίπου καί ή ἡλικία τοῦ σύμπαντος καί αὐτό τόν καιρό θά ἐκρήγνυνται. Φυσικά δέν ξέρουμε κανένα φυσικό μηχανισμό σχηματισμοῦ τέτοιων black holes. Παρά ταῦτα, ή θεωρητική σημασία τοῦ φαινομένου Hawking εἶναι τεράστια γιατί μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν ἕνα πρῶτο βῆμα πρὸς τή δημιουργία μιᾶς κβαντικῆς θεωρίας τῆς βαρύτητας.