Μαθηματική εἰσαγωγή καί εἰδικά θέματα στή Γενική Θεωρία τῆς Σχετικότητας.

Ἐλεύθερα μαθήματα στό Ἐργαστήριο Ἀστρονομίας Α.Π.Θ.
Ἰανουάριος 1980 —

Βασίλης Ξανθόπουλος.

⟷

1. Εἰσαγωγή.

Στή θεωρητική φυσική μελετοῦμε διάφορες φυσικές θεωρίες, δηλαδή μοντέλα γιά τόν φυσικό κόσμο καί τά φυσικά φαινόμενα. Τά μοντέλα αὐτά εἶναι συνήθως γεωμετρικοί ἤ ἀλγεβρικοί χῶροι μέ ὁρισμένη μαθηματική δομή. Ὑποδομές σ' αὐτούς τούς χώρους (σημεῖα, καμπύλες, ἐπιφάνειες, τανυστικά πεδία, ἰδεώδη, ...) περιγράφουν διάφορες φυσικές ἔννοιες. Σάν παράδειγμα ἀναφέρουμε τόν χῶρο μορφῆς (configuration space), τῶν φάσεων (phase space) καί τόν χῶρο τῶν φυσικῶν καταστάσεων (space of states) τοῦ συστήματος. Τήν δομή σ' αὐτούς τούς χώρους τήν δίνει, τήν ἐπιβάλλει ὁ ἴδιος ὁ θεωρητικός φυσικός. Τό εἶδος τῆς δομῆς πού ἐπιβάλλει ἐξαρτᾶται ἀπό τό εἶδος τῆς μελέτης πού ἐπιθυμεῖ νά κάνει. Ἄς ἐξηγηθοῦμε λίγο καλύτερα.

Στή φυσική συνήθως μελετοῦμε Κινηματική καί Δυναμική. Στήν <u>κινηματική</u> ρωτοῦμε ἐρωτήσεις τῆς μορφῆς "ποῦ εἶναι τό σύστημα", "πότε δύο καταστάσεις τοῦ συστήματος εἶναι κοντά", "πῶς ἐξελίσσεται φαινομενολογικά τό σύστημα", "εἶναι τό σύστημα εὐσταθές" κ.λ.π., δηλαδή ρωτοῦμε μόνο <u>ποιοτικές</u> καί ὄχι <u>ποσοτικές</u> ἐρωτήσεις. Ἐκεῖνο λοιπόν πού χρειαζόμαστε εἶναι μία ἀκριβής, δηλ. μία μαθηματική ἔννοια πού νά ἐκφράζει τίς ἐμπειρικές ἔννοιες τοῦ "εἶναι κοντά" καί τοῦ "μεταβάλλεται συνεχῶς". Ἡ μαθηματική δομή πού διαθέτει αὐτές τίς ἱκανότητες εἶναι ἡ τοπολογία (topology). Γιά νά μελετήσουμε λοιπόν κινηματική δίνουμε στόν χῶρο μας τή δομή τοπολογικοῦ χώρου (topological space).

Ἡ κινηματική μελέτη μόνο δέν ἀποτελεῖ μία ἀρκετά ἱκανοποιητική μελέτη (καί κατανόηση) τοῦ φυσικοῦ κόσμου. Ὁ θεωρητικός φυσικός ψάχνει ἐπιπλέον γιά μερικούς λίγους καί "βασικούς" νόμους πού ἐξηγοῦν τή συμπεριφορά τῶν φυσικῶν συστημάτων καί πού ἔχουν τήν ἱκανότητα νά περιγράφουν τά φαινόμενα καί ποσοτικά. Αὐτή ἡ "βαθύτερη" μελέτη γίνεται μέ τή Δυναμική.

Ὁ Newton μᾶς ἔχει διδάξει ὅτι μία ἀρκετά ἀποτελεσματική μέθοδος γιά τή δυναμική περιγραφή τῶν συστημάτων εἶναι ἡ μέθοδος πού βασίζεται στόν διαφορικό καί ὁλοκληρωτικό λογισμό. Γιά νά διαφορίσουμε ὅμως ἡ συνέχεια δέν ἐπαρκεῖ. Ἀπαιτεῖται πρῶτα νά εἶναι κανείς σέ θέση νά ἀπαντήσει σέ ποσοτικές ἐρωτήσεις τῆς μορφῆς "πόσο κοντά", "πόσο γρήγορα μεταβάλλεται", "πόσο γρήγορα μεταβάλλεται πρός τήν τάδε κατεύθυνση" κ.λ.π. Ἡ μαθηματική δομή πού θεμελιώνει αὐτές τίς ἔννοιες εἶναι ἡ διαφορίσιμη πολλαπλότητα (differential manifold), πού ἐπιπλέον περιλαμβάνει καί τήν ἔννοια τῆς διάστασης (dimension).

Ὁ σκοπός αὐτῆς τῆς εἰσαγωγῆς ἦταν νά ἐπεξηγήσει τούς λόγους γιά τούς ὁποίους θά ἀναπτύξουμε τίς μαθηματικές ἔννοιες πού ἀκολουθοῦν.

2. Τοπολογικοί χώροι.

Ἀρχίζουμε μέ μερικές παρατηρήσεις πού ἀποτελοῦν καί τά κίνητρα (the motivation) γιά τόν ὁρισμό τοῦ τοπολογικοῦ χώρου.

Ἄς θεωρήσουμε τήν πραγματική εὐθεῖα $\mathbb{R}$ καί τά ἀνοιχτά διαστήματα $(a,b) = \{x \in \mathbb{R},\ a<x<b\}$. Κάθε σημεῖο τοῦ (a,b) ἔχει τήν ἰδιότητα ὅτι ἄν "διαταραχθεῖ λίγο" ἐξακολουθεῖ νά παραμένει μέσα στό ἀνοιχτό διάστημα (a,b). Ἀντίθετα, γιά κάθε ἀνοιχτό διάστημα (a,b) καί σημεῖο του $x \in (a,b)$, μποροῦμε νά θεωρήσουμε σάν τίς "ἐπιτρεπτές", τίς "μικρές" μεταβολές τοῦ x, ἐκεῖνες γιά τίς ὁποῖες τό x παραμένει μέσα στό (a,b). Θά δεχθοῦμε ὅτι αὐτή ἡ ἰδιότητα ἐκφράζει τίς ἔννοιες τῆς καθημερινῆς ζωῆς ὅτι τό σημεῖο "μετακινεῖται λίγο" ἤ "παραμένει κοντά" ἤ "μεταβάλλεται συνεχῶς", πάντοτε φυσικά ἀναφορικά μέ κάποιο ἀνοιχτό διάστημα τοῦ $\mathbb{R}$. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἕνωση ἀνοιχτῶν διαστημάτων ἔχει τήν ἴδια ἰδιότητα ἀλλά ὄχι καί κάθε τομή ἀνοιχτῶν διαστημάτων. Π.χ. ἡ τομή τῶν ἀνοιχτῶν διαστημάτων $I_n = \left(1-\frac{1}{n^2},\ 3+\frac{2}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ εἶναι $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [1,3]$.

Τό διάστημα $[1,3]$ περιέχει σημεῖα (τά 1 καί 3) μικρές διαταραχές τῶν ὁποίων δέν ἀνήκουν στό $[1,3]$. Ἀπό τήν ἄλλη μεριά, κάθε πεπερασμένη τομή ἀνοιχτῶν διαστημάτων εἶναι ἕνα ἀνοιχτό διάστημα καί κατά συνέπεια ἔχει τήν ἰδιότητα πού θεωροῦμε.

<u>Ορισμός:</u> Ἔστω σύνολο X. Ὀνομάζουμε <u>τοπολογία</u> στό X ἕνα σύνολο τ ὑποσυνόλων τοῦ X πού ἱκανοποιεῖ τίς ἑξῆς συνθῆκες:

i) <u>Κάθε ἕνωση</u> ὑποσυνόλων πού ἀνήκουν στό τ εἶναι ὑποσύνολο πού ἀνήκει στό τ.

$$\left[A_j \in \tau \quad \forall j \in J \Longrightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \tau \right].$$

ii) Ἡ <u>τομή δύο</u> ὑποσυνόλων πού ἀνήκουν στό τ εἶναι ὑποσύνολο πού ἀνήκει στό τ.

$$\left[A_1 \in \tau, \ A_2 \in \tau \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau \right].$$

iii) Τά σύνολα $\emptyset$ (τό κενό σύνολο) καί X ἀνήκουν στό τ.

Προφανῶς ἡ δεύτερη συνθήκη συνεπάγεται ὅτι κάθε πεπερασμένη τομή ὑποσυνόλων πού ἀνήκουν στήν τ εἶναι ἕνα ὑποσύνολο πού ἀνήκει στήν τ.

Τό ζεῦγος (X, τ) πού ἀποτελεῖται ἀπό τό σύνολο X καί μία τοπολογία τ στό X λέγεται <u>τοπολογικός χῶρος</u>.

<u>Ορισμός:</u> Τά στοιχεῖα τοῦ τ ὀνομάζονται <u>ἀνοιχτά σύνολα</u> τοῦ X.

<u>Παράδειγμα 1ον:</u> Στό σύνολο $X = \{a, b, c, d, e\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$ εἶναι μία τοπολογία.

$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$ καί

$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c,d\}, \{b,c,d\}\}$

εἶναι ἐπίσης τοπολογίες. Εἶναι λοιπόν δυνατόν νά ἔχουμε πολλές διαφορετικές τοπολογίες σέ κάποιο σύνολο. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ τ εἶναι ὑποσύνολο τῆς τ_1 ἐνῶ οἱ τ καί τ_2 δέν συνδέονται μέ τή σχέση τοῦ "περιέχεσθαι".

Παράδειγμα 2ον: Ἔστω $\mathbb{R}$ τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἕνα ὑποσύνολο A τοῦ $\mathbb{R}$ θά τό ὀνομάσουμε α-σύνολο ἐάν ἔχει τήν ἑξῆς ἰδιότητα: Γιά κάθε σημεῖο $x \in A$ ὑπάρχει θετικός ἀριθμός $\varepsilon > 0$ τέτοιος ὥστε ὅλοι οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x' πού ἱκανοποιοῦν τήν $|x-x'| < \varepsilon$ νά ἀνήκουν στό A. Θά ἀποδείξουμε ὅτι τό σύνολο τῶν α-συνόλων ἀποτελεῖ μία τοπολογία στό $\mathbb{R}$. Τό κενό σύνολο $\emptyset$ (δέν περιλαμβάνει κανένα στοιχεῖο καί συνεπῶς δέν ἔχουμε τίποτε νά ἐλέγξουμε) καί $\mathbb{R}$ (περιλαμβάνει ὁποιοδήποτε x') εἶναι α-σύνολα. Ἄς θεωρήσουμε τά α-σύνολα A_j, $j \in J$ καί ἔστω $x \in \bigcup_{j\in J} A_j$. Ἄρα ὑπάρχει $j_0 \in J$ ὥστε $x \in A_{j_0}$. Ἀφοῦ τό A_{j_0} εἶναι α-σύνολο, ὑπάρχει $\varepsilon > 0$ ὥστε ὅλα τά x' πού ἱκανοποιοῦν τήν $|x'-x| < \varepsilon$ νά ἀνήκουν στό A_{j_0}, ἄρα καί στό $\bigcup_{j\in J} A_j$. Συνεπῶς τό $\bigcup_{j\in J} A_j$ εἶναι α-σύνολο. Τελικά ἄς εἶναι A_1 καί A_2 α-σύνολα καί ἔστω $x \in A_1 \cap A_2$. Αὐτό συνεπάγεται ὅτι $x \in A_1$ καί $x \in A_2$, γιά τά ὁποῖα ξέρουμε ὅτι ὑπάρχουν $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ τέτοια ὥστε $|x'-x| < \varepsilon_1 \Rightarrow x' \in A_1$ καί $|x''-x| < \varepsilon_2 \Rightarrow x'' \in A_2$. Διαλέγουμε τόν ε ἴσο πρὸς τὸν μικρότερο τῶν ϵ_1 καὶ ϵ_2. Προφανῶς ὅλα τὰ x' ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν $|x'-x|<\epsilon$ ἀνήκουν καὶ στὰ δύο, A_1 καὶ A_2, ἄρα καὶ στὴ τομή τους $A_1 \cap A_2$, δηλ. ἀποδείξαμε ὅτι τὸ $A_1 \cap A_2$ εἶναι ἕνα α-σύνολο. Τὰ α-σύνολα λοιπὸν ἀποτελοῦν μία τοπολογία στὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Θὰ τὴν συμβολίσουμε τ_E. Ὁ τοπολογικὸς χῶρος $(\mathbb{R}, \tau_E)$ λέγεται <u>Εὐκλείδειος τοπολογικὸς χῶρος</u>. Τὴν ὁρολογία α-σύνολα δὲν θὰ τὴν ξαναχρησιμοποιήσουμε. Χωρὶς κανένα κίνδυνο σύγχυσης μποροῦμε πλέον νὰ τὰ ὀνομάζουμε ἀνοιχτὰ σύνολα.

Μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι τὸ σύνολο ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ $\emptyset$, $\mathbb{R}$, ὅλα τὰ ἀνοιχτὰ διαστήματα (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$ καὶ ὅλες τὶς δυνατὲς ἑνώσεις ἀνοιχτῶν διαστημάτων συμπίπτει μὲ τὸ σύνολο τ_E. Ὁ Εὐκλείδειος τοπολογικὸς χῶρος μπορεῖ λοιπὸν νὰ ὁρισθεῖ, ἰσοδύναμα, καὶ μὲ τὴ βοήθεια τῶν ἀνοιχτῶν διαστημάτων.

<u>Παράδειγμα 3ον</u>: Ἔστω $X = \mathbb{R}$ καὶ
$\tilde{\tau} = \{ \emptyset, \mathbb{R}$, ὅλα τὰ ἀνοιχτὰ διαστήματα τῆς μορφῆς
$E_a = (a, \infty)$, $\forall a \in \mathbb{R} \}$. $(\mathbb{R}, \tilde{\tau})$ εἶναι τοπολογικὸς χῶρος. Πράγματι, $E_a \cap E_b = E_{\max\{a,b\}}$. Γιὰ τὴν ἕνωση τῶν E_a, $a \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ παρατηροῦμε ὅτι $\bigcup_{a\in\Lambda} E_a = \mathbb{R}$ ἐὰν $\inf\{a, a\in\Lambda\} = -\infty$ καὶ $\bigcup_{a\in\Lambda} E_a = E_k$ ἐὰν $\inf\{a, a\in\Lambda\} = k \in \mathbb{R}$, δηλ. ἀνήκει πάντοτε στὴν $\tilde{\tau}$.

Ἄς συγκρίνουμε λίγο τίς τοπολογίες τ_E καί $\tilde{\tau}$ τοῦ $\mathbb{R}$. Ἡ τ_E ἔχει πολύ περισσότερα ἀνοιχτά σύνολα ἀπό τήν $\tilde{\tau}$, $\tilde{\tau} \subsetneq \tau_E$ (γνήσιο ὑποσύνολο), μπορεῖ λοιπόν νά πεῖ κανείς ὅτι ἡ τ_E εἶναι "ἰσχυρότερη" ἀπό τήν $\tilde{\tau}$. Θά παρουσιάσουμε τώρα ἐπιχειρήματα πού προσπαθοῦν νά πείσουν ὅτι ἡ τ_E ἔχει μεγαλύτερη "διακριτική ἱκανότητα" ἀπό τήν $\tilde{\tau}$ καί ὅτι εἶναι ἰσχυρότερη ἀπό τήν $\tilde{\tau}$ γιά ἕνα πολύ πιό θεμελιώδη λόγο.

Φανταζόμαστε ὅτι μία τοπολογία ἔχει τήν δυνατότητα νά περιορίζει τήν ἐλευθερία τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου X μέ τόν ἑξῆς μηχανισμό: ὅταν διαλέξει κάποιο ἀνοιχτό σύνολο πού περιέχει ἕνα στοιχεῖο, στό στοιχεῖο αὐτό ἀπομένει μόνον ἡ ἐλευθερία νά κινεῖται μέσα σ' αὐτό τό ἀνοιχτό σύνολο (τό κελλί του). Ἐπίσης φανταζόμαστε ὅτι ἡ τοπολογία ἔχει τήν δυνατότητα νά διακρίνει δύο στοιχεῖα τοῦ X ἐάν ἔχει τήν δυνατότητα νά τά περιορίσει σέ δύο κελλιά πού δέν ἔχουν κανένα κοινό στοιχεῖο. Μ' αὐτές τίς πρακτικές ἔννοιες στό νοῦ λοιπόν εἶναι φανερό ὅτι ἡ τοπολογία τ_E, ἐπειδή διαθέτει γύρω ἀπό κάθε στοιχεῖο ἀνοιχτά σύνολα ὁσονδήποτε μικρά, ἔχει τήν δυνατότητα νά περιορίσει κάθε σημεῖο ὅσο θέλει καί τήν δυνατότητα νά διακρίνει δύο στοιχεῖα τοῦ X πού κεῖνται ὁσοδήποτε κοντά. Παρόμοια πράγματα δέν συμβαίνουν καί μέ τήν τοπολογία $\tilde{\tau}$.

Ἐπειδή ὅλα τά κελλιά πού διαθέτη ἡ $\tilde{\tau}$ εἶναι τῆς μορφῆς (a, ∞), $a \in \mathbb{R}$, ἡ $\tilde{\tau}$ ἔχει τήν δυνατότητα νά περιορίσει τήν ἐλευθερία τῶν στοιχείων τοῦ $\mathbb{R}$ "ὅσο θέλει πρός τά ἀριστερά" καί "καθόλου πρός τά δεξιά". Ἐπίσης, ἐπειδή ὅλα τά κελλιά τῆς $\tilde{\tau}$ ἔχουν πάντοτε μερικά κοινά στοιχεῖα, ἡ $\tilde{\tau}$ ἀδυνατεῖ νά διακρίνει δύο οποιαδήποτε διαφορετικά σημεῖα. (Τό κενό σύνολο δέν μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ἀπό τήν τοπολογία σάν κελλί).

Ὁρισμός: τ_1 καί τ_2 τοπολογίες στό σύνολο X. Ἐάν $\tau_1 \subset \tau_2$, ἡ τ_1 λέγεται *τραχύτερη* (coarser) ἀπό τήν τ_2 καί ἡ τ_2 λέγεται λεπτότερη (finer) ἀπό τήν τ_1.

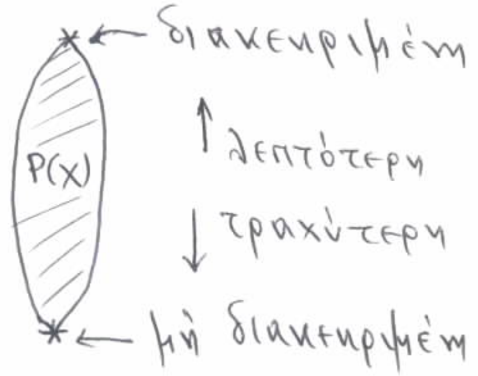
Παράδειγμα 4ον: Στό σύνολο X, ἡ τ ἀποτελεῖται ἀπ' ὅλα τά ὑποσύνολα τοῦ X. Λέγεται ἡ *διακεκριμένη* (discrete) τοπολογία στό X. Πολλές φορές συμβολίζεται καί $\tau = 2^X$.

Παράδειγμα 5ον Στό σύνολο X ὁρίζουμε $\tau = \{\emptyset, X\}$. Αὐτή λέγεται ἡ *μή διακεκριμένη* (indiscrete) τοπολογία τοῦ X.

Οἱ παρατηρήσεις τῆς προηγούμενης σελίδας δικαιολογοῦν τούς ὅρους διακεκριμένη καί μή διακεκριμένη. Πιθανόν καί νά μᾶς ἐπιτρέπουν νά ὀνομάζουμε τήν δεύτερη καί "ἀδιάκριτη τοπολογία".

Θά τελειώσουμε αὐτή τήν ἑνότητα μέ τή μελέτη ὅλων τῶν δυνατῶν τοπολογιῶν στό σύνολο X.

Ἔστω X ἕνα σύνολο καί $P(X)$ τό σύνολο τῶν ὑποσυνόλων τοῦ X πού ἱκανοποιοῦν τά τρία ἀξιώματα γιά νά ἀποτελοῦν μία τοπολογία στό X. Ἔτσι, κάθε στοιχεῖο τοῦ $P(X)$ εἶναι μία τοπολογία στό X. Ἡ σχέση τοῦ περιέχεσθαι $\tau_1 \leq \tau_2$ ἐάν $\tau_1 \subset \tau_2$ εἶναι μία σχέση μερικῆς διάταξης στό X.



Τό διάγραμμα ἀριστερά εἶναι ἀρκετά παραστατικό. Οἱ ἐνδιαφέρουσες τοπολογίες, δηλαδή αὐτές πού περιέχουν κάποια χρήσιμη πληροφορία, εἶναι οἱ τοπολογίες πού βρίσκονται κάπου στή μέση τοῦ διαγράμματος. Εἶναι εὔκολο νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

<u>Πρόταση:</u> Ἐάν τ_j, $j \in J$ εἶναι τοπολογίες στό σύνολο X, τότε $\bigcap_{j \in J} \tau_j = \tau$ εἶναι ἐπίσης τοπολογία στό X. Προφανῶς ἡ τ εἶναι τραχύτερη ἀπ' ὅλες τίς τ_j. Εἶναι ἡ λεπτότερη τοπολογία πού εἶναι τραχύτερη ἀπ' ὅλες τίς τ_j.

Προσοχή! Ἡ ἕνωση δύο τοπολογιῶν δέν εἶναι ἐν γένει τοπολογία.

3. Τοπολογία (ΙΙ).

Ἡ ἔννοια τοῦ τοπολογικοῦ χώρου εἶναι τόσο γενική (χρησιμοποιεῖ ἁπλῶς τυχαῖα σύνολα καὶ ὁρίζει ἕνα ὑποσύνολά τους!) ὥστε νὰ εἶναι ἀρκετὰ δύσκολο νὰ ἀναπτύξη κανεὶς πολλὴ δομὴ σ' αὐτούς. Ἡ συνηθισμένη ἀντίδραση τῶν μαθηματικῶν σὲ μία τόσο γενική ἔννοια εἶναι νὰ ἐπιβάλλουν ἐπιπλέον συνθῆκες καὶ νὰ μελετοῦν αὐτοὺς τοὺς ἐξειδικευμένους τοπολογικοὺς χώρους. Ἔχει σχηματισθεῖ λοιπὸν ἕνας πρακτικὰ ἀτέλειωτος, κατάλογος ἰδικῶν (καὶ ἀρκετὰ ἐξωτικῶν πολλὲς φορὲς) τοπολογικῶν χώρων. Ἐμεῖς θὰ προσπαθήσουμε νὰ κρατήσουμε γιὰ ὁδηγό μας τὴ φυσικὴ γιὰ νὰ μὴν παρασυρθοῦμε σ' αὐτὴ τὴ δίνη: στοὺς τοπολογικοὺς χώρους ποὺ θὰ χρησιμοποιήσουμε θὰ ἐπιβάλλουμε τρεῖς ἐπιπλέον συνθῆκες ποὺ ὑπαγορεύονται ἀπὸ φυσικὲς θεωρήσεις.

Ἀρχίζουμε μὲ μερικοὺς ὁρισμούς.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἔστω (X,τ) τοπολογικὸς χῶρος. Τὸ σύνολο A λέγεται <u>κλειστό</u> ἐὰν τὸ συμπληρωματικό του σύνολο $A^c = X - A = \{x \in X \text{ ὅπου } x \notin A\}$ εἶναι ἀνοιχτό.

Π.χ. στὸν $(\mathbb{R}, \tau_E)$ τὸ σύνολο $\mathbb{Z}$ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀποτελεῖ ἕνα κλειστὸ σύνολο.

<u>Παρατηρήσεις:</u> i) Χρησιμοποιώντας τὶς σχέσεις τοῦ De Morgan $(\bigcup_j A_j)^c = \bigcap_j (A_j^c)$ καὶ $(\bigcap_j A_j)^c = \bigcup_j (A_j^c)$ εὔκολα παίρνουμε τὶς βασικὲς ἰδιότητες τῶν κλειστῶν συνόλων: Τὸ ϕ καὶ τὸ X

εἶναι κλειστὰ σύνολα, κάθε πεπερασμένη ἕνωση κλειστῶν συνόλων εἶναι κλειστὸ σύνολο, κάθε τομὴ κλειστῶν συνόλων εἶναι κλειστὸ σύνολο.

ii) Θὰ μποροῦσε νὰ πεῖ κανεὶς ὅτι ἡ ὁρολογία ἀνοιχτὰ καὶ κλειστὰ σύνολα εἶναι τελείως ἀνεπιτυχής. Ὑπάρχουν σύνολα ποὺ εἶναι συγχρόνως ἀνοιχτὰ καὶ κλειστὰ (π.χ. ϕ, X) καὶ ἄλλα ποὺ δὲν εἶναι οὔτε ἀνοιχτὰ οὔτε κλειστὰ (π.χ. $(0,2]$ ἢ $(0,1)\cup[2,3]$ στὴν $(\mathbb{R},\tau_E)$).

<u>Ὁρισμός:</u> Ἔστω (X,τ) τοπολογικὸς χῶρος καὶ σημεῖο $x\in X$. Τὸ ὑποσύνολο Π τοῦ X λέγεται <u>περιοχὴ</u> τοῦ x ἐὰν ὑπάρχει ἀνοιχτὸ σύνολο A $(A\in\tau)$ ποὺ περιέχει τὸ x καὶ περιέχεται στὸ Π.

$$[\,\{x\}\subset A\subset \Pi\,].$$

Ἡ ἔννοια τῆς περιοχῆς ἔχει εἰσαχθεῖ στὴν τοπολογία γιὰ νὰ ἐκφράσει τὸ "ἀρκετὰ κοντὰ" χρησιμοποιώντας ὅμως οἱαδήποτε σύνολα, ὄχι ἀναγκαστικὰ ἀνοιχτά.

<u>Ὁρισμός:</u> Ὁ τοπολογικὸς χῶρος (X,τ) λέγεται τοπολογικὸς χῶρος τοῦ <u>Hausdorff</u> ἐὰν γιὰ κάθε ζεῦγος διαφορετικῶν σημείων τοῦ X, $x,y\in X$, $x\neq y$, ὑπάρχουν δύο ἀνοιχτὰ σύνολα $A_x\ni\{x\}$ καὶ $A_y\ni\{y\}$ τέτοια ὥστε $A_x\cap A_y=\phi$.

Ἡ ἰδέα τοῦ τοπολογικοῦ χώρου Hausdorff εἶναι ὅτι ἡ τοπολογία εἶναι ἀρκετὰ λεπτή, δηλ. περιλαμβάνει ἀρκετὰ ἀνοιχτὰ σύνολα, ὥστε νὰ μπορεῖ νά ξεχωρίσει δύο ὁποιαδήποτε διαφορετικά σημεῖα. Hausdorff εἶναι ἡ διακριτική ἱκανότητα πού συνήθως ἀπαιτοῦμε νά ἔχουν οἱ τοπολογίες πού χρησιμοποιοῦμε στή φυσική. Προφανῶς, ἐάν ἡ τοπολογία τ εἶναι Hausdorff, κάθε τοπολογία λεπτότερη τῆς τ εἶναι ἐπίσης Hausdorff.

Παράδειγμα: Ἐάν τό σύνολο X ἔχει δύο τουλάχιστον στοιχεῖα καί τ εἶναι ἡ μή διακεκριμένη τοπολογία στό X, ἡ τοπολογία δέν εἶναι Hausdorff, ἀφοῦ τό μόνο ἀνοιχτό σύνολο πού περιέχει κάποιο στοιχεῖο τοῦ X εἶναι τό ἴδιο τό σύνολο X.

Παράδειγμα: Ὁ τοπολογικός χῶρος $(X, \tilde{\tau})$ τοῦ τρίτου παραδείγματος στή σελίδα 6 δέν εἶναι Hausdorff.

Ἡ ἑπόμενη ἔννοια πού θά ἀναπτύξουμε εἶναι ἡ ἔννοια τῆς συνέχειας. Θυμηθεῖτε ὅτι στά γενικά μαθηματικά τοῦ πρώτου ἔτους ἡ συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται συνεχής στό σημεῖο $x_0 \in \mathbb{R}$ ἐάν $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ τέτοιο ὥστε $|x - x_0| < \delta$ νά συνεπάγεται ὅτι $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Χρησιμοποιώντας τήν ἔννοια τῆς περιοχῆς ἡ ἴδια ἰδιότητα ἐκφράζεται ἰσοδύναμα καί ὡς ἑξῆς: Ἡ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται συνεχής στό $x_0 \in \mathbb{R}$ ἐάν γιά κάθε περιοχή $M = (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ τοῦ $f(x_0)$ ὑπάρχει περιοχή $N = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ τοῦ x_0 τέτοια ὥστε $f(N) \subset M$. Αὐτή τήν ἰδιότητα θά πάρουμε σάν τόν ὁρισμό τῆς συνέχειας.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἄς εἶναι (X, τ_x) καί (X, τ_y) τοπολογικοί χῶροι καί ἡ ἀπεικόνιση $f : X \ni x \longrightarrow f(x) \in Y$. Ἡ f λέγεται <u>συνεχής</u> στό $x_0 \in X$ ἐάν γιά κάθε περιοχή (ἀναφορικά μέ τήν τοπολογία τ_y) M τοῦ $f(x_0)$ ὑπάρχει περιοχή N τοῦ x_0 (ἀναφορικά μέ τήν τ_x) ὥστε $f(N) \subset M$.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἡ $f : X \longrightarrow Y$ λέγεται συνεχής (continuous) ἐάν εἶναι συνεχής στό x_0 $\forall x_0 \in X$.

Θά χρειασθοῦμε λίγο συμβολισμό γιά νά ἀναπτύξουμε λίγο παραπάνω τήν ἔννοια τῆς συνέχειας. Ἔστω $f : A \longrightarrow B$ μία ἀπεικόνιση συνόλων (θεωροῦμε πάντοτε μονότιμες ἀπεικονίσεις). Ἐάν $K \subset A$,

$f(K) = \{ b \in B$ τέτοιο ὥστε $\exists\, a \in K$ ὥστε $f(a) = b \}$ λέγεται <u>εἰκόνα</u> (range ἤ image) τοῦ K. Ἐάν $\Lambda \subset B$,

$f^{-1}(\Lambda) = \{ a \in A$ τέτοιο ὥστε $f(a) \in \Lambda \}$ λέγεται <u>ἀντίστροφη εἰκόνα</u> (inverse image) τοῦ Λ. Προσοχή, ἡ f^{-1} ἐν γένει δέν εἶναι συνάρτηση. Εἶναι εὔκολο νά ἀποδειχθῆ ὅτι

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad , \quad f^{-1}(B) = A \quad ,$$

$$f^{-1}(\Lambda^c) = [f^{-1}(\Lambda)]^c , \quad f^{-1}\Big(\bigcup_j \Lambda_j\Big) = \bigcup_j [f^{-1}(\Lambda_j)] ,$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_j \Lambda_j\Big) = \bigcap_j [f^{-1}(\Lambda_j)]$$

, ὅπου Λ_j καί Λ εἶναι τυχαῖα ὑποσύνολα τοῦ B. Πρακτικά, γιά τίς ἀντίστροφες εἰκόνες ὅλες οἱ "προφανεῖς" ταυτότητες εἶναι σωστές. Γιά τίς εἰκόνες συνόλων ἡ κατάσταση δέν εἶναι τόσο ὄμορφη. Εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι

$f(\emptyset) = \emptyset$ καί $f\Big(\bigcup_j K_j\Big) = \bigcup_j [f(K_j)]$, ἐνῶ ἐν γένει <u>δέν</u> εἶναι σωστό ὅτι $f(K^c) = [f(K)]^c$,

$f(B) = A$ καί $f\Big(\bigcap_j K_j\Big) = \bigcap_j [f(K_j)]$.

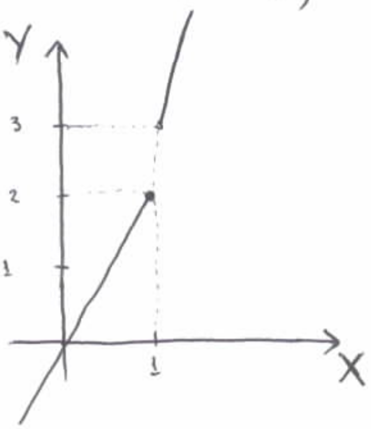
Ξαναγυρίζουμε τώρα στή μελέτη τής συνέχειας. Εἶναι εὔκολο νά ἀποδειχθεῖ (δοκιμάστε το!) ὅτι:

<u>Θεώρημα:</u> Ἡ $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ εἶναι συνεχής ἐάν καί μόνον ἐάν $\forall\, A\in\tau_Y \Rightarrow f^{-1}(A)\in\tau_X$, δηλ. ἐάν ὅλες οἱ ἀντίστροφες εἰκόνες τῶν ἀνοιχτῶν συνόλων τοῦ Y εἶναι ἀνοιχτά σύνολα τοῦ X.

Μέ ἄλλα λόγια, οἱ ἀντίστροφες εἰκόνες τῶν συνεχῶν συναρτήσεων διατηροῦν τά ἀνοιχτά σύνολα. Ἐπειδή $f^{-1}(A^c)=[f^{-1}(A)]^c$, οἱ ἀντίστροφες εἰκόνες τῶν συνεχῶν συναρτήσεων διατηροῦν ἐπίσης καί τά κλειστά σύνολα.

<u>Παράδειγμα 1ον:</u> Περιμένουμε ὅτι ἡ συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 1\\ 3x, & x>1\end{cases},\qquad f:X=\mathbb{R}\to Y=\mathbb{R},$$ εἶναι ἀσυνεχής.



Ἄς δοῦμε πῶς διαπιστώνεται αὐτό σάν ἐφαρμογή τοῦ παραπάνω θεωρήματος. Τό μόνο ἐνδιαφέρον σημεῖο εἶναι τό $x_0=1$ καί οἱ τιμές $y=2$ καί $y=3$. Δοκιμάζουμε δύο ἀνοιχτά σύνολα τοῦ Y.

$f^{-1}\left(\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)\right)=\left(1,\frac{7}{6}\right)$ εἶναι ἀνοιχτό τοῦ X.

$f^{-1}\left(\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)\right)=\left(\frac{3}{4},1\right]$, πού δέν εἶναι ἀνοιχτό τοῦ X.

<u>Παράδειγμα 2ον:</u> Ἔστω $f:X\to Y$. Ἐάν ὁ X ἔχει τήν διακεκριμένη τοπολογία, ἡ f εἶναι συνεχής. Ἐπίσης, ἐάν ὁ Y ἔχει τήν μή διακεκριμένη τοπολογία ἡ f εἶναι συνεχής (Πρέπει νά ἐλέγξουμε μόνο τά $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ καί $f^{-1}(Y)=X$, καί τά δύο εἶναι ἀνοιχτά).

Παράδειγμα 3ον: Ἔστω $f: X \longrightarrow Y$ συνεχής. Ἡ f παραμένει συνεχής ἐάν δώσουμε στόν X μία λεπτότερη τοπολογία (ὑπάρχουν πολλοί περισσότεροι ὑποψήφιοι γιά νά εἶναι τά ἀνοιχτά σύνολα τῆς μορφῆς $f^{-1}(A)$). Ἐπίσης παραμένει συνεχής ἐάν δώσουμε στόν Y μία τραχύτερη τοπολογία (ὑπάρχουν λιγότερα ἀνοιχτά σύνολα στόν Y γιά τά ὁποῖα πρέπει νά ἐλέγξουμε τό $f^{-1}(A)$).

Θεωροῦμε τώρα τό ἑξῆς πρόβλημα: Ἔχουμε σύνολο X, τοπολογικό χῶρο (Y, τ_Y) καί ἀπεικόνιση $f: X \longrightarrow Y$. Γιά ποιές τοπολογίες στόν X ἡ f εἶναι συνεχής;

Ἡ διακεκριμένη τοπολογία στό X εἶναι μία λύση τοῦ συστήματος. Ψάχνουμε γιά τήν "καλύτερη" δυνατή λύση, δηλ. γιά τήν τραχύτερη τοπολογία στό X πού κάνει τήν f συνεχή. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς σελίδας 14 ἡ τοπολογία πού χρειαζόμαστε θά πρέπει νά περιέχει ὁπωσδήποτε ὅλα τά σύνολα $f^{-1}(A)$ γιά κάθε ἀνοιχτό σύνολο A τοῦ Y. Θά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ

$$\tau_X = \{ f^{-1}(A), \forall A \in \tau_Y \}$$

εἶναι τοπολογία στό X καί συνεπῶς εἶναι ἡ τραχύτερη δυνατή τοπολογία. Ἐπειδή οἱ ἀντίστροφες εἰκόνες ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις $f^{-1}(\phi) = \phi$, $f^{-1}(Y) = X$, $\bigcup_j [f^{-1}(A_j)] = f^{-1}[\bigcup_j A_j]$ καί $\bigcap_j [f^{-1}(A_j)] = f^{-1}[\bigcap_j A_j]$ ἡ ἀπόδειξη εἶναι προφανής.

Ἡ τοπολογία τ_X λέγεται <u>τοπολογία ἐξ ἐπαγωγῆς</u> (induced topology) στό X ἀπό τόν τοπολογικό χῶρο (Y, τ_Y) καί τήν ἀπεικόνιση $f: X \to Y$. Ἡ καλύτερη ἐφαρμογή τῆς τοπολογίας ἐξ ἐπαγωγῆς εἶναι ὁ ὁρισμός τοῦ τοπολογικοῦ ὑποχώρου.

Ἔστω τοπολογικός χῶρος (X, τ_X) καί B ὑποσύνολο τοῦ X. Ὑπάρχει ἡ φυσική (natural) ἀπεικόνιση $f: B \ni x \longrightarrow f(x) = x \in X$, πού ἁπλῶς ἀναγνωρίζει ὅτι τά στοιχεῖα τοῦ x εἶναι καί στοιχεῖα τοῦ X. Τό σύνολο B μέ τήν τοπολογία ἐξ ἐπαγωγῆς τ_A λέγεται <u>τοπολογικός ὑποχῶρος</u> (topological subspace) τοῦ X. Παρατηρεῖστε ὅτι κάθε ὑποσύνολο ἑνός τοπολογικοῦ χώρου εἶναι τοπολογικός ὑποχῶρος, ἐνῶ κάτι ἀντίστοιχο δέν συμβαίνει σέ ἄλλες μαθηματικές δομές (π.χ. ὁμάδες, ἄλγεβρες, διανυσματικούς χώρους). Τά ἀνοιχτά σύνολα τοῦ B εἶναι ὅλα τά σύνολα τῆς μορφῆς $f^{-1}(A) = A \cap B$, ὅπου A εἶναι ἀνοιχτό σύνολο τοῦ X.

<u>Παράδειγμα 1ον</u>: Θεωροῦμε τόν τοπολογικό ὑποχῶρο $B = [0,1]$ τοῦ Εὐκλείδειου τοπολ. χώρου $(\mathbb{R}, \tau_E)$. Ἔστω ἀριθμός a, $0 < a < 1$. $\left(-\frac{1}{2}, a\right) \cap [0,1] = [0, a)$ εἶναι ἀνοιχτό σύνολο τοῦ B, παρόμοια καί τό $(a, 1]$! Δέν εἶναι καθόλου παράξενο ἀφοῦ καί τό $[0,1]$ εἶναι ἀνοιχτό σύνολο τοῦ $[0,1]$.

<u>Παράδειγμα 2ον</u>: Στά σύνολα $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί $\mathbb{Z}$ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἡ τοπολογία ἐξ ἐπαγωγῆς ἀπό τόν $(\mathbb{R}, \tau_E)$ εἶναι ἡ διακεκριμένη τοπολογία.

Μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε ὑποχῶρος ἑνός τοπολογικοῦ χώρου Hausdorff εἶναι χῶρος Hausdorff.

4. Εἰδικοί τοπολογικοί χῶροι.

Ὁρισμοί: Ἔστω σύνολο X καί μία οἰκογένεια $\{A_j, j\in J\}$ ὑποσυνόλων τοῦ X. Ἡ $\{A_j, j\in J\}$ λέγεται κάλυμμα (cover) τοῦ X ἐάν $\bigcup_{j\in J} A_j = X$. Μία ὑποοικογένεια $\{A_j, j\in \tilde{J}\subset J\}$ λέγεται ὑποκάλυμμα (subcover) τοῦ X ἐάν $\bigcup_{j\in \tilde{J}} A_j = X$.

Ὁρισμός: Ὁ τοπολογικός χῶρος (X, τ) λέγεται συμπαγής (compact) ἐάν κάθε κάλυμμα τοῦ X πού ἀποτελεῖται ἀπό ἀνοιχτά σύνολα περιλαμβάνει ἕνα ὑποκάλυμμα τοῦ X μέ πεπερασμένο πλῆθος συνόλων (πεπερασμένο ὑποκάλυμμα).

Πρακτικά, ὁ (X,τ) εἶναι συμπαγής ἐάν ἡ τοπολογία "δέν ἔχει πάρα πολλά καί μικρά ἀνοιχτά σύνολα τά ὁποῖα καλύπτουν τό X καί τά ὁποῖα ὅλα σχεδόν εἶναι ἀναγκαῖα γιά νά ἐπιτευχθεῖ αὐτή ἡ κάλυψη". Ἐάν τό σύνολο X ἔχει πεπερασμένου πλήθους στοιχεῖα, γιά κάθε τοπολογία τ ὁ (X,τ) εἶναι συμπαγής. Ἐάν ὅμως τό X εἶναι ἄπειρο σύνολο, ἡ τοπολογία τ θά πρέπει νά εἶναι ἀρκετά τραχεῖα γιά νά εἶναι ὁ (X, τ) συμπαγής.

Ἀποδεικνύεται εὔκολα ὅτι ἄν ὁ (X, τ_1) εἶναι συμπαγής καί ἡ τ_2 εἶναι τραχύτερη τῆς τ_1 τότε καί ὁ (X, τ_2) εἶναι συμπαγής.

Ὁρισμός: Ἕνα ὑποσύνολο τοπολογικοῦ χώρου λέγεται συμπαγές ἐάν σάν τοπολογικός ὑποχῶρος εἶναι

Παράδειγμα: Τό $(0,1)$ (Εὐκλείδεια τοπολογία) δέν εἶναι συμπαγές. Πράγματι, ἡ οἰκογένεια τῶν ἀνοιχτῶν συνόλων $I_n = \left(\frac{1}{n^2}, 1-\frac{1}{n^2}\right)$, $n=2,3,4,\ldots$ καλύπτει τό $(0,1)$ — $\bigcup_{n=2}^{\infty} I_n = (0,1)$ — ἐνῶ κανένα πεπερασμένο πλῆθος ἀπ' αὐτά δέν τό καλύπτει.

Παράδειγμα: Ὁ τοπολογικός χῶρος $(\mathbb{R}, \tau_E)$, παρόμοια καί ὅλοι οἱ Εὐκλείδειοι τοπολογικοί χῶροι n-διαστάσεων πού θά βρίσουμε στήν ἑπόμενη ἑνότητα, δέν εἶναι συμπαγής, ἔχει ὅμως συμπαγῆ ὑποσύνολα. Μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά συμπαγῆ ὑποσύνολα τοῦ $(\mathbb{R}, \tau_E)$ εἶναι ἀκριβῶς (ὅλα καί μόνον) αὐτά) πού εἶναι κλειστά καί περατωμένα.

Παρατήρηση: Οἱ ἰδιότητες "συμπαγής" καί Hausdorff εἶναι τελείως ἀντίθετες σ' ἕναν τοπολογικό χῶρο καί προσπαθοῦν νά ἀλληλοεξουδετερωθοῦν. Μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ τό ἑξῆς: Ἔστω ὁ (X,τ) συμπαγής καί Hausdorff τοπολογικός χῶρος. Ἐάν ἡ τ_1 εἶναι γνήσια τραχύτερη τῆς τ, ὁ (X,τ_1) δέν εἶναι Hausdorff. Ἐάν ἡ τ_2 εἶναι γνήσια λεπτότερη τῆς τ, ὁ (X,τ_2) δέν εἶναι συμπαγής.

Παρατήρηση: Οἱ χῶροι πού μελετοῦμε στή φυσική συνήθως <u>δέν</u> εἶναι συμπαγεῖς. Πολλές φορές ὅμως χρειάζεται νά μελετήσουμε ὁρισμένα συμπαγῆ ὑποσύνολά τους. Μία ἰδιότητά τους πού τά κάνει πολύ χρήσιμα εἶναι καί ἡ ἑξῆς: ἐάν ἡ $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ εἶναι συνεχής καί C εἶναι συμπαγές ὑποσύνολο τοῦ X τότε ἡ f παίρνει μέγιστη καί ἐλάχιστη τιμή στό C.

Ὁρισμός: ὁ τοπολογικός χῶρος (X, τ) λέγεται παρασυμπαγής (paracompact) ἐάν κάθε κάλυμμά του μέ ἀνοιχτά σύνολα ἔχει ἕνα ὑποκάλυμμα (ἐν γένει ἄπειρο) τέτοιο ὥστε κάθε σημεῖο τοῦ X ἀνήκει τό πολύ σέ πεπερασμένου πλήθους σύνολα τοῦ ὑποκαλύμματος.

Ἡ συνθήκη "παρασυμπαγής" εἶναι ἀσθενέστερη ἀπό τήν συμπαγής καί πάρα πολύ ἐξειδικευμένη. Εἶναι πολύ δύσκολο, ἀκόμη καί στούς μαθηματικούς, νά κατασκευάσουν ἕνα τοπολογικό χῶρο πού δέν εἶναι παρασυμπαγής. Παρά ταῦτα δέν ξέρω (πιθανόν καί νά μήν ὑπάρχει) κανένα φυσικό λόγο πού ἐξηγεῖ γιατί οἱ τοπολογικοί χῶροι πού μελετοῦμε στή φυσική πρέπει νά εἶναι παρασυμπαγεῖς. Ὑπάρχει ὅμως κάποιος μαθηματικός λόγος: Στούς τοπολογικούς μας χώρους θά δώσουμε ἀργότερα λίγη ἐπιπλέον δομή καί θά τούς κάνουμε πολλαπλότητες. Γι' αὐτές μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι δέχονται ἕναν τελεστή διαφορίσεως (derivative operator) ἐάνν ὁ ἀντίστοιχος τοπολογικός χῶρος εἶναι παρασυμπαγής. Ὥστε λοιπόν θά ἀπαιτήσουμε τήν ἰδιότητα "παρασυμπαγής" ἀπό τούς χώρους μας γιά νά μποροῦμε ἀργότερα, ὅταν θά μελετοῦμε δυναμική, νά διαφορίζουμε.

Ἡ τρίτη καί τελευταία ἔννοια πού θά ἀναπτύξουμε σ' αὐτή τήν ἑνότητα εἶναι ἡ ἔννοια τῆς συνάφειας (connectedness).

Μιλώντας πρακτικά, ἕνας τοπολογικός χῶρος δέν εἶναι συναφής ἐάν ἀποτελεῖται ἀπό μερικά τμήματα πού δέν ἐφάπτονται μεταξύ τους καί πού δέν μποροῦν νά μεγαλώσουν συνεχῶς ὥστε νά ἔλθουν σέ ἐπαφή, ἢ ἐὰν ἀποτελεῖται ἀπό δύο τουλάχιστον κομμάτια πού δέν μποροῦν νά ἔλθουν σέ ἐπικοινωνία, σέ ἐπαφή μεταξύ τους κάνοντας κάτι συνεχές.

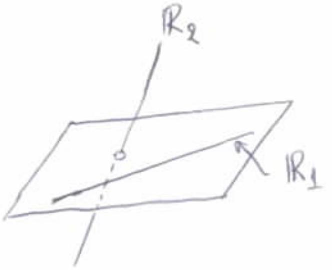
Οἱ χῶροι πού μελετοῦμε στή φυσική θέλουμε νά εἶναι συναφεῖς. Ἄς πάρουμε γιά παράδειγμα τόν χωρόχρονο τῆς

Σχετικότητας. Ἕνας μή συναφής χωρόχρονος σημαίνει ὅτι ὑπάρχουν κομμάτια τῆς ἱστορίας τοῦ σύμπαντος πού δέν εἶχαν, δέν ἔχουν καί οὔτε θά ἔχουν καμμία σχέση μεταξύ τους, δέν ἀλληλοεπιδροῦν, δέν ὑπάρχει (οὔτε καί νοητός) τρόπος ἐπικοινωνίας μεταξύ τους καί δέν ὑπάρχουν πειράματα πού μποροῦν νά κάνουν οἱ κάτοικοι τοῦ ἑνός κομματιοῦ γιά νά διαπιστώσουν τήν ὕπαρξη τῶν ἄλλων. Γιά τόν φιλόσοφο, τόν μεταφυσικό καί τόν θεολόγο καί τά ἄλλα κομμάτια μποροῦν νά ὑπάρχουν, ὄχι ὅμως καί γιά τόν φυσικό, ὁ ὁποῖος περιορίζει τίς μελέτες του μόνο στό δικό του κομμάτι, τό συναφές, στό ὁποῖο μπορεῖ νά κάνει ἐπιστήμη.

<u>Ὁρισμός:</u> Ὁ τοπολογικός χῶρος (X,τ) λέγεται <u>συναφής</u> (connected) ἐάν τά μόνα ὑποσύνολά του πού εἶναι συγχρόνως ἀνοιχτά καί κλειστά εἶναι τό $\emptyset$ καί τό X.

Ἐπειδή ὁ ὁρισμός φαίνεται ἀρκετά παράξενος, θά παρουσιάσουμε μερικά παραδείγματα καί θεωρήματα γιά νά πείσουμε ὅτι ὁ ὁρισμός πράγματι συνεπάγεται τήν ἔννοια τῆς συνάφειας πού θέλουμε νά ἐκφράσουμε.

<u>Παράδειγμα 1ον:</u> Θεωροῦμε δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες, δηλ. δύο εὐθεῖες πού δέν κεῖνται στό ἴδιο ἐπίπεδο, κάθε μία μέ τήν Εὐκλείδεια τοπολογία. Θεωροῦμε τήν ἕνωση



$X = \mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2$, καὶ ὁρίζουμε τοπολογία στό X κατά τόν πολύ φυσιολογικό τρόπο:

$$\tau = \{ A \subset X \text{ τέτοιο ὥστε } A \cap \mathbb{R}_1 \text{ εἶναι ἀνοιχτό τοῦ } \mathbb{R}_1 \text{ καί } A \cap \mathbb{R}_2 \text{ εἶναι ἀνοιχτό σύνολο τοῦ } \mathbb{R}_2 \}.$$

[Αὐτή ἡ κατασκευή εἶναι μία εἰδική περίπτωση τοῦ εὐθέως ἀθροίσματος τοπολογικῶν χώρων, μιᾶς πράξης πού ἀπό δύο ὁποιουσδήποτε τοπολογικούς χώρους κατασκευάζει ἕναν τρίτο].

Ἄς μελετήσουμε τό γνήσιο, μή κενό ὑποσύνολο τοῦ X $\mathbb{R}_1$.

$\mathbb{R}_1 \cap X = \mathbb{R}_1$ καί $\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2 = \emptyset \Rightarrow \mathbb{R}_1$ εἶναι ἀνοιχτό τοῦ (X, τ), παρόμοια καί τό $\mathbb{R}_2$. Ἀλλά τό συμπλήρωμα τοῦ $\mathbb{R}_1$ εἶναι $\mathbb{R}_1^c = \mathbb{R}_2 =$ ἀνοιχτό, ἄρα τό $\mathbb{R}_1$ εἶναι ἐπίσης καί κλειστό καί ὁ (X, τ) δέν εἶναι συναφής, πράγμα πού τό περιμέναμε.

Τί συμβαίνει ἐάν οἱ $\mathbb{R}_1$ καί $\mathbb{R}_2$ τέμνονται, ὁπότε περιμένουμε τόν X νά εἶναι συναφής; Ἔστω $\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2 = \{p\}$. Ξαναδοκιμάζουμε τό μή κενό γνήσιο ὑποσύνολο $\mathbb{R}_1$ πού μαζί μέ τό $\mathbb{R}_2$ εἶναι οἱ μόνοι ὑποψήφιοι γιά νά εἶναι σύνολα συγχρόνως ἀνοιχτά καί κλειστά.

$\mathbb{R}_1^c = \mathbb{R}_2 - \{p\} = (-\infty, p) \cup (p, +\infty) =$ ἀνοιχτό $\Rightarrow$ $\mathbb{R}_1$ εἶναι κλειστό. Ἀλλά, $\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2 = \{p\}$, κλειστό σύνολο τοῦ $\mathbb{R}_2 \Rightarrow$ τό $\mathbb{R}_1$ δέν εἶναι ἀνοιχτό σύνολο τοῦ X. Φυσικά δέν ἀποδείξαμε ὅτι ὁ (X, τ) εἶναι συναφής. Ἁπλῶς διαπιστώσαμε ὅτι ὁ ὁρισμός πού δώσαμε εἶναι ἀρκετά ἔξυπνος ὥστε νά μπορεῖ νά διακρίνει τίς περιπτώσεις πού οἱ $\mathbb{R}_1$ καί $\mathbb{R}_2$ τέμνονται ἤ δέν τέμνονται.

Παράδειγμα 2ον: Ὁ (X,τ) μὲ τὴν μὴ διακεκριμένη τοπολογία εἶναι συναφής. Ὁ (X,τ) μὲ τὴν διακεκριμένη τοπολογία δὲν εἶναι συναφὴς ἐὰν τὸ σύνολο X ἔχει δύο τουλάχιστον στοιχεῖα. Ἐὰν ὁ (X,τ) εἶναι συναφής, παραμένει συναφὴς γιὰ κάθε τοπολογία τραχύτερη τῆς τ.

Θεώρημα: Ἔστω (X,τ) τοπολογικὸς χῶρος. Ἐὰν γιὰ δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα x καὶ x' τοῦ X ὑπάρχει μία συνεχὴς ἀπεικόνιση $\phi : [0,1] \longrightarrow X$ τέτοια ὥστε $\phi(0)=x$ καὶ $\phi(1)=x'$, ὁ (X,τ) εἶναι συναφής.

Ὁρισμός: Τὸ ὑποσύνολο $Y \subset X$ τοῦ τοπολογικοῦ χώρου (X,τ) λέγεται συναφὲς ἐὰν σὰν τοπολογικὸς ὑπόχωρος τοῦ (X,τ) εἶναι συναφής.

Θεώρημα: Ἔστω (X,τ) τοπολογικὸς χῶρος καὶ A_j, $j\in J$ συναφῆ ὑποσύνολα τοῦ X τέτοια ὥστε ἡ τομὴ δύο ὁποιωνδήποτε ὑποσυνόλων A_j νὰ μὴν εἶναι κενή. Τότε ἡ ἕνωση $\bigcup_{j\in J} A_j$ εἶναι συναφὲς σύνολο.

Τὰ δύο παραπάνω θεωρήματα, ποὺ ἀποδεικνύονται εὔκολα ἂν εἰσάγει κανεὶς τὴν ἔννοια τῆς συναφοῦς συνιστώσας, δείχνουν ὅτι "εἶναι σωστὸ ὅτι περιμέναμε νὰ εἶναι σωστό" καὶ ἐνισχύουν ἔτσι τὴν πίστη μας στὸν ὁρισμὸ τῆς συνάφειας ποὺ δώσαμε.

Τελειώνουμε ἐπαναλαμβάνοντας ὅτι στὴ φυσικὴ συνήθως μελετοῦμε Hausdorff, συναφεῖς, παρασυμπαγεῖς χώρους καὶ μερικὲς φορὲς καὶ συμπαγεῖς ὑποχώρους αὐτῶν.

5. Μετρικοί χώροι.

Σ' αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε πολύ βασικά σε μετρικούς χώρους (metric spaces) για να ορίσουμε τον Ευκλείδειο χώρο n-διαστάσεων που θα μας χρειασθεί στον ορισμό της έννοιας της πολλαπλότητας (manifold).

Ορισμός: Έστω σύνολο $X \neq \emptyset$ και συνάρτηση

$d: X \times X \ni (x,y) \longrightarrow d(x,y) \in \mathbb{R}$. Η d λέγεται μετρική στο X εάν ικανοποιεί τις συνθήκες:

i) $d(a,b) \geq 0$, $\forall a,b \in X$.

ii) $d(a,b) = 0$ εάνν $a=b$.

iii) $d(a,b) = d(b,a)$, $\forall a,b \in X$ (συμμετρική)

iv) $d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b)$, $\forall a,b,x \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Παρατήρηση: Η i) είναι συνέπεια των ii), iii) και iv). Πράγματι, θέσε $b=a$ στην iv).

Επίσης, μερικές φορές η τριγωνική ανισότητα απαιτείται να ισχύει με την μορφή

$\tilde{iv}$) $d(a,b) \leq d(a,x) + d(b,x)$, $\forall a,b,x \in X$.

Τότε οι ii) και $\tilde{iv}$) συνεπάγονται τις i) και iii).

Πράγματι, για $x=a$ η $\tilde{iv}$) δίνει $d(a,b) \leq d(b,a)$, $\forall a,b \in X$.

Με εναλλαγή των a και b παίρνουμε παρόμοια ότι

$d(b,a) \leq d(a,b)$ και άρα $d(a,b) = d(b,a)$. Μετά, εφαρμόζοντας την $\tilde{iv}$) για $b=a$, παίρνουμε την i).

Παράδειγμα 1ον: Έστω $X = \mathbb{R}$, $d(a,b) = |a-b|$. Η d είναι μετρική στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Ορισμός: Το ζεύγος (X, d) όπου d είναι μία μετρική στο σύνολο X λέγεται μετρικός χώρος (metric space).

Παράδειγμα 2ον: Ἔστω $X = \mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots a_n),\ a_i \in \mathbb{R}\}$.
Ἡ πυθαγόρεια ἀπόσταση

$$d(a,b) = \{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + \dots + (a_n-b_n)^2\}^{1/2}$$ εἶναι μετρική στό $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 3ον: $X = \mathbb{R}^2$, $d(a,b) = |a_1-b_1| + |a_2-b_2|$, παρόμοια καί στόν $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 4ον: X εἶναι τυχόν σύνολο καί

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ἐάν } x \neq y \\ 0 & \text{ἐάν } x = y. \end{cases}$$

Εἶναι ἡ ἁπλούστερη μετρική πού μπορεῖ νά δοθεῖ σέ τυχόν σύνολο.

Παράδειγμα 5ον: Ἔστω $C[a,b]$ τό σύνολο τῶν συνεχῶν πραγματικῶν συναρτήσεων πού ὁρίζονται στό διάστημα $[a,b]$.
Ἡ $d(f,g) = \int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx$ εἶναι μετρική στό $C[a,b]$.
Ὁ μετρικός χῶρος πού προκύπτει συνήθως συμβολίζεται $L^2(a,b)$ καί χρησιμοποιεῖται πολύ στή συναρτησιακή ἀνάλυση.
Ἡ μετρική $d(f,g)$ εἶναι ἡ ἔκφραση τῆς ἀρχῆς τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων σέ συναρτήσεις.

Παράδειγμα 6ον: Ἔστω d μετρική στό σύνολο X. Χρησιμοποιώντας λίγη γυμνασιακή ἄλγεβρα (βασικά ὅτι $a>0, b>0$, $a<b \Rightarrow \frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$) μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι καί ἡ

$$\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$ εἶναι μία καινούργια μετρική στό X.

Ὅλες οἱ ἀποστάσεις στόν $(X, \tilde{d})$ εἶναι μικρότερες τῆς μονάδος. Φυσικά, μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε τό "1" τοῦ παρονομαστῆ μέ ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό καί νά κατασκευάσουμε ἕνα μετρικό χῶρο μέ ἀποστάσεις ὁσοδήποτε μικρές.

Οἱ μετρικοί χῶροι ἔχουν πολλή περισσότερη δομή ἀπό τούς τοπολογικούς χώρους, μποροῦν νά ἀπαντήσουν καί στό "πόσο μακρυά". Μόνο πού δέν μποροῦν νά ξεχωρίσουν διαφορετικές κατευθύνσεις. Ἐφ' ὅσον ὅμως ἀπαντοῦν στήν ἐρώτηση "πόσο μακρυά" περιμένουμε ὅτι οἱ μετρικοί χῶροι μποροῦν νά ἀπαντήσουν καί στήν ἁπλούστερη ἐρώτηση "εἶναι κοντά;" ἤ "εἶναι μακρυά;". Αὐτές οἱ ἰδέες μαθηματικά ἐκφράζονται ὡς ἑξῆς: Κάθε μετρικός χῶρος εἶναι καί τοπολογικός χῶρος καί ἡ τοπολογία του ὁρίζεται μονοσήμαντα ἀπό τήν μετρική του.

Ἔστω (X, d) μετρικός χῶρος. Ὁρίζουμε τήν ἀνοιχτή μπάλλα (open ball) μέ κέντρο $x_0 \in X$ καί ἀκτίνα $\varepsilon > 0$ νά εἶναι τό σύνολο

$$B_\varepsilon(x_0) = \{ x \in X \text{ ὥστε } d(x, x_0) < \varepsilon \}.$$

Ὁρίζουμε τό ἑξῆς σύνολο ὑποσυνόλων τοῦ X:

$$\tau = \left\{ A \text{ ὅπου } A \subset X \text{ πού ἔχει τήν ἑξῆς ἰδιότητα: } \forall x \in A, \ \exists \varepsilon > 0 \text{ ὥστε } B_\varepsilon(x) \subset A \right\}.$$

Μπορεῖ εὔκολα νά ἀποδειχθεῖ [τό μόνο πού χρειάζεται νά ἀποδειχθεῖ εἶναι ὅτι γιά κάθε σημεῖο πού ἀνήκει στήν τομή δύο ἀνοιχτῶν μπαλλῶν ὑπάρχει ἀνοιχτή μπάλλα, μέ κέντρο τό σημεῖο αὐτό καί κατάλληλη ἀκτίνα, πού ἀνήκει ἐξ ὁλοκλήρου στήν τομή τους] ὅτι τό σύνολο τ εἶναι τοπολογία στό X. Εἶναι ἡ τοπολογία πού καθορίζεται ἀπό τήν μετρική d. Πρακτικά τό σύνολο τ κατασκευάζεται παίρνοντας ὅλες τίς ἑνώσεις καί ὅλες τίς πεπερασμένες τομές ὅλων τῶν ἀνοιχτῶν μπαλλῶν μέ κέντρο κάθε στοιχεῖο τοῦ X καί οἱαδήποτε ἀκτίνα.

<u>Παράδειγμα 7ον:</u> Ἡ μετρική τοῦ πρώτου παραδείγματος δίνει τόν Εὐκλείδειο τοπολογικό χῶρο $(\mathbb{R}, \tau_E)$. Ἡ ἀνοικτή μπάλλα $B(x_0, \varepsilon)$ εἶναι τό ἀνοικτό διάστημα $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

<u>Παράδειγμα 8ον:</u> Ὁ χῶρος $\mathbb{R}^n$ μέ τήν μετρική τοῦ δευτέρου παραδείγματος καί τήν τοπολογία πού συνεπάγεται αὐτή λέγεται <u>Εὐκλείδειος (τοπολογικός) χῶρος n-διαστάσεων</u> καί παριστάνεται E^n.

<u>Παράδειγμα 9ον:</u> Ἡ μετρική τοῦ τέταρτου παραδείγματος δίνει στό X τήν διακεκριμένη τοπολογία γιατί, π.χ., $B_{1/2}(x)=\{x\}$.

<u>Παρατηρήσεις:</u> i) Οἱ τοπολογικοί χῶροι πού προέρχονται ἀπό μετρικούς χώρους εἶναι ἀρκετά ἐξειδικευμένοι. Π.χ., εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι ὅλοι αὐτοί οἱ χῶροι εἶναι Hausdorff. Γιά πολλά χρόνια ἦταν ἀνοικτό τό πρόβλημα τοῦ νά βρεθοῦν ἀναγκαῖες καί ἱκανές τοπολογικές συνθῆκες ὥστε μία τοπολογία νά προέρχεται ἀπό κάποια μετρική.

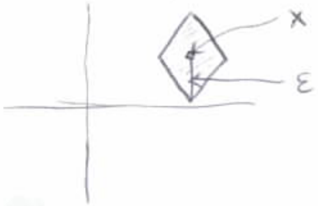
ii) Εἶναι δυνατόν (καί στήν πράξη συμβαίνει πολύ συχνά!) δύο διαφορετικές μετρικές νά ὁρίζουν τελικά τήν ἴδια τοπολογία, ἄν καί χρησιμοποιοῦν ἐν γένει διαφορετικές ἀνοιχτές μπάλλες. Σάν παράδειγμα ἀναφέρουμε τίς δύο μετρικές τοῦ ἕκτου παραδείγματος. Πράγματι, γιά $0<\varepsilon<1$,

$$\tilde{d} = \frac{d}{1+d} < \varepsilon \iff d < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad \text{καί ἄρα}$$

$B(x, \varepsilon, \tilde{d}) = B\left(x, \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, d\right)$. Ἐπειδή στήν κατασκευή τῆς τοπολογίας χρησιμοποιοῦμε τίς ἀνοιχτές μπάλλες μέ ὁποιαδήποτε ἀκτίνα, οἱ ἀνοιχτές μπάλλες τῶν δύο τοπολογιῶν οὐσιαστικά συμπίπτουν (πιθανή ἐξαίρεση τό X) καί οἱ δύο μετρικές ὁρίζουν τήν ἴδια τοπολογία.

Ἐπίσης μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ μετρική τοῦ τρίτου

Παραδείγματος ὁρίζει στὸν $\mathbb{R}^2$ τὴν εὐκλείδεια τοπολογία, ἂν καὶ οἱ ἀνοικτές του μπάλλες εἶναι τετράγωνα στὸ ἐπίπεδο $\mathbb{R}^2$.



Θὰ τελειώσουμε τὴν ἑνότητα συνοψίζοντας μερικὲς βασικὲς ἰδιότητες τοῦ χώρου E^n.

1. Τὰ σημεῖα τοῦ E^n εἶναι τῆς μορφῆς $(x_1, x_2, \dots x_n)$, δηλ. μποροῦν νὰ παρασταθοῦν μὲ συντεταγμένες.
2. Οἱ συναρτήσεις $f: E^n \to R$ εἶναι ἀκριβῶς οἱ πραγματικὲς συναρτήσεις n ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν οἱ ὁποῖες, ἐν γένει, μποροῦν νὰ διαφορισθοῦν.
3. Ὁ E^n εἶναι τοπολογικὸς χῶρος.
4. Ὁ E^n εἶναι μετρικὸς χῶρος
5. Ὁ E^n εἶναι διανυσματικὸς χῶρος.

Οἱ πολλαπλότητες ποὺ θὰ ὁρίσουμε στὴν ἑπόμενη ἑνότητα θὰ ἔχουν τὶς ἰδιότητες 1, 2, καὶ 3 ἀλλ' ὄχι καὶ τὶς δύο τελευταῖες.

6. Πολλαπλότητες.

Ποῦ καί γιατί χρειαζόμαστε τίς πολλαπλότητες; Στή φυσική, ἐπειδή ὑπάρχουν φυσικά συστήματα τά ὁποῖα, στήν καλύτερή τους περιγραφή, δέν ζοῦν καί ἐξελίσσονται στόν $\mathbb{R}^n$ ἤ κάποιο κομμάτι του. Π.χ. γιά τό σφαιρικό ἐκκρεμές μέ σταθερό σημεῖο ἐξαρτήσεως καί σταθερό μῆκος l ὁ χῶρος μορφῆς εἶναι ἡ σφαίρα (ἤ ἕνα κομμάτι τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας) ἀκτίνας l. Ποιό γενικά θά μπορούσαμε νά φανταστοῦμε ἕνα σύστημα μέ χῶρο μορφῆς $\mathbb{R}^n$ καί τό ὁποῖο ὑπόκειται σέ ὁρισμένους ὁλόνομους δεσμούς. Ἡ ἐξάλειψη τῶν ὁλόνομων δεσμῶν συνήθως ὁδηγεῖ σέ χῶρο μορφῆς μικρότερης μέν διαστάσεως ἀλλά ἀρκετά πολύπλοκο πού εἶναι πολλαπλότητα.

Ἄς κρατήσουμε γιά λίγο στό μυαλό μας (προσωρινά καί πρόχειρα) τήν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας σάν τό πρότυπο τῆς πολλαπλότητας. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε μικρή περιοχή της μοιάζει μ' ἕνα κομμάτι τοῦ $\mathbb{R}^2$, λίγο παραμορφωμένο. Γι' αὐτό θά δεχτοῦμε ὅτι μικρά κομμάτια τῆς πολλαπλότητας ἔχουν τήν τοπολογική δομή τοῦ $\mathbb{R}^n$, γιά κάποιο n. Ἡ τοπολογική ὅμως δομή δέν φτάνει. Πάνω στίς πολλαπλότητες θέλουμε νά κάνουμε δυναμική, νά γράφουμε διαφορικές ἐξισώσεις, δηλ. θά πρέπει νά ξέρουμε καί νά διαφορίζουμε. Πράγματα πού ξέρουμε νά τά διαφορίζουμε εἶναι οἱ συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν [Ὑπάρχει ἐπίσης καί ἡ παράγωγος Frechet, στήν ὁποία διαφορίζουμε συναρτήσεις ὁρισμένες σέ χώρους Banach. Ἡ θεώρηση αὐτῶν ὁδηγεῖ στήν μελέτη πολλαπλοτήτων ἀπείρου διαστάσεως, πού δέν θά τίς μελετήσουμε]. Γιά νά εἴμαστε λοιπόν σέ θέση νά διαφορίζουμε θά ὑποθέσουμε ὅτι τὰ σημεῖα τῆς πολλαπλότητας μποροῦν νὰ παρασταθοῦν μὲ συντεταγμένες. Γιὰ τὶς "ἐνδιαφέρουσες" πολλαπλότητες ἕνα μόνο σύστημα συντεταγμένων δὲν θὰ ἐπαρκεῖ γιὰ τὴν περιγραφὴ ὅλων τῶν σημείων τους. Τέλος θὰ δεχθοῦμε ὅτι ὁ χῶρος μας εἶναι ἕνα "σύνολο δεμένο", καὶ θὰ τὸ ἐκφράσουμε μὲ τὴν ἀπαίτηση ὅτι τὰ μικρὰ παραμορφωμένα κομμάτια τοῦ $\mathbb{R}^n$ ἀλληλοεπικαλύπτονται. Οἱ

περιοχὲς τῶν ἐπικαλύψεων, ὅπου ἰσχύουν καὶ τὰ δύο συστήματα συντεταγμένων, θὰ χρησιμοποιοῦνται γιὰ νὰ μεταβαίνουμε ἀπὸ ἕνα σύστημα συντεταγμένων σὲ ἄλλο.

Ἀρχίζουμε τώρα τὴν μαθηματικὴ θεμελίωση τῶν παραπάνω ἐννοιῶν.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἔστω σύνολο M. Ἕνας <u>n-χάρτης</u> (n-chart) στὸ M εἶναι ἕνα ζεῦγος (U, ϕ) ὅπου U εἶναι ὑποσύνολο τοῦ M καὶ ἡ ϕ εἶναι ἀπεικόνιση $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ τέτοια ὥστε:

i) $\phi(U)$ εἶναι ἀνοιχτὸ σύνολο τοῦ E^n $(=\mathbb{R}^n)$

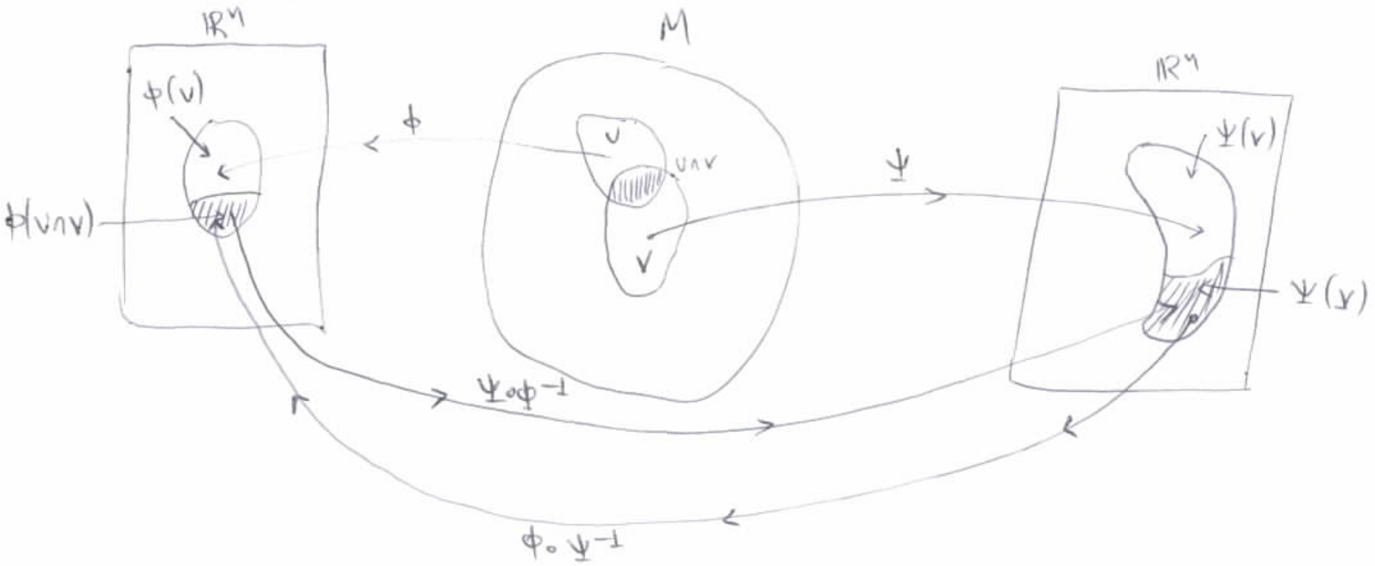
ii) Ἡ ϕ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη.

Ἡ ἀπεικόνιση ϕ "ταυτοποιεῖ" (identifies) τὰ σημεῖα τοῦ U μὲ τὰ σημεῖα τοῦ $\mathbb{R}^n$ στὸ $\phi(U)$ καὶ μ' αὐτὸ τὸν τρόπο δίνει συντεταγμένες στὰ σημεῖα τοῦ U, τὶς συντεταγμένες τῶν εἰκόνων τους. Τὸ πεδίο τιμῶν τῶν συντεταγμένων καθορίζεται ἀπὸ τὸ $\phi(U)$. Ἐπειδὴ ἡ ϕ εἶναι ἀμφί, διαφορετικὲς τιμὲς τῶν συντεταγμένων περιγράφουν διαφορετικὰ σημεῖα τοῦ U, δηλ. εἶναι "καλὲς" συντεταγμένες στὸ U.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἔστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Ἡ f λέγεται διαφορίσιμης κλάσης <u>C^p</u> ἐὰν ὅλες οἱ μερικὲς παράγωγοι τῆς f τάξεως p ὑπάρχουν καὶ εἶναι συνεχεῖς. Λέγεται τάξεως <u>C^∞</u> ἢ <u>λεία</u> (smooth) ἐὰν ὑπάρχουν ὅλες οἱ

Παράγωγοί της καί εἶναι συνεχεῖς. Λέγεται τάξεως C^ω ἐάν εἶναι ἀναλυτική, δηλ. ἐάν μπορεῖ νά ἐκφρασθεῖ σάν σειρά Taylor στή γειτονιά ὁποιουδήποτε σημείου της.

<u>Ορισμός:</u> Ἔστω σύνολο M καί δύο n-χάρτες (U, ϕ) καί (V, ψ).



Οἱ (U, ϕ) καί (V, ψ) λέγονται <u>C^∞</u> (ἀντίστοιχα C^p, C^ω) <u>– συμβιβαστοί</u> (compatible) ἐάν

i) $\phi(U\cap V)$ καί $\psi(U\cap V)$ εἶναι ἀνοιχτά σύνολα τοῦ $\mathbb{R}^n$.

ii) οἱ συναρτήσεις

$$\psi\phi^{-1} : \phi(U\cap V) \longrightarrow \psi(U\cap V) \quad \text{καί}$$

$$\phi\psi^{-1} : \psi(U\cap V) \longrightarrow \psi(U\cap V)$$

εἶναι C^∞ (ἀντίστοιχα C^p, C^ω) συναρτήσεις.

Ἐάν $U\cap V = \emptyset$, οἱ χάρτες θεωροῦνται συμβιβαστοί.

Παρατηρεῖστε ὅτι οἱ $\psi\circ\phi^{-1}$ καί $\phi\circ\psi^{-1}$ ὑπάρχουν ἐπειδή οἱ ϕ καί ψ εἶναι ἀμφί. Ἐπίσης, ἐπειδή $\phi(U\cap V)$ καί $\psi(U\cap V)$ εἶναι ἀνοιχτά σύνολα τοῦ $\mathbb{R}^n$ μποροῦμε νά λέμε (καί νά ἐλέγξουμε) ὅτι οἱ $\psi\circ\phi^{-1}$ καί $\phi\circ\psi^{-1}$ εἶναι C^p, C^∞ ἤ C^ω.

Ὁρισμός: C^∞-πολλαπλότητα (C^∞ manifold, smooth manifold) n-διαστάσεων εἶναι ἕνα σύνολο M καὶ συλλογή n-χαρτῶν $\{V_\alpha, \phi_\alpha\}$ τέτοια ὥστε:

i) Δύο ὁποιοιδήποτε χάρτες τῆς συλλογῆς εἶναι C^∞-συμβιβαστοί.

ii) Οἱ χάρτες καλύπτουν τό M, δηλαδή $\bigcup_\alpha V_\alpha = M$

iii) Κάθε n-χάρτης τοῦ M πού εἶναι συμβιβαστός μέ ὅλους τούς χάρτες τῆς συλλογῆς ἀνήκει καί αὐτός στή συλλογή.

Παρόμοια ὁρίζονται C^p καί C^ω (ἀναλυτικές) πολλαπλότητες.

C^0 πολλαπλότητες λέγονται καί τοπολογικές πολλαπλότητες (topological manifolds)

Παρατηρήσεις:

1. Ἡ συνθήκη ii) ἐξασφαλίζει ὅτι ἡ γειτονιά κάθε σημείου τῆς πολλαπλότητας μπορεῖ νά περιγραφεῖ μέ συντεταγμένες πού εἶναι καλά ὁρισμένες (δηλ. ἀμφιμονότιμες). Ἡ συνθήκη i) ἐκφράζει ὅτι στά σημεῖα τοῦ M πού ἔχουμε δώσει συντεταγμένες μέ ἀρκετούς διαφορετικούς τρόπους οἱ συντεταγμένες "ταιριάζουν" καί ὅτι μποροῦμε νά πᾶμε ἀπό τό ἕνα σύστημα στό ἄλλο κατά ἕνα C^∞ τρόπο (ἀντίστοιχα, C^p, C^ω).

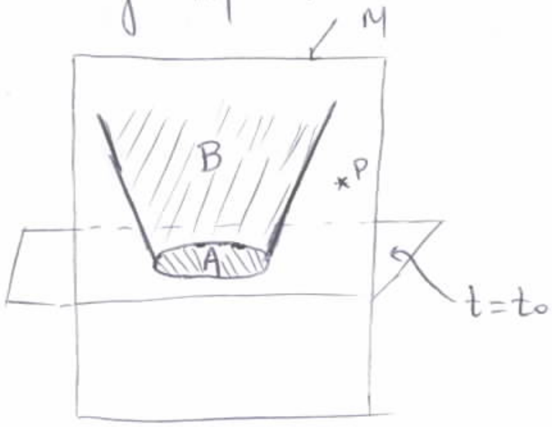
Ἡ συνθήκη iii) εἶναι ἀρκετά τεχνική, ἐξασφαλίζει ὅτι οἱ ἰδιότητες τῆς πολλαπλότητας εἶναι ἀνεξάρτητες τῶν συγκεκριμένων συστημάτων συντεταγμένων πού πιθανόν ἔχουν χρησιμοποιηθεῖ γιά τή διατύπωσή τους, καί μᾶς σώζει ἀπό παραδοξολογίες τῆς ἑξῆς μορφῆς: Ὑποθέτουμε ὅτι καταφέραμε νά καλύψουμε ἕνα σύνολο M μέ τέσσερις χάρτες, συμβιβαστούς μεταξύ τους, ὥστε νά αἰσθανόμαστε ὅτι καταλαβαίνουμε τό $(M, (V_1, \phi_1) \ldots (V_4, \phi_4))$ σάν πολλαπλότητα. Ἔστω τώρα ὅτι βρήκαμε ἄλλους δύο χάρτες τοῦ M, (V_5, ϕ_5) καί (V_6, ϕ_6), συμβιβαστούς μέ τούς προηγούμενους καί καταλαβαίνουμε ὅτι πλεονάζουν. Χωρίς τήν συνθήκη iii), ἡ $(M, (V_1, \phi_1), \dots (V_6, \phi_6))$ θά ἦταν μία διαφορετική πολλαπλότητα. Ἐπίσης, ἡ κάλυψη τοῦ M μέ δύο διαφορετικά (ἀλλά συμβιβαστά) συστήματα χαρτῶν θά συνεπαγόταν, χωρίς τήν συνθήκη iii), δύο διαφορετικές πολλαπλότητες καί κατά συνέπεια ἡ ἔννοια τῆς πολλαπλότητας θά ἐξαρτῶταν δραστικά ἀπό τά συστήματα συντεταγμένων πού χρησιμοποιήθηκαν.

2. Ὁ ἀκέραιος n πού βρίσκουμε σάν χαρακτηριστικό τῶν χάρτη, στήν πραγματικότητα χαρακτηρίζει τό σύνολο M καί λέγεται διάσταση τῆς πολλαπλότητας. Γιά νά τό καταλάβουμε, ἄς θεωρήσουμε τό σύνολο M πού δέχεται n-χάρτες. Ἄν προσπαθήσουμε νά δώσουμε στό M ἕναν $(n+1)$-χάρτη, τό $\phi(V)$ δέν εἶναι ἀνοιχτό σύνολο τοῦ $\mathbb{R}^{n+1}$, ἐνῶ ἄν προσπαθήσουμε νά τοῦ δώσουμε ἕναν $(n-1)$-χάρτη, ἡ ϕ δέν εἶναι ἀμφιμονότιμη.
Θά θεωρήσουμε μόνον πολλαπλότητες μέ διάσταση $n \geq 1$.

3. Στά μοντέλα τῆς θεωρητικῆς φυσικῆς συνήθως ἀρκεῖ νά ὑποθέσουμε ὅτι τά φυσικά πεδία πού ὑπεισέρχονται στή θεωρία εἶναι διαφορίσιμης τάξης C^p, ὅπου ὁ p εἶναι 3, 4 ἤ σπάνια 5. Φυσικά ὑπάρχει καί ἡ αἴσθηση μεταξύ τῶν φυσικῶν ὅτι ἡ τάξη διαφορισιμότητας εἶναι μία τεχνική, καθαρά μαθηματική συνθήκη τελείως ἄσχετη πρός τή φυσική, ὅτι τά προβλήματα διαφορισιμότητας παρουσιάζονται μόνον ὅταν ὑπεραπλοποιοῦμε τά μοντέλα μας καί θεωροῦμε πολύ ἐξειδικευμένα σημεῖα τους (π.χ. σημειακά φορτία, ἀκμές) καί γενικά ὅτι χωρίς κανένα ἐνδοιασμό μποροῦμε νά ἀπαιτήσουμε

ὅτι ὅλα τά φυσικά πεδία εἶναι τάξεως C^∞. Θά δοῦμε ὅμως παρακάτω ὅτι γιά νά βρίσκουμε σέ πολλαπλότητα βαθμωτά πεδία τάξεως C^p, ἡ πολλαπλότητα θά πρέπει νά εἶναι τουλάχιστον C^p (ἀπαιτεῖται C^{p+1} πολλαπλότητα γιά C^p διανυσματικά πεδία). Αὐτός εἶναι ὁ λόγος γιά τόν ὁποῖο θά μελετήσουμε κυρίως C^∞-πολλαπλότητες.

Σ' αὐτό τό σημεῖο θά ἤθελα νά προσθέσω ὅτι ὑπάρχει ἕνας πολύ θεμελιώδης φυσικός λόγος γιά τόν ὁποῖο C^ω (ἀναλυτικές) πολλαπλότητες δέν εἶναι κατάλληλες στή μελέτη τῆς σχετικιστικῆς φυσικῆς: ὁ φυσικός νόμος ὅτι ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός εἶναι πεπερασμένη καί ὅτι ἀποτελεῖ τό ἄνω ὅριο τῶν ταχυτήτων μέ τίς ὁποῖες μεταδίδονται οἱ πληροφορίες. Ἡ ἐξήγηση εἶναι τόσο ὄμορφη πού ἀξίζει νά τῆς ἀφιερώσουμε λίγο χρόνο. Στή σχετικότητα ὁ χωρόχρονος, πού περιγράφει ὅλη τήν ἱστορία τοῦ σύμπαντος, εἶναι μία τετραδιάστατη πολλαπλότητα.



Ἡ πολλαπλότητα δέχεται χωροειδεῖς ἐπιφάνειες τριῶν διαστάσεων πού περιγράφουν τήν κατάσταση τοῦ σύμπαντος τήν χρονική στιγμή $t=t_0$. Ἐξέλιξη στό χρόνο περιγράφεται μέ κίνηση "πρός τά ἐπάνω", ἐνῶ τό φῶς ἀκολουθεῖ γραμμές μέ κλίση $45°$, τό ὅριο τῆς περιοχῆς B. Τά ὑλικά σώματα πού τήν χρονική στιγμή t_0 ἦταν στήν περιοχή A μποροῦν ἀργότερα νά βρεθοῦν (κινούμενα μέ ταχύτητα τό πολύ c) μέσα στή σκιαγραφημένη περιοχή

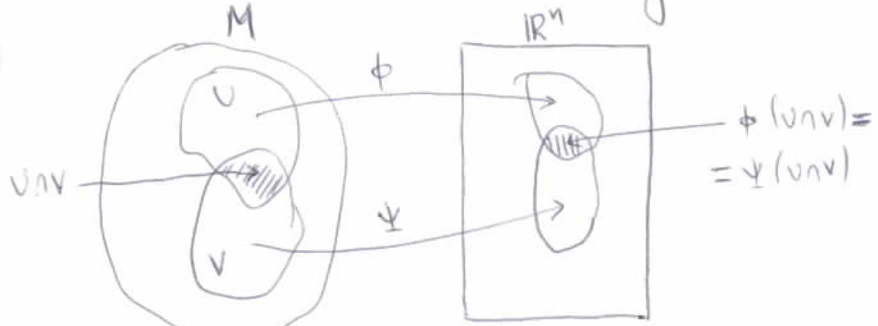
Β. Τό σημεῖο Ρ εἶναι τελείως ἀνεπηρέαστο ἀπό τά γεγονότα τοῦ Α.

Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι ἡ σχετικότητα περιγράφεται μέ ἀναλυτικά πεδία σέ μία ἀναλυτική (ὑποχρεωτικά) πολλαπλότητα. Δίνουμε ἀρχικές συνθῆκες στό Α (πού δέν ἀναπτύσσουν ἀνωμαλίες), π.χ. συνθῆκες πού περιγράφουν κάποια διαταραχή. Τό θεώρημα ἐπεκτάσεως τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων καθορίζει ὅτι οἱ ἀρχικές συνθῆκες, πού δόθηκαν μόνον στό ἀνοιχτό σύνολο Α τῆς ἐπιφάνειας $t=t_0$ καί εἶναι ἀναλυτικές, προσδιορίζουν μονοσήμαντα τίς ἀρχικές συνθῆκες σέ κάθε σημεῖο τῆς ἐπιφάνειας $t=t_0$ καί κατά συνέπεια ἐπηρεάζουν καί τό σημεῖο Ρ. Ἡ ἀναλυτικότητα λοιπόν τοῦ χωρόχρονου καί τῶν πεδίων τῆς σχετικότητας ἔρχεται σέ ἀντίθεση μέ τό πεπερασμένο τῆς ταχύτητας διαδόσεως τοῦ φωτός καί πρέπει νά ἐγκαταλειφθεῖ.

Ὁ σκοπός αὐτῆς τῆς παρατήρησης ἦταν νά δικαιολογήσει τήν ἀπόφασή μας νά μελετήσουμε φυσική χρησιμοποιώντας C^∞ (λεῖες) πολλαπλότητες.

4. Ἡ συνθήκη iii) σὲ πρώτη ματιὰ φαίνεται σὰν μία πάρα πολλὴ ἄσχημη συνθήκη. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν χαρτῶν ποὺ εἶναι συμβιβαστοὶ μὲ ὁρισμένους χάρτες εἶναι ἄπειρος, ποτὲ δὲν θὰ καταφέρουμε νὰ κατασκευάσουμε (ἤ, ἂν δοθεῖ, νὰ ἀποδείξουμε) **μία πολλαπλότητα!** Μᾶς σώζει τὸ <u>θεώρημα</u>: Ἔστω σύνολο M καὶ $(V_a, \phi_a)_{a\in A}$ χάρτες τοῦ M ποὺ ἱκανοποιοῦν τὶς συνθῆκες i) καὶ ii). Τότε τὸ σύνολο M μαζὶ μὲ ὅλους τοὺς χάρτες ποὺ εἶναι C^∞-συμβιβαστοὶ μὲ ὅλους τοὺς χάρτες τῆς ἀρχικῆς οἰκογένειας A ἀποτελοῦν πολλαπλότητα. Ὥστε λοιπόν, τὸ οὐσιῶδες βῆμα στὴ κατασκευὴ τῆς πολλαπλότητας εἶναι ἡ κατασκευὴ ἐκείνων (τῶν λίγων) χαρτῶν ποὺ καλύπτουν τὸ σύνολο M καὶ εἶναι μεταξύ τους συμβιβαστοί. Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος εἶναι ἁπλῆ, στηρίζεται στὸ ὅτι ἡ συμβιβαστότητα δύο n-χαρτῶν εἶναι μία σχέση ἰσοδυναμίας (δηλ. αὐτοπαθής, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική): Ἂν δύο χάρτες εἶναι συμβιβαστοὶ μ' ὅλους τοὺς χάρτες μιᾶς συλλογῆς ποὺ καλύπτει τὸ σύνολο M τότε εἶναι καὶ μεταξύ τους συμβιβαστοί.

5. Τὸ σύνολο M αὐτόματα γίνεται τοπολογικὸς χῶρος μὲ τοπολογία ποὺ τοπικὰ (δηλ. σὲ γειτονιὰ κάθε σημείου) εἶναι ἡ Εὐκλείδεια τοπολογία τοῦ χώρου n-διαστάσεων.



Πράγματι, ἔστω (U,ϕ) καὶ (V,ψ) δύο χάρτες τοῦ M. Δίνουμε στὸ U τὴν τοπολογία ἐξ ἐπαγωγῆς ἀπὸ τὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ τὴν ἀπεικόνιση ϕ μὲ τὴν ὁποία, ἐπειδὴ ἡ ϕ εἶναι ἀμφιμονότιμη καὶ ἐπὶ τοῦ $\phi(U)$, τὸ U γίνεται ὁμοιομορφικὸς (homeomorphic) μὲ τὸν $\phi(U)$. Παρόμοια ἡ ἀπεικόνιση Ψ δίνει (ἐξ ἐπαγωγῆς) τοπολογία στό σύνολο V. Ἐπειδή ἐξ ὁρισμοῦ τά $\phi(U\cap V)$ καί $\Psi(U\cap V)$ εἶναι ἀνοιχτά σύνολα τοῦ $\mathbb{R}^n$, τό $U\cap V$ εἶναι ἀνοιχτό ἐξ ἐπαγωγῆς ἀπό τίς ἀπεικονίσεις ϕ καί Ψ, δηλ. οἱ δύο τοπολογίες δέν μπερδεύονται, ἀλλά συμφωνοῦν ἀπόλυτα ὅσο ἀφορᾶ τά ἀνοιχτά σύνολα, στίς ἐπικαλύψεις τῶν δύο χαρτῶν καί ὁρίζουν τοπολογία σ' ὅλο τό σύνολο M. Ἐπειδή κάθε σημεῖο τοῦ M ἀνήκει σέ κάποιο χάρτη (δηλ. κάποιο V), τοπικά ἡ τοπολογία δέν διακρίνεται ἀπό τήν τοπολογία τοῦ $\mathbb{R}^n = E^n$.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἡ πολλαπλότητα λέγεται Hausdorff, συναφής, παρασυμπαγής, ... (ὁποιαδήποτε ἄλλη τοπολογική ἰδιότητα) ἐάν σάν τοπολογικός χῶρος εἶναι Hausdorff, συναφής, παρασυμπαγής, ... ἀντίστοιχα.

Θά ἤθελα νά τονίσω σ' αὐτό τό σημεῖο ὅτι ἡ ἐπί πλέον δομή πού ἔχουν οἱ πολλαπλότητες (δηλ. ἡ συλλογή τῶν χαρτῶν) δέν τίς ἐξασφαλίζει αὐτόματα τίς τοπολογικές ἰδιότητες πού θέλουμε στή φυσική, ὅπου μελετοῦμε μόνον Hausdorff, συναφεῖς, παρασυμπαγεῖς πολλαπλότητες.

<u>Παράδειγμα 1ον:</u> Ἔστω τό σύνολο

$$M = \{(x,y,z) \text{ ὅπου } x,y,z \text{ πραγματικοί ἀριθμοί καί } x^2+y^2+z^2=1\}.$$

Ὁρίζουμε τά ὑποσύνολα τοῦ M

$V_x^+ = \{(x,y,z)\in M,\ x>0\}$, $\quad V_x^- = \{(x,y,z)\in M,\ x<0\}$,

$V_y^+ = \{(x,y,z)\in M,\ y>0\}$, παρόμοια τά V_y^-, V_z^+ καί V_z^-.

Ὁρίζουμε καί τίς ἀπεικονίσεις

$$\Psi_x^+ : U_x^+ \ni (x,y,z) \longrightarrow \Psi_x^+(x,y,z) = (y,z) \in (-1,1)\times(-1,1) \subset \mathbb{R}^2$$

$$\Psi_y^- : U_y^- \ni (x,y,z) \longrightarrow \Psi_y^-(x,y,z) = (x,z) \in (-1,1)\times(-1,1) \subset \mathbb{R}^2,$$

παρόμοια καὶ τὶς Ψ_x^-, Ψ_y^+, Ψ_z^+, Ψ_z^-.

Οἱ (U_x^+, Ψ_x^+), (U_x^-, Ψ_x^-), (U_y^+, Ψ_y^+), (U_y^-, Ψ_y^-), (U_z^+, Ψ_z^+), (U_z^-, Ψ_z^-) εἶναι ἕξη χάρτες ποὺ καλύπτουν τὸ M. Ἂς τσεκάρουμε τὴ συμβιβαστότητά τους.

Οἱ (U_x^+, Ψ_x^+) καὶ (U_x^-, Ψ_x^-) εἶναι συμβιβαστοί γιατί $U_x^+ \cap U_x^- = \emptyset$.
Γιὰ τοὺς (U_x^+, Ψ_x^+) καὶ (U_y^+, Ψ_y^+) ἔχουμε

$$U_x^+ \cap U_y^+ = \{(x,y,z) \in M \text{ ὅπου } x>0 \text{ καὶ } y>0\}.$$

$$\begin{array}{ccc} U_x^+ \ni & (x,y,z) & \in U_y^+ \\ \Psi_x^+ \downarrow & & \downarrow \Psi_y^+ \\ (y,z) & & (\tilde{x},\tilde{z}) \end{array}$$

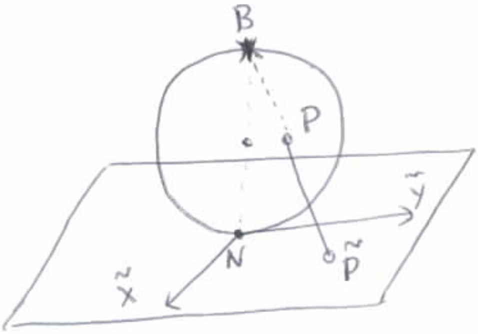
Στὸ ἴδιο σημεῖο (x,y,z) τοῦ M ὁ Ψ_x^+ δίνει συντεταγμένες (y,z) καὶ ὁ Ψ_y^+ $(\tilde{x},\tilde{z})$. Οἱ σχέσεις μεταξύ αὐτῶν εἶναι

$$\begin{cases} \tilde{z} = z \\ \tilde{x} = \sqrt{1-y^2-z^2} \end{cases}, \quad \begin{array}{l} y \in (0,1) \\ z \in (-1,1) \end{array}$$

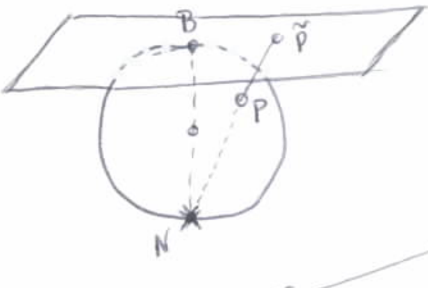
καὶ ἀντιστρόφως, $\begin{cases} z = \tilde{z} \\ y = \sqrt{1-\tilde{x}^2-\tilde{z}^2} \end{cases}, \quad \begin{array}{l} x \in (0,1) \\ z \in (-1,1) \end{array}$,

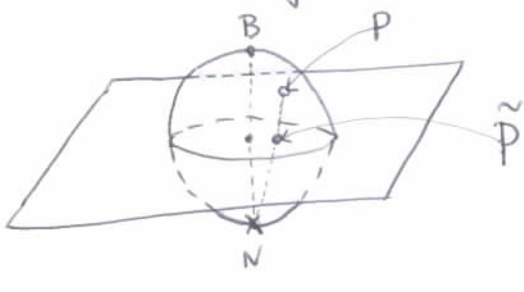
ποὺ καὶ οἱ δύο εἶναι C^∞, καὶ οἱ χάρτες εἶναι C^∞-συμβιβαστοί. Παρόμοια βλέπουμε ὅτι καὶ οἱ ἕξη χάρτες μεταξύ τους εἶναι συμβιβαστοί. Τὸ σύνολο M μὲ ὅλους τοὺς χάρτες ποὺ εἶναι συμβιβαστοί μὲ τοὺς ἕξη προηγούμενους χάρτες ἀποτελεῖ πολλαπλότητα, τὴν διδιάστατη μοναδιαία σφαῖρα ποὺ συμβολίζεται μὲ S^2. Παρόμοια ὁρίζονται καί οἱ σφαῖρες S^n. S^1 εἶναι ὁ κύκλος.

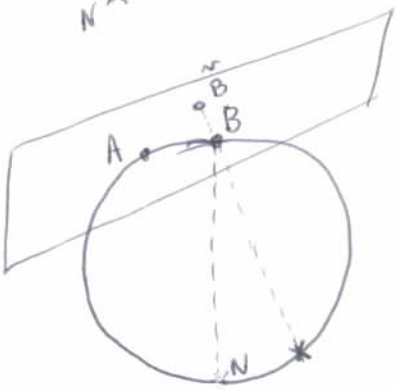
Παράδειγμα 2ον: Τό σύνολο M τοῦ προηγουμένου παραδείγματος μπορεῖ νά ἐπικαλυφθεῖ καί μέ δύο μόνο χάρτες ἄν χρησιμοποιήσουμε π.χ. στερεογραφικές προβολές.



Κάθε σημεῖο τοῦ M ἐκτός ἀπό τό B, π.χ. τό P, παρίσταται μέ τίς συντεταγμένες $(\tilde{x}, \tilde{y})$ τῆς εἰκόνας του $\tilde{P}$. Τό σημεῖο B ὀφείλει νά ἐξαιρεθεῖ γιατί διαφορετικά ἡ ἀπεικόνιση δέν εἶναι ἀμφιμονότιμη: τά σημεῖα B καί N τῆς σφαίρας ἔχουν τήν ἴδια εἰκόνα, N, στό ἐπίπεδο. Γιά νά καλύψουμε καί μία γειτονιά τοῦ B χρειαζόμαστε μία ἀκόμη στερεογραφική προβολή. Σχεδιάζουμε μερικές ἀπό τίς δυνατές ἐπιλογές.







(τό ἐπίπεδο ἐφάπτεται μέ τή σφαῖρα στό σημεῖο A).

Μόνον ἕνας ἀπ' αὐτούς τούς τρεῖς χάρτες ἀρκεῖ γιά νά καλύψουμε τήν ὁποιαδήποτε σφαῖρα ἀλλά ἡ πολλαπλότητα S^2, δηλ. τό M μέ ὅλους τούς χάρτες περιέχει ὅλους τούς παραπάνω χάρτες καί πολλούς ἄλλους ἀκόμη.

Παράδειγμα 3ον: Ἔστω $M = \mathbb{R}^n$. Διαλέγουμε χάρτη (V, ϕ) ὅπου $V = \mathbb{R}^n$ καί ϕ εἶναι ἡ ταυτοτική ἀπεικόνιση. Τό $\mathbb{R}^n$ λοιπόν εἶναι πολλαπλότητα πού μάλιστα μπορεῖ νά καλυφθεῖ μ' ἕναν μοναδικό χάρτη.

Παράδειγμα 4ον: Ἔστω $M = \mathbb{R}$. Διαλέγουμε $V = \mathbb{R}$ καί $\phi: V \ni x \longrightarrow \phi(x) = x^5 \in \mathbb{R}$. Ἡ ϕ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη καί ὁ (V, ϕ) εἶναι χάρτης πού καλύπτει τό $M = \mathbb{R}$. Φαίνεται λοιπόν ὅτι μποροῦμε νά κάνουμε τό R πολλαπλότητα κατά ἀρκετούς διαφορετικούς τρόπους. Σ' αὐτό τό ἐρώτημα θά ἐπανέλθουμε στήν ἑπόμενη ἑνότητα.

Θά ἀναφέρουμε τώρα δύο γενικές μεθόδους πού μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν γιά νά κατασκευάζουμε καινούργιες πολλαπλότητες.

1. Καρτεσιανό γινόμενο Πολλαπλοτήτων :

Ἄς εἶναι $(M, (V_\alpha, \Psi_\alpha)_{\alpha\in A})$ καί $(M', (V'_\beta, \Psi'_\beta)_{\beta\in B})$ πολλαπλότητες μέ διαστάσεις n καί n' ἀντίστοιχα. Ὁρίζουμε καινούργιο σύνολο $\hat{M}$, τό καρτεσιανό γινόμενο τῶν M καί M' : $\hat{M} = M \times M' = \{ (p, p') \text{ ὅπου } p \in M \text{ καί } p' \in M' \}$.

Στό $\hat{M}$ ὁρίζουμε $(n+n')$-χάρτες ὡς ἑξῆς:

$\hat{V}_\gamma = V_\alpha \times V'_\beta$ καί

$$\hat{\Psi}_\gamma : \hat{V}_\gamma \ni (p, p') \longrightarrow \hat{\Psi}_\gamma(p, p') = (\Psi_\alpha(p), \Psi'_\beta(p')) \in \mathbb{R}^{n+n'},$$

ὅπου $(\Psi_\alpha(p), \Psi'_\beta(p'))$ εἶναι ἡ $(n+n')$-αδα πού ἀποτελεῖται ἀπό τούς n ἀριθμούς $\Psi_\alpha(p)$ ἀκολουθούμενους ἀπό τούς n' ἀριθμούς $\Psi'_\beta(p')$. Εὔκολα ἐλέγχεται ὅτι ὁ $(\hat{V}_\gamma, \hat{\Psi}_\gamma)$ εἶναι $(n+n')$-χάρτης στό $\hat{M}$. Τό $\hat{M}$ μέ ὅλους τούς χάρτες πού προκύπτουν ἀπ' ὅλους τούς χάρτες τῶν M καί M' εἶναι πολλαπλότητα, τό καρτεσιανό γινόμενο τῶν δύο πολλαπλοτήτων. Θά τό συμβολίζουμε μέ τό ἴδιο σύμβολο, $\times$, πού δηλώνει καί τό καρτεσιανό γινόμενο μόνον τῶν ἀντίστοιχων συνόλων.

Τό $\mathbb{R}^1 \times S^1$ λέγεται κύλινδρος καί τό $S^1 \times S^1$ σαμπρέλα (torus). $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$. Ἀναφέρουμε ὅτι ὅλες οἱ πολλαπλότητες πού ἐμφανίζονται στή Σχετικότητα εἶναι τῆς μορφῆς $\mathbb{R}^n \times S^m$ μέ κατάλληλα m καί n.

2. Ἀφαίρεση τρυπῶν ἀπό πολλαπλότητες.

Ἔστω πολλαπλότητα $(M, (V_\alpha, \phi_\alpha), \alpha \in A)$, ἔστω K κλειστό ὑποσύνολο τοῦ M (πού εἶναι καί τοπολογικός χῶρος). Θεωροῦμε τό σύνολο $\hat{M} = M - K$ (ἐπειδή $M - K = M \cap K^c$, τό $M-K$ εἶναι ἀνοιχτό ὑποσύνολο τοῦ M) καί ἀπό τήν συλλογή τῶν χαρτῶν τοῦ M κρατοῦμε ὅλους τούς χάρτες γιά τούς ὁποίους $K \cap V_\alpha = \phi$. Τό $\hat{M}$ μ' αὐτούς τούς χάρτες εἶναι μία καινούργια πολλαπλότητα. Ἄν δέν ὑποθέσουμε ὅτι τό K εἶναι κλειστό, τό $M-K$ μπορεῖ νά γίνει μία πιό πολύπλοκη δομή πού δέν τήν ἔχουμε ὁρίσει, νά γίνει πολλαπλότητα μέ περίβλημα (manifold with boundary).

7. Λεῖες ἀπεικονίσεις.

Οἱ λεῖες ἀπεικονίσεις (smooth mappings) εἶναι πιθανότατα οἱ σημαντικότερες ὀντότητες πού ζοῦν σέ C^∞ πολλαπλότητες. Σ' αὐτή τήν ἑνότητα, $(M, (V_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha\in A})$ καί $(N, (V_\beta, \psi_\beta)_{\beta\in B})$ θά εἶναι C^∞-πολλαπλότητες.

Ὁρισμός: Ἡ ἀπεικόνιση $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ θά λέγεται λεία (C^∞) ἐάν γιά κάθε χάρτη (V_α, ϕ_α) ἡ ἀπεικόνιση

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_\alpha"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n \supset \phi_\alpha(V_\alpha) \arrow[ur, "f\circ\phi_\alpha^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

$f\circ\phi_\alpha^{-1}: \phi_\alpha(V_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}$ εἶναι C^∞ (προσέξτε ὅτι $\phi_\alpha(V_\alpha)\subset\mathbb{R}^n$ καί συνεπῶς ξέρουμε τί σημαίνει "C^∞").

Ὁρισμός: Ἡ ἀπεικόνιση $M \xrightarrow{f} N$ λέγεται λεία ἐάν γιά κάθε χάρτες (V_α, ϕ_α) καί (V_β, ψ_β) ἡ ἀπεικόνιση (τῶν m πραγματικῶν συναρτήσεων μέ n ἀνεξάρτητες μεταβλητές)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_\alpha"'] & N \arrow[d, "\psi_\beta"] \\ \mathbb{R}^n \supset \phi_\alpha(V_\alpha) \arrow[r, "\psi_\beta\circ f\circ\phi_\alpha^{-1}"] & \psi_\beta(V_\beta)\subset\mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$\psi_\beta\circ f\circ\phi_\alpha^{-1}: \phi_\alpha(V_\alpha) \longrightarrow \psi_\beta(V_\beta)$ εἶναι C^∞.

Ἐπειδή ἡ σύνθεση C^∞ ἀπεικονίσεων ἀπό τόν $\mathbb{R}^n$ στόν $\mathbb{R}^m$ εἶναι C^∞ ἀπεικόνιση, γιά νά ἐλέγξουμε ὅτι μία ἀπεικόνιση εἶναι C^∞ ἀρκεῖ νά τό ἐλέγξουμε μόνον γιά μερικούς χάρτες τῆς πολλαπλότητος πού τήν καλύπτουν.

Οἱ παραπάνω ὁρισμοί δείχνουν ὅτι τό ποιές ἀπεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων θεωροῦνται (= εἶναι) λεῖες ἐξαρτᾶται δραστικά ἀπό τή συλλογή τῶν χαρτῶν τῆς πολλαπλότητας.

Ἀποδεικνύεται μάλιστα ὅτι ἡ δομή τῆς πολλαπλότητας περιέχει ἀκριβῶς τήν πληροφορία "ποιές συναρτήσεις $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ εἶναι λεῖες". [εἶναι δυνατόν ἡ πολλαπλότητα νά ὁρισθεῖ χωρίς νά ἀναφέρουμε καθόλου χάρτες καί συντεταγμένες, μέ τήν βοήθεια τοῦ δακτυλίου τῶν συναρτήσεων $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ πού εἶναι C^∞.]. Ἀποφασίζουμε λοιπόν νά θεωροῦμε δύο πολλαπλότητες σάν ἴδιες καί νά μήν τίς ξεχωρίζουμε ἐάν i) Τά ἀντίστοιχά τους σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα καί ii) ὁρίζουν ἀκριβῶς τίς ἴδιες C^∞ συναρτήσεις.

Ἔστω ἡ ἀμφιμονοσήμαντη καί ἐπί ἀπεικόνιση πολλαπλοτήτων $f: M \longrightarrow N$. Ἡ $g: N \longrightarrow \mathbb{R}$ ὁρίζει τήν $g \circ f: M \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[drr, "g\circ f" near start] & & N \arrow[ll, shift left, "f^{-1}"] \arrow[d, "g"] \arrow[dll, "h\circ f^{-1}" near end] \\
\mathbb{R} & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Γιά νά εἶναι ἡ $g \circ f$ C^∞ γιά κάθε C^∞ ἀπεικόνιση g, θά πρέπει καί ἡ f νά εἶναι C^∞.

Παρόμοια ἡ $h: M \longrightarrow \mathbb{R}$ ὁρίζει τήν $h \circ f^{-1}: N \longrightarrow \mathbb{R}$ ἡ ὁποία εἶναι C^∞ γιά κάθε C^∞ ἀπεικόνιση h ἐάν ἡ f^{-1} εἶναι C^∞. Ὥστε λοιπόν τά M καί N ὁρίζουν τίς ἴδιες C^∞ ἀπεικονίσεις ἐάν οἱ f καί f^{-1} εἶναι καί οἱ δύο C^∞. Οἱ παρατηρήσεις αὐτές ἦταν προετοιμασία γιά τούς ὁρισμούς πού ἀκολουθοῦν.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἡ ἀπεικόνιση $f: M \longrightarrow N$ λέγεται <u>διαμορφισμός</u> (diffeomorphism) ἐάν

i) Ἡ f εἶναι ἀμφί καί ἐπί.

ii) Οἱ f καί f^{-1} εἶναι C^∞.

<u>Ορισμός:</u> Οἱ πολλαπλότητες M καί N θά λέγονται <u>διαμορφικές</u> (diffeomorphic) ἐάν ὑπάρχει ἕνας διαμορφισμός $f: M \longrightarrow N$ μεταξύ τους.

Στά μαθηματικά μελετοῦμε πολλαπλότητες modulo διαμορφισμούς, δηλ. ταυτοποιοῦμε καί δέν ξεχωρίζουμε πολλαπλότητες πού εἶναι διαμορφικές.

<u>Παράδειγμα 1ον:</u> Ἔστω $N = \mathbb{R}$ καί τό κάνουμε πολλαπλότητα μέ τόν χάρτη $V = \mathbb{R}$, $\psi(x) = x$, τήν ταυτότητα. Θεωροῦμε καί τήν πολλαπλότητα τοῦ 4ου παραδείγματος τῆς σελίδας 39 $[M = \mathbb{R},\ V = \mathbb{R},\ \phi(x) = x^5]$. Ἡ ταυτοτική ἀπεικόνιση $f: N \ni x \longrightarrow f(x) = x \in M$ δέν εἶναι διαμορφισμός. Πράγματι, συναρτήσει τῶν χαρτῶν, εἶναι ἡ ἀπεικόνιση

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & M \arrow[d, "\phi"] \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[d] & x \arrow[d] \\ x & x^5 \end{tikzcd}$$

$$\phi \circ f \circ \psi^{-1} : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow (\phi \circ f \circ \psi^{-1})(x) = x^5 \in \mathbb{R},$$

πού εἶναι C^∞ ($\Longrightarrow$ ἡ f εἶναι C^∞) ἐνῶ ἡ ἀντίστροφή της εἶναι ἡ

$$\psi \circ f^{-1} \circ \phi^{-1} : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \sqrt[5]{x} \in \mathbb{R}$$ πού δέν εἶναι

οὔτε κάν διαφορίσιμη στό $x=0$ ($\Rightarrow$ ἡ f^{-1} δέν εἶναι C^∞).

Προσοχή! Δέν ἔχουμε ἀποδείξει ὅτι οἱ M καί N εἶναι διαφορετικές πολλαπλότητες. Πιθανόν ἡ ταυτοτική ἀπεικόνιση f πού χρησιμοποιήσαμε νά μήν ἦταν ἡ κατάλληλη. Πράγματι μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ $g: N \longrightarrow M$, $g(x) = x^{1/5}$ εἶναι διαμορφισμός καί συνεπῶς οἱ M καί N εἶναι οἱ ἴδιες πολλαπλότητες.

Παράδειγμα 2ον: Ἔστω $M=(-1,1)$ καὶ τὸ κάνουμε πολλαπλότητα μὲ τὴν ταυτοτικὴ ἀπεικόνιση $\phi(u)=u$. Ἔστω ἐπίσης τὸ $N=\mathbb{R}$, πολλαπλότητα ἐπίσης μὲ τὴν ταυτοτικὴ ἀπεικόνιση $\Psi(x)=x$. Ἡ ἀπεικόνιση

$$M=(-1,1)\xrightarrow{\ f\ } N=\mathbb{R}. \qquad f(u)=\frac{u}{1-u^2}$$

εἶναι C^∞ στὸ $(-1,1)$. Ἡ ἀντιστροφή της εἶναι ἡ

$$f^{-1}(x)=\frac{2x}{1+\sqrt{1+4x^2}}$$

(διαλέξαμε τὸ κατάλληλο πρόσημο ὥστε ἡ εἰκόνα τῆς f^{-1} νὰ ἀνήκει στὸ $(-1,1)$).

ποὺ εἶναι ἐπίσης C^∞. Οἱ M καὶ N εἶναι λοιπὸν διαμορφικὲς πολλαπλότητες.

Παρόμοια ἡ ἀπεικόνιση

$$g:\ M=(-1,1)\ni u\longrightarrow g(u)=\frac{1}{2}\big[(1+u)b+(1-u)a\big]\in(a,b)$$

ἀποδεικνύει ὅτι τὸ (a,b) εἶναι διαμορφικό, σὰν πολλαπλότητα, μὲ τὸ $(-1,1)$ καὶ συνεπῶς καὶ μὲ τὴν $\mathbb{R}$.

Γενικότερα μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι ὑπάρχουν ἀκριβῶς δύο Hausdorff, συναφεῖς, παρασυμπαγεῖς πολλαπλότητες μιᾶς διαστάσεως, ἡ πραγματικὴ εὐθεῖα $\mathbb{R}$ καὶ ὁ κύκλος S^1. Γιὰ μεγαλύτερες ὅμως διαστάσεις ὁ ἀριθμὸς τῶν πολλαπλοτήτων εἶναι πολὺ μεγάλος, οὔτε καὶ ὑπάρχει ἱκανοποιητικὴ ταξινόμησή τους.

Ἐντελῶς ἀκαδημαϊκὰ ἀναφέρω καὶ τὰ ἑξῆς:

1. Ἔχει ἀποδειχθεῖ ὅτι γιὰ διάσταση $n\le 4$ κάθε σύνολο M μπορεῖ νὰ γίνει C^∞ πολλαπλότητα κατὰ ἕναν καὶ μοναδικὸ τρόπο [δηλ. ἐὰν $\exists f: M\to N$, εἶναι ἀμφὶ καὶ ἐπὶ καὶ $\dim M=\dim N\le 4$, τότε οἱ M καὶ N εἶναι

διαφορικές [ὁ διαφορισμός δέν εἶναι ἀναγκαστικά ἡ f)]. Αὐτό δέν ἔρχεται σέ ἀντίθεση μέ τήν ἀμέσως προηγούμενη παράγραφο. Π.χ. ἄν ἀφαιρέσουμε ἕνα σημεῖο ἀπό τήν $\mathbb{R}$ παύει νά εἶναι συναφής ἐνῶ μποροῦμε νά ἀφαιρέσουμε πολλές τρύπες ἀπό τό $\mathbb{R}^2$ χωρίς νά χαλάσουμε τίς τοπολογικές ἰδιότητες πού ἀπαιτοῦμε ἀπό τίς πολλαπλότητες.

2. Στό σύνολο $\mathbb{R}^n$ μποροῦμε νά δώσουμε μοναδική λεία δομή $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Ὁ Milnor ἀνακάλυψε τό 1956 ὅτι στήν σφαίρα

$$S^7 = \{ (x_1, x_2, \dots x_8) \in \mathbb{R}^8 \text{ ὅπου } x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_8^2 = 1 \}$$

μποροῦμε νά δώσουμε 28 διαφορετικές λεῖες δομές! Γιά ἄλλες διαστάσεις (πάντοτε σφαῖρες S^n) ἔχουν βρεθεῖ :

διάσταση	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ἀριθμός δομῶν	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16

Οἱ σφαῖρες S^n μέ λεία δομή διαφορετική ἀπ' αὐτήν πού ὁρίζεται ὅπως ἀκριβῶς ὁρίσθηκε ἡ δομή τῆς S^2 στό πρῶτο παράδειγμα τῆς σελίδας 36 λέγονται ἐξωτικές σφαῖρες (exotic spheres) καί ἀποτελοῦν πεδίο ἔρευνας τῶν μαθηματικῶν τῶν ἡμερῶν μας.

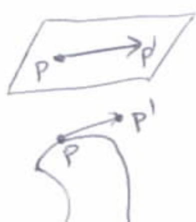
Ἔχει ἐπίσης ἀποδειχθεῖ ὅτι $\forall m \in \mathbb{N}$ ὑπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ὥστε ἡ σφαῖρα S^n νά μπορεῖ νά γίνει C^∞ πολλαπλότητα κατά περισσότερους ἀπό m διακεκριμένους τρόπους.

8. Διανύσματα

Οἱ πολλαπλότητες εἶναι χῶροι πού χρησιμοποιοῦνται στή θεωρητική φυσική ἀλλά μόνες τους δέν ἀρκοῦν γιά τή μελέτη τῆς θεωρητικῆς φυσικῆς. Ἐπιπλέον χρειαζόμαστε διάφορα πεδία πού "ζοῦν" πάνω στίς πολλαπλότητες. Τά βαθμωτά πεδία (scalar fields) τά ἔχουμε ἤδη ὁρίσει, εἶναι ἀπεικονίσεις $f: M \to \mathbb{R}$ πού συνήθως ἀπαιτοῦνται νά εἶναι C^∞. Στίς ἑπόμενες ἑνότητες θά ὁρίσουμε ἀκόμη πιό πολύπλοκα πεδία στίς πολλαπλότητες, θά ὁρίσουμε τανυστικά πεδία (tensor fields). Τό δυσκολότερο βῆμα πρός αὐτή τήν κατεύθυνση ἀποτελεῖ ὁ ὁρισμός τῶν διανυσματικῶν πεδίων (vector fields), πού ἀποτελεῖ καί τό ἀντικείμενο αὐτῆς τῆς ἑνότητας.

Πρῶτα θά ὁρίσουμε διανύσματα σ' ἕνα σημεῖο τῆς πολλαπλότητας. Ἐπειδή ὁ ὁρισμός συνήθως φαίνεται σέ πρώτη ματιά ἀρκετά παράξενος – τά διανύσματα θά παρουσιαστοῦν σάν ὁρισμένοι τελεστές μέ ἰδιότητες διαφορίσεως – θά δοῦμε πρῶτα τά διανύσματα τοῦ χώρου $\mathbb{R}^n$ ἀπό ἀρκετές διαφορετικές σκοπιές. Φυσικά δέν πρέπει νά ξεχνᾶμε ὅτι διάνυσμα εἶναι ἕνα στοιχεῖο ἑνός διανυσματικοῦ χώρου.

Στόν $\mathbb{R}^n$ τό διάνυσμα μποροῦμε νά τό δοῦμε σάν ἕνα ἀντικείμενο πού περιέχει πληροφορία γιά μέγεθος, διεύθυνση καί φορά καί πού περιγράφει, μ' αὐτό



τόν τρόπο, μία μετατόπιση. Δυστυχῶς αὐτός ὁ ὁρισμός τῶν διανυσμάτων δέν μπορεῖ νά γενικευθεῖ καί σέ πολλαπλότητες γιατί "τό διάνυσμα μᾶς βγάζει ἔξω ἀπό τήν πολλαπλότητα". Τά διανύσματα τοῦ R^n μποροῦμε ἐπίσης νά τά δοῦμε καί σάν n-άδες $(\xi^1, \xi^2, \dots \xi^n)$. Ὁ ὁρισμός αὐτός εἶναι χρήσιμος γιατί ὁ $\mathbb{R}^n$ συνοδεύεται ἀπό μία κανονική βάση, τήν $e_1 = (1, 0, \dots 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots 0)$, $\dots$ $e_n = (0, 0, \dots 1)$, καί ἔτσι γράφοντας $(\xi^1, \xi^2, \dots \xi^n)$ σκεφτόμαστε τό $\xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \dots + \xi^n e_n$. Οὔτε καί αὐτός ὁ ὁρισμός γενικεύεται εὔκολα σέ πολλαπλότητες ἐπειδή αὐτές δέν συνοδεύονται ἀπό μία κανονική ἐκλογή βάσεως.

Ἄς τά κυτάξουμε κι ἀπό μία τρίτη σκοπιά, πάντα στόν $\mathbb{R}^n$. Τό διάνυσμα $(\xi^1, \xi^2, \dots \xi^n)$ μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά νά δώσει, γιά κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, μία καινούργια συνάρτηση, τήν $\xi^1 \dfrac{\partial f}{\partial x^1} + \xi^2 \dfrac{\partial f}{\partial x^2} + \dots + \xi^n \dfrac{\partial f}{\partial x^n}$, τήν παράγωγο τῆς f κατά τήν διεύθυνση $(\xi^1, \xi^2, \dots \xi^n)$. Ἄν περιοριστοῦμε σ' ἕνα σημεῖο, τό διάνυσμα ἀντιστοιχεῖ ἕναν ἀριθμό σέ κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Αὐτό τόν τρόπο παρουσίασης τῶν διανυσμάτων θά γενικεύσουμε σέ πολλαπλότητες.

Ἀρχίζουμε τώρα τήν μαθηματική θεμελίωση τῶν διανυσμάτων.

Ἔστω πολλαπλότητα $(M, (V_a, \phi_a))$ καί σημεῖο $p \in M$.
Θεωροῦμε τό σύνολο
$C(M) = \{ f : M \to \mathbb{R}$ ὅπου f εἶναι $C^\infty \}$, δηλ. τό σύνολο τῶν C^∞ πραγματικῶν συναρτήσεων στήν M.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἡ ἀπεικόνιση $\xi : C(M) \to \mathbb{R}$ λέγεται δ-p ἀπεικόνιση ἐάν ἱκανοποιεῖ τίς συνθῆκες:

i) $\xi(f+g) = \xi(f) + \xi(g)$, $\forall f, g \in C(M)$,

ii) $\xi(fg) = f(p)\xi(g) + g(p)\xi(f)$, $\forall f, g \in C(M)$,

iii) Ἐάν ἡ $f \in C(M)$ εἶναι σταθερή, $\xi(f) = 0$.

Παριστάνουμε μέ T_p τό σύνολο τῶν δ-p ἀπεικονίσεων.
Στό σύνολο T_p ὁρίζουμε πρόσθεση ὡς ἑξῆς:
Ἐάν $\xi \in T_p$, $\zeta \in T_p$, $(\xi+\zeta)(f) = \xi(f) + \zeta(f)$, $\forall f \in C(M)$.
Ἡ $\xi+\zeta$ εἶναι δ-p ἀπεικόνιση γιατί, π.χ., ἱκανοποιεῖ τήν

$$(\xi+\zeta)(fg) = \xi(fg) + \zeta(fg) = f(p)\xi(g) + g(p)\xi(f) +$$
$$+ f(p)\zeta(g) + g(p)\zeta(f) = f(p)[\xi(g)+\zeta(g)] + g(p)[\xi(f)+\zeta(f)] =$$
$$= f(p)(\xi+\zeta)(g) + g(p)(\xi+\zeta)(f),$$

παρόμοια καί γιά τίς ἄλλες συνθῆκες.
Ἐπίσης ὁρίζουμε πολλαπλασιασμό στοιχείων ξ τοῦ T_p μέ πραγματικούς ἀριθμούς k ὡς ἑξῆς:
$(k\xi)(f) = k\,\xi(f)$, $\forall f \in C(M)$. Εἶναι εὔκολο νά δειχθεῖ ὅτι ὁ T_p μέ τίς δύο πράξεις πού μόλις ὁρίσαμε γίνεται διανυσματικός χῶρος.
Ὁ T_p θά λέγεται ὁ <u>ἐφαπτόμενος χῶρος</u> (tangent space) στό σημεῖο p τῆς πολλαπλότητας M καί

τὰ στοιχεῖα του, οἱ ~~δ-ρ~~ μέχρι τώρα ἀπεικονίσεις, διανύσματα στὸ σημεῖο p.

Θεώρημα: Ἡ διάσταση τοῦ T_p ἰσοῦται μὲ τὴ διάσταση τῆς πολλαπλότητας M.

Ἀπόδειξη: Ἔστω $\dim M = n$ καὶ (V, ϕ) χάρτης ποὺ περιέχει τὸ σημεῖο p. Ὁ χάρτης δίνει συντεταγμένες $(x^1, x^2, \dots x^n)$ στὰ σημεῖα τοῦ V, Ἔστω $(x_0^1, x_0^2, \dots x_0^n)$ οἱ συντεταγμένες τοῦ p. Ἐπίσης ἐὰν $f \in C(M)$, ὁ περιορισμός της στὸ V εἶναι μία C^∞ συνάρτηση n πραγματικῶν μεταβλητῶν $f(x^1, x^2, \dots x^n)$.

i) Εὔκολα μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ὅτι ὁ τελεστής $\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p =$ "πάρε τὴν μερικὴ παράγωγο ὡς πρὸς x^1 καὶ ὑπολόγισέ την στὸ σημεῖο p" ἀνήκει στὸν T_p, παρόμοια καὶ τὰ $\frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p, \dots \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$. (Στὴ πραγματικότητα οἱ συνθῆκες i), ii) καὶ iii) τῆς σελίδας 48 δὲν εἶναι τίποτε παραπάνω ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῶν παραγώγων, γραμμικότητα, κανόνας τοῦ Leibnitz, καὶ μηδενισμὸς τῆς παραγώγου σταθερᾶς).

ii) Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι τὰ $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$, $i = 1, 2, \dots n$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. Πράγματι ἔστω ὅτι

$$\zeta = a^1 \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p + \dots + a^n \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p = 0$$

, ὅπου $a^i \in \mathbb{R}$ καὶ $\zeta = 0$ σημαίνει ὅτι $\zeta(f) = 0$, $\forall f \in C(M)$. Διαλέγουμε τὴ συνάρτηση $f = x^k$, ἡ k-στὴ συντεταγμένη. Προφανῶς $\zeta(x^k) = a^k$ καὶ συνεπῶς $a^k = 0$. Διαλέγοντας $k = 1, 2, \dots n$ λοιπὸν ἀποδεικνύουμε τὴ γραμμικὴ ἀνεξαρτησία.

iii) Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι τὰ $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P ,\ i=1,2,\dots n \right\}$ ἀποτελοῦν βάση τοῦ T_P.

Ἔστω τυχαῖο διάνυσμα $\xi \in T_P$, δηλ. μία ἀπεικόνιση $\xi : C(M) \longrightarrow \mathbb{R}$. Οἱ συναρτήσεις $f_1(x^1,\dots x^n) = x^1$, $f_2(x^1,\dots x^n) = x^2, \dots, f_n(x^1,\dots x^n) = x^n$ εἶναι στοιχεῖα τοῦ $C(M)$ καὶ συνεπῶς τὸ ξ ξέρει νὰ ἐπιδράσει σ' αὐτές καὶ νὰ παράγει ἀριθμούς. Ἔστω $\xi(x^i) = \xi^i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\dots n$. Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι

$$\xi = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_P + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_P + \dots + \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_P , \qquad (1)$$

δηλ. ὅτι τὸ τυχαῖο διάνυσμα ξ γράφεται σὰν γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P$, $i = 1,2,\dots n$.

Γιὰ νὰ ἀποδείξουμε τὴν (1) φυσικὰ ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξουμε ὅτι τὰ δύο μέλη δίνουν τὸν ἴδιο ἀριθμό ὅταν ἐπιδροῦν στὴν τυχαία συνάρτηση $f \in C(M)$. Ἀναλύουμε τὴν f σὲ σειρὰ Taylor

$$f(x^1,\dots x^n) = f(P_0) + (x^1 - x^1_0)\frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_{P_0} + \dots + (x^n - x^n_0)\frac{\partial f}{\partial x^n}\Big|_{P_0} +$$
$$+ \frac{1}{2}(x^1 - x^1_0)^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2}\Big|_{P_0} + \dots , \qquad (2)$$

καὶ ἐφαρμόζουμε τὴν ξ στὴν f χρησιμοποιώντας τὴν γραμμικότητα τῆς ξ.

$\xi\,(f(P_0)) = 0$, ἐπειδὴ $f(P_0)$ εἶναι σταθερά.

$$\xi\left[(x^1 - x^1_0)\frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_{P_0}\right] = \cancel{(x^1_0 - x^1_0)}^{\,0}\ \xi\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_{P_0}\right)^{0} + \frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_{P_0} \xi(x^1 - x^1_0) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_{P_0} \cdot \xi(x^1) = \xi^1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_{P_0},$$ παρόμοια καὶ γιὰ τοὺς ὑπόλοιπους γραμμικοὺς ὅρους τῆς (2).

$$\xi\left[(x^1-x^1_0)^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2}\Big|_{p_0}\right] = \dots = 2(x^1-x^1_0)\Big|_p \cdot \xi(x^1)\cdot \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2}\Big|_{p_0} = 0,$$

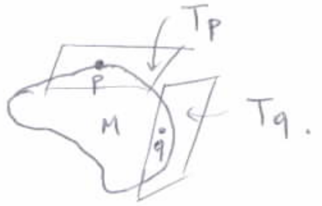
παρόμοια καὶ γιὰ ὅλους τοὺς μὴ γραμμικοὺς ὅρους τῆς ἀναλύσεως (2). Ἄρα λοιπόν,

$$\xi(f) = \xi^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_p + \dots + \xi^n \frac{\partial f}{\partial x^n}\Big|_p .$$

Προφανῶς καὶ τὸ δεύτερο μέλος τῆς (1) δίνει τὴν ἴδια τιμὴ στὴν f καὶ τὸ θεώρημα ἔχει ἀποδειχθεῖ. ■

<u>Παρατηρήσεις:</u> 1. Τὰ διανύσματα τοῦ T_p εἶναι τελείως ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸν χάρτη (V,ϕ). Ὁ χάρτης χρησιμοποιήθηκε μόνο στὴν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος. Ἐπειδὴ καὶ ἡ διατύπωση τοῦ θεωρήματος ($\dim T_p = \dim M$) εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὸν (V,ϕ), ὁ (V,ϕ) δὲν ἔχει παίξει κανέναν ρόλο στὸν T_p. Τὰ διανύσματα ἔχουν νὰ κάνουν μὲ τὴν πολλαπλότητα. Ἡ πληροφορία "ποιὰ εἶναι ἀκριβῶς ἡ πολλαπλότητα" περιλαμβάνεται στὴ γνώση τοῦ συνόλου $C(M)$, ποὺ ὁπωσδήποτε ἔχει ἀποτέλεσμα στὸ "ποιὸς εἶναι ὁ χῶρος T_p".

Ἐπιπλέον ὅμως ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος μᾶς ἔδειξε ὅτι ἂν δοθεῖ ἕνας χάρτης τοῦ p, τότε ὑπάρχει μία προτιμητέα βάση τοῦ T_p, ἡ $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$, $i=1,2,\dots n$, καὶ ὅτι οἱ συνιστῶσες τοῦ διανύσματος ξ ὡς πρὸς αὐτὴ τὴ βάση εἶναι οἱ εἰκόνες τῶν συντεταγμένων x^i, οἱ $\xi(x^i)$.

2. 

Ὅταν ζωγραφίζουμε, συνήθως παριστάνουμε τόν T_p μέ ἕνα "ἐπίπεδο ἐφαπτόμενο στή πολλαπλότητα".

3. Προσοχή, δύο διανύσματα σέ διαφορετικά σημεῖα τῆς πολλαπλότητας δέν μποροῦν νά προστεθοῦν γιατί ἀνήκουν σέ διαφορετικούς διανυσματικούς χώρους. Ἔτσι καί ἡ ὁλοκλήρωση ἑνός διανυσματικοῦ πεδίου πάνω σέ πολλαπλότητα δέν ὁρίζεται (ἀφοῦ κι αὐτό ἐκφράζει ἀθροίσεις), ἐνῶ μπορεῖ νά ὁρισθεῖ τό ὁλοκλήρωμα ἑνός βαθμωτοῦ πεδίου πάνω στήν πολλαπλότητα.

<u>Ὁρισμός:</u> Διανυσματικό πεδίο στήν πολλαπλότητα M εἶναι μία ἀπεικόνιση

$$\xi : M \ni p \longrightarrow \xi(p) \in \bigcup_{p \in M} T_p$$

, τέτοια ὥστε $\xi(p) \in T_p$, δηλαδή εἶναι μία ἐκλογή ἑνός διανύσματος τοῦ T_p, $\forall\, p \in M$.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἔστω διανυσματικό πεδίο $\xi = \xi(p)$ καί συνάρτηση $f \in C(M)$. Σέ κάθε σημεῖο $p \in M$ τό $\xi|_p(f)$ εἶναι ἕνας ἀριθμός. Ἄρα, τό $\xi(f)$ εἶναι μία ἀπεικόνιση $\xi(f) : M \to \mathbb{R}$. Τό διανυσματικό πεδίο ξ λέγεται C^∞ ἐάν ἡ $\xi(f) : M \to \mathbb{R}$ εἶναι C^∞ γιά κάθε συνάρτηση $f \in C(M)$.

Τήν ἰδέα νά θεωροῦμε (καί νά ὁρίζουμε) μία ὀντότητα C^∞ ἐάν παράγει κάτι C^∞ ὅταν ἐπιδρᾶ στό τυχόν C^∞ στό ὁποῖο μπορεῖ νά ἐπιδράσει θά τήν χρησιμοποιήσουμε πάρα πολλές φορές.

4. Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος δείχνει μία πολλὴ σημαντική ἰδιότητα τῶν διανυσμάτων: Τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐπιδράσεως τοῦ διανύσματος ξ στὴν συνάρτηση $f \in C_1(M)$ δέν ἐξαρτᾶται ἀπ' ὅλη τὴν συμπεριφορά τῆς $f: M \to \mathbb{R}$ ἀλλὰ μόνον ἀπό τὴν συμπεριφορά τῆς f σέ μία γειτονιά τοῦ σημείου $p \in M$ (ἀκριβῶς, ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τόν περιορισμό τῆς f, $f|_U : U \to \mathbb{R}$, ὅπου (U, ϕ) εἶναι χάρτης τοῦ M ποὺ περιέχει τό p). Αὐτή εἶναι ἡ ἔννοια κατά τὴν ὁποία τὰ διανύσματα εἶναι τοπικὰ (local) ἀντικείμενα. Π.χ. ἄν κάνουμε τὴν σφαίρα S^7 C^∞-πολλαπλότητα κατά δύο διαφορετικούς τρόπους, οἱ διανυσματικοί χῶροι T_p καί T'_p στό σημεῖο p πού ἀναφέρονται στὶς δύο διαφορετικές πολλαπλότητες εἶναι ἰσόμορφοι (ἀφοῦ καθένας εἶναι ἰσόμορφος καί μέ τόν $\mathbb{R}^7$). Ἐκεῖνα πού μποροῦν νά εἶναι διαφορετικά εἶναι τά C^∞ διανυσματικά πεδία στὶς δύο πολλαπλότητες.

5. Ἀρκετές φορές στὴ βιβλιογραφία τό διάνυσμα ὁρίζεται σάν μιά n-άδα $(\xi^1, \xi^2, \dots \xi^n)$ ἡ ὁποία κατά τὴν ἀλλαγή τοῦ συστήματος συντεταγμένων $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$ μετασχηματίζεται σύμφωνα μέ τή σχέση $\xi^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \xi^j$ (χρησιμοποιοῦμε τὴν σύμβαση ὅτι βουβοί δείκτες προστίθενται). Τώρα πού ξέρουμε τί εἶναι διάνυσμα, ἄς καταλάβουμε τόν προηγούμενο "ὁρισμό". Ἔστω πολ-

λαπλότητα M, σημεῖο $p \in M$, διάνυσμα ξ στό p καί δύο χάρτες τῆς M, (V, ϕ) καί (V', ϕ') πού περιέχουν τό p καί δίνουν συντεταγμένες $\{x^i\}$ καί $\{x^{i'}\}$ σέ μία περιοχή τοῦ p. Ἡ συμβιβαστότητα τῶν χαρτῶν συνεπάγεται τήν ὕπαρξη συναρτήσεων

$x^{i'} = x^{i'}(x^j)$, $i = 1, 2, \ldots n$ πού εἶναι C^∞. Χρησιμοποιώντας τίς φυσιολογικές παρουσιάσεις τοῦ ξ στούς δύο χάρτες παίρνουμε

$$\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p = \xi = \xi^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\Big|_p . \qquad (3)$$

Γιά τυχοῦσα συνάρτηση $g \in C(M)$, τοπικά $g = g(x^j) = g(x^{i'})$ καί προφανῶς ἔχουμε $\dfrac{\partial g}{\partial x^j} = \dfrac{\partial g}{\partial x^{i'}} \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$, $\forall g \in C(M)$, ἀπ' τήν ὁποία παίρνουμε τή σχέση μεταξύ τελεστῶν παραγωγίσεως $\dfrac{\partial}{\partial x^j} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \dfrac{\partial}{\partial x^{i'}}$. Ἄρα, τά φυσιολογικά διανύσματα βάσεως τῶν δύο χαρτῶν συνδέονται μέ

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right)_p \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\Big|_p . \qquad (4).$$

Χρησιμοποιώντας τίς (3) καί (4) καί τό γεγονός ὅτι τά $\dfrac{\partial}{\partial x^{i'}}\Big|_p$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα παίρνουμε

$$\xi^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right)_p \xi^j . \qquad (5)$$

Ὥστε λοιπόν ὁ προηγούμενος "ὁρισμός" σημαίνει ὅτι οἱ φυσιολογικές συντεταγμένες ἑνός διανύσματος ὡς πρός δύο χάρτες συνδέονται μέ τή σχέση (5). Τό διάνυσμα δέν ἀλλάζει ὅταν ἀλλάζουμε χάρτη γιατί δέν ἐξαρτᾶται καθόλου ἀπό τόν χάρτη. Ἐπειδή $\xi^i = \xi(x^i)$, ἡ σχέση (5) σημαίνει

$$\xi(x^{i'}) = \xi\left(x^{i'}(x^j)\right) = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right)_p \xi(x^j) \;,$$

πού εἶναι ἀκριβῶς ὁ κανόνας παραγωγίσεως συνθέτου συναρτήσεως, πρᾶγμα συμβιβαστό μέ τό γεγονός ὅτι τό διάνυσμα εἶναι τελεστής διαφορίσεως.

Θά τελειώσουμε τήν ἑνότητα μέ τόν ὁρισμό καί τή μελέτη τῆς <u>ἐφαπτόμενης δέσμης</u> (tangent bundle) πού ἀποτελεῖ τήν πρώτη γνωριμία μας μέ vector bundles καί fibre bundles, δομές πού χρησιμοποιοῦνται πάρα πολύ τά τελευταῖα χρόνια στή θεωρητική φυσική.

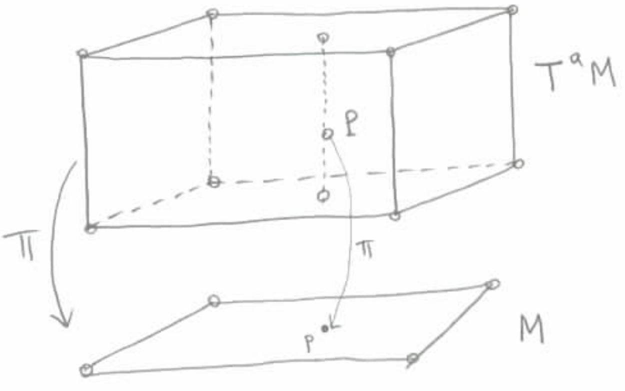
Πρῶτα ἄς τό συζητήσουμε λίγο. Σέ κάθε σημεῖο p τῆς πολλαπλότητας M ἔχουμε "n-διαστάσεις πολλά" διανύσματα. Θεωροῦμε τώρα τό σύνολο T^aM ὅλων τῶν διανυσμάτων σ' ὅλα τά σημεῖα τῆς M. Πόσα εἶναι; Γιά νά προσδιορίσουμε ἕνα σημεῖο τοῦ $T^aM = \bigcup_{p\in M} T_p$ χρειαζόμαστε νά καθορίσουμε n ἀριθμούς πού καθορίζουν τό σημεῖο τῆς M κι' ἄλλους n πού καθορίζουν τό διάνυσμα σ' αὐτό τό σημεῖο, δηλ. χρειαζόμαστε συνολικά $2n$ ἀριθμούς. Περιμένουμε λοιπόν ὅτι τά σημεῖα τοῦ T^aM εἶναι "$2n$-διαστάσεων πολλά", ἄν καί δέν ξέρουμε τό T^aM νά εἶναι κάτι (π.χ. διανυσματικός χῶρος) πού ἔχει διάσταση.

Ὁ σκοπός μας τώρα εἶναι νά ὀργανώσουμε τό σύνολο T^aM σέ μία πολλαπλότητα $2n$-διαστάσεων.

Ἔστω (U, ϕ) ἕνας n-χάρτης τῆς M. Ἀπ' αὐτόν κατασκευάζουμε ἕναν $2n$-χάρτη $(\mathcal{U}, \Phi)$ τοῦ συνόλου T^aM ὡς ἑξῆς: Τό σύνολο $\mathcal{U} = \bigcup_{p \in U} T_p$ εἶναι τό σύνολο τῶν διανυσμάτων σ' ὅλα τά σημεῖα τοῦ U. Ἄς εἶναι $(x^1, x^2, \dots x^n)$ οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου $p \in U$ ἀναφορικά μέ τόν χάρτη (U, ϕ) καί $(\xi^1, \xi^2, \dots \xi^n)$ οἱ φυσιολογικές συνιστῶσες τοῦ διανύσματος στό p ξ ὡς πρός τόν ἴδιο χάρτη. Ἡ ἀπεικόνιση Φ εἶναι ἡ

$$\Phi : \mathcal{U} \ni (\xi \text{ στό } p) \longrightarrow \Phi(\xi \text{ στό } p) = (x^1, x^2, \dots x^n, \xi^1, \xi^2, \dots \xi^n) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Προφανῶς ἡ Φ εἶναι ἀμφιμονότιμη καί ὁ $(\mathcal{U}, \Phi)$ εἶναι ἕνας $2n$-χάρτης τοῦ T^aM. Ἐπαναλαμβάνοντας τήν προηγούμενη κατασκευή γιά κάθε χάρτη τῆς M παίρνουμε μία συλλογή χαρτῶν τοῦ T^aM πού τό καλύπτουν. Τέλος, ἡ συμβιβαστότητα τῶν (U_i, ϕ_i) συνεπάγεται τήν συμβιβαστότητα τῶν $(\mathcal{U}_i, \Phi_i)$ καί τό σύνολο T^aM γίνεται μία C^∞-πολλαπλότητα $2n$-διαστάσεων, πού λέγεται ἡ ἐφαπτόμενη δέσμη τῆς M. (Ἐάν ἡ M εἶναι C^p πολλαπλότητα τότε ἡ T^aM εἶναι ἐν γένει C^{p-1} πολλαπλότητα).



Συνήθως τήν παριστάνουμε μέ τό διπλανό σχῆμα.

Ὑπάρχει ἡ ἀπεικόνιση

$$\pi : T^a M \ni (\xi \text{ στό } p) \longrightarrow \pi(\xi \text{ στό } p) = p \in M ,$$

πού ξεχνᾶ τό διάνυσμα ξ καί θυμᾶται μόνον τό σημεῖο τῆς M στό ὁποῖο τό διάνυσμα ἀναφέρεται. Ἡ π λέγεται προβολή (projection) τῆς T^aM στήν M. Ἡ $M = \pi(T^aM)$ λέγεται καί βάση τοῦ bundle T^aM. Γιά κάθε σημεῖο $p \in M$, τό σύνολο $\pi^{-1}(p) = T_p$ στή γλῶσσα τῶν bundles ἀναφέρεται σάν ἡ ἶνα (fibre) πάνω στό σημεῖο p. Ἀναφέρουμε ἀκόμη δύο χαρακτηριστικά τῆς ἐφαπτόμενης δέσμης :

i) Ὅλες οἱ ἶνες εἶναι ἰσομορφικές (σάν διανυσματικά χῶροι).

ii) Τοπικά ἡ ἐφαπτόμενη δέσμη — δηλαδή ἡ πολλαπλότητα $\pi^{-1}(V)$ ὅπου (V,ϕ) εἶναι χάρτης τῆς M — εἶναι διαμορφική πρός τό καρτεσιανό γινόμενο τῶν πολλαπλοτήτων V καί $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ εἶναι μία εἰκόνα, ἕνας ἀντιπρόσωπος τῶν ἰνῶν) καί ἐπιπλέον ὑπάρχει διαμορφισμός πού διατηρεῖ τίς ἶνες καί τήν δομή διανυσματικοῦ χώρου πού ἔχουν οἱ ἶνες. Πράγματι, σύμφωνα μέ τή κατασκευή τῆς προηγούμενης σελίδας, τό σύνολο $\pi^{-1}(V)$ καλύπτεται μέ τόν χάρτη $(\mathcal{U},\Phi)$ καί γίνεται ἔνοδα πολλαπλότητα. Δουλεύουμε σ' αὐτό τόν χάρτη. Ἡ ἀπεικόνιση

$$\Psi : V \times \mathbb{R}^n \ni ((x^1,\dots x^n),(\xi^1,\dots\xi^n)) \longrightarrow (x^1,\dots x^n, \xi^1,\dots \xi^n) \in \pi^{-1}(V)$$

εἶναι προφανῶς ἕνας διαμορφισμός τῶν $V \times \mathbb{R}^n$ καί

$\pi^{-1}(V)$. Λέμε ὅτι ὁ διαμορφισμός αὐτός διατηρεῖ τίς ἶνες γιατί ἀπεικονίζει τό σύνολο $\{(p,\xi),\ \forall \xi\in\mathbb{R}^n\}$ στήν ἶνα $\pi^{-1}(p)$. Αὐτή ἡ ἰδιότητα ἐκφράζεται μέ τήν σχέση $(\Pi\circ\Psi)((p,\xi)) = p$. Ἐπιπλέον ὁ Ψ διατηρεῖ τήν δομή τῶν διανυσματικῶν χώρων: ἄν ἡ πράξη $\boxplus$ "πρόσθεση δύο σημείων τοῦ ἐφαπτόμενου χώρου πού ἀνήκουν στήν ἴδια ἶνα" ὁρισθεῖ ἀπό τήν

$$\boxplus : T_p\times T_p \ni (p,\xi)\times(p,\zeta) \longrightarrow (p,\xi+\zeta)\in T_p ,$$

ὁ διαμορφισμός Ψ ἱκανοποιεῖ τή σχέση

$$\Psi(p,\xi+\alpha\zeta) = \Psi(p,\xi)\boxplus\alpha\Psi(p,\zeta) .$$

Οἱ παραπάνω παρατηρήσεις ἁπλῶς λένε ὅτι τοπικά ὁ ἐφαπτόμενος χῶρος εἶναι ἀκριβῶς τό ἴδιο πρᾶγμα μέ τό καρτεσιανό γινόμενο ἑνός κομματιοῦ τῆς βάσεως ἐπί τήν ἶνα. Συνολικά (globally) ὅμως, ὁ ἐφαπτόμενος χῶρος μπορεῖ νά εἶναι πολύ πιό πολύπλοκος.

9. Γραμμική Ἄλγεβρα.

(Ἡ Ενότητα αὐτή εἶναι τελείως ἀνεξάρτητη ἀπό πολλαπλότητες).

(A) Ἔστω V διανυσματικός χῶρος διαστάσεως n πάνω στό σῶμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $\mathbb{R}$. Ἡ ἀπεικόνιση $f: V \to \mathbb{R}$ λέγεται <u>γραμμική</u> (linear) ἐάν

$$f(x+\alpha y) = f(x) + \alpha f(y) \quad , \quad \forall x, y \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Θεωροῦμε τό σύνολο

$$V^* = \{ f: V \to \mathbb{R} \ , \ f \text{ γραμμική} \}.$$

Στό V^* ὁρίζουμε ἐσωτερική πρόσθεση

$$f+g \ : \ V \ni x \to (f+g)(x) = f(x) + g(x) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in V,$$

καί ἐξωτερικό πολλαπλασιασμό μέ πραγματικό ἀριθμό

$$\alpha f: \ V \ni x \longrightarrow (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Μ' αὐτές τις πράξεις ὁ V^* γίνεται διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα $\mathbb{R}$ καί λέγεται ὁ <u>δυϊκός χῶρος</u> (dual vector space) τοῦ V.

<u>Θεώρημα:</u> $\dim V^* = \dim V$

<u>Ἀπόδειξη:</u> Ἔστω $\dim V = n$ καί $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ μία βάση τοῦ V. Παρατηροῦμε ὅτι λόγω τῆς γραμμικότητας τό τυχόν στοιχεῖο $f \in V^*$ ὁρίζεται ἄν ὁρισθεῖ ἡ δράση του στά διανύσματα τῆς βάσεως, δηλαδή ἐάν ὁρισθοῦν τά $f(e_j)$, $j = 1, 2, \dots n$. Ὁρίζουμε τίς ἑξῆς n τό πλῆθος γραμμικές ἀπεικονίσεις:

$$f_1: \quad f_1(e_1) = 1, \quad f_1(e_2) = 0, \ \dots \ f_1(e_n) = 0.$$

$f_2: f_2(e_1) = 0, \ f_2(e_2) = 1, \dots \quad f_2(e_n) = 0$

- -

καὶ γενικὰ τὴν f_i ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ἐὰν } i=j \\ 0 & \text{ἐὰν } i \neq j \end{cases} = \text{τὸ δέλτα τοῦ Kronecker.}$$

i) Τὰ $\{f_1, f_2, \dots f_n\}$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. Πράγματι, ἔστω ὅτι $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, δηλ. ὅτι $(a_1 f_1 + \dots + a_n f_n)(x) = 0$, $\forall x \in V$. Γιὰ $x = e_k$ δίνει $a_k = 0$ καὶ γιὰ $k = 1, 2, \dots n$ ἀποδεικνύεται ἡ γραμμικὴ ἀνεξαρτησία.

ii) Τὰ $\{f_1, f_2, \dots f_n\}$ ἀποτελοῦν βάση τοῦ V^*. Πράγματι, ἔστω τυχὸν $f \in V^*$. Ὀνομάζουμε $f(e_i) = a_i \in \mathbb{R}$. Θὰ δείξουμε ὅτι $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n$.

Τὸ τυχὸν $x \in V$ τὸ γράφουμε $x = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$.

Ἄρα $f(b_1 e_1 + \dots + b_n e_n) = b_1 f(e_1) + \dots + b_n f(e_n) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$.

Ἐπίσης $(a_1 f_1 + \dots + a_n f_n)(b_1 e_1 + \dots + b_n e_n) =$

$= a_1 f_1 (b_1 e_1 + \dots + b_n e_n) + \dots + a_n f_n (b_1 e_1 + \dots + b_n e_n) =$

$= \dots = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$. ∎

Οἱ διανυσματικοὶ χῶροι V καὶ V^* εἶναι ἰσόμορφοι σὰν χῶροι μὲ τὴν ἴδια (πεπερασμένη!) διάσταση πάνω στὸ ἴδιο σῶμα, δὲν μπορεῖ νὰ βρεθεῖ ὅμως ἕνας φυσιολογικὸς ἰσομορφισμὸς μεταξὺ τῶν V καὶ V^* (ὑπάρχουν πολλοὶ ἰσομορφισμοί, ἄπειροι μάλιστα, χωρὶς κανεὶς ἀπ' αὐτοὺς νὰ εἶναι προτιμητέος ἔναντι τῶν ὑπολοίπων).

Ἂν ὅμως καθορισθεῖ μία βάση τοῦ V, τότε σ' αὐτήν ἀντιστοιχεῖ μία βάση τοῦ V^*.

Φυσικά μποροῦμε νά κατασκευάσουμε καί τόν $(V^*)^*$, κ.τ.λ.π. Ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ $(V^*)^*$ εἶναι φυσιολογικά ἰσόμορφος (naturally isomorphic) μέ τόν V καί γι' αὐτό δέν τόν διακρίνουμε ἀπό τόν V. Δουλεύουμε λοιπόν μόνον μέ τούς V καί V^*.

(B) Θά καθιερώσουμε τώρα ἕναν συμβολισμό, τόν <u>index notation</u>, πού πρωτοπροτάθηκε ἀπό τόν R. Penrose, καί χρησιμοποιεῖται πολύ στή Σχετικότητα. Εἶναι ἕνας τρόπος νά συμβολίζουμε τανυστές.

Ἂς εἶναι $V^a, V^b, V^c, \ldots$ διάφοροι διανυσματικοί χῶροι πεπερασμένων διαστάσεων, δηλ. διαφορετικοί διανυσματικοί χῶροι διακρίνονται ὅταν ἔχουν διαφορετικό δείκτη. Τά στοιχεῖα τοῦ V^a παριστάνονται μέ $\xi^a, \eta^a, \sigma^a, t^a, \ldots$, δηλαδή μέ ἕνα μικρό γράμμα καί ἀκριβῶς τόν ἴδιο δείκτη πού χαρακτηρίζει καί τόν διανυσματικό χῶρο. Π.χ., ἄν δοθεῖ τό ξ^c ξέρουμε ἀμέσως ὅτι εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ V^c. Ἀποφασίζουμε ἐπίσης νά παριστάνουμε μέ $V_a, V_b, V_c, \ldots$ ἀντίστοιχα τούς δυϊκούς χώρους τῶν $V^a, V^b, V^c, \ldots$, καί μέ $\mu_b, \xi_b, \eta_b, \ldots$, π.χ., τά στοιχεῖα τοῦ V_b. Κατά συνέπεια, "δύο μικρά γράμματα μέ δείκτες" προστίθενται ἐάν ἔχουν ἀκριβῶς τόν ἴδιο δείκτη καί ἀκριβῶς στήν ἴδια θέση, εἴτε πάνω εἴτε κάτω.

Ἀποφασίζουμε ἐπίσης νά παριστάνουμε τόν ἀριθμό $\mu_a(\xi^a)$ μέ $\mu_a \xi^a$ ἤ $\xi^a \mu_a$. Δύο παρατηρήσεις τώρα πού δείχνουν ὅτι ὁ συμβολισμός μας εἶναι ἀρκετά καλός.

i) Ὁ συμβολισμός προτείνει ὅτι

$(\alpha\mu_a + \beta\sigma_a)(\gamma\xi^a + \delta\zeta^a) = \alpha\gamma\,\mu_a\xi^a + \alpha\delta\,\mu_a\zeta^a + \beta\gamma\,\sigma_a\xi^a + \beta\delta\,\sigma_a\zeta^a$

$\forall\ \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$, σχέση πού μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ἄν θυμηθοῦμε τόν τρόπο πού ὁρίσθηκαν οἱ πράξεις στόν V^* καί τήν γραμμικότητα τῶν στοιχείων του.

ii) Ὁ συμβολισμός μας ἐπιτρέπει νά δοῦμε τό $\mu_a(\xi^a) = \mu_a\xi^a = \xi^a\mu_a$ καί σάν $\xi^a(\mu_a)$, δηλαδή νά δοῦμε τά διανύσματα σάν γραμμικές ἀπεικονίσεις ἀπό τόν $V^* \longrightarrow \mathbb{R}$, πού ἐνισχύει τήν ἄποψη ὅτι ὁ ρόλος τῶν V καί V^* εἶναι ἀπόλυτα δυϊκός.

Τήν ἄποψη νά βλέπουμε τά διανύσματα σάν γραμμικές ἀπεικονίσεις θά τήν κρατήσουμε καί θά τήν γενικεύσουμε. Πολύ σύντομα θά ὁρίσουμε τούς <u>ταννυστές</u> (tensors) σάν πολυγραμμικές ἀπεικονίσεις ἀπό διανυσματικούς χώρους $V^a, V^b, \ldots V_a, V_b, \ldots$ στό $\mathbb{R}$.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἡ ἀπεικόνιση $f: V^a \times V^b \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται διγραμμική ἐάν

$$f(\alpha\xi^a + \beta\lambda^a, \mu^b) = \alpha f(\xi^a, \mu^b) + \beta f(\lambda^a, \mu^b) \quad \text{καί}$$

$$f(\xi^a, \alpha\mu^b + \beta\sigma^b) = \alpha f(\xi^a, \mu^b) + \beta f(\xi^a, \sigma^b),$$

$\forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ καί γιά τυχαία διανύσματα πού ἀνήκουν στούς ἀντίστοιχους χώρους, δηλαδή ἐάν εἶναι γραμμική ὡς πρός κάθε μία ἀπό τίς μεταβλητές της.

Παρόμοια ὁρίζονται καὶ οἱ πολυγραμμικές (multilinear) ἀπεικονίσεις: ἀπεικονίσεις ἀπὸ τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο πολλῶν διανυσματικῶν χώρων στοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς οἱ ὁποῖες εἶναι γραμμικές ὡς πρὸς κάθε μεταβλητή τους.

Γ Θεωροῦμε τώρα μία τυχαία διατεταγμένη ἐκλογή διανυσματικῶν χώρων πάνω στὸ σῶμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (γενικότερα πάνω στὸ ἴδιο σῶμα) τέτοια ὥστε κανεὶς διανυσματικὸς χῶρος νὰ μὴν ἐμφανίζεται περισσότερες τῆς μιᾶς φορᾶς στὴν ἐκλογή καὶ κανεὶς νὰ μὴν ἐμφανίζεται συγχρόνως μὲ τὸν δυϊκό του. Στὸν συμβολισμὸ ποὺ μόλις καθιερώσαμε αὐτὸ ἐκφράζεται εὔκολα: κανεὶς δείκτης δὲν ἐμφανίζεται περισσότερο ἀπὸ μία φορά. Π.χ, $\{V^c, V_a, V_d, V^b, V^e\}$ εἶναι μία ἐπιτρεπτή ἐκλογή. Θεωροῦμε τὸ σύνολο $V_c{}^{ad}{}_{be}$ τῶν πολυγραμμικῶν ἀπεικονίσεων ἀπὸ τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο τῶν παραπάνω διανυσματικῶν χώρων στοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς,

$$V_c{}^{ad}{}_{be} = \{T \mid T: V^c \times V_a \times V_d \times V^b \times V^e \longrightarrow \mathbb{R},\ T \text{ πολυγραμμική}\}.$$

Ὁρίζοντας πρόσθεση στὸ σύνολο $V_c{}^{ad}{}_{be}$ καὶ πολλαπλασιασμὸ στοιχείων τοῦ $V_c{}^{ad}{}_{be}$ μὲ πραγματικοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὸν συνηθισμένο τρόπο, τὸ σύνολο $V_c{}^{ad}{}_{be}$ γίνεται διανυσματικὸς χῶρος. Συνεπεῖς μὲ τὸν νέο μας συμβολισμό, συμβολίζουμε μὲ $T_c{}^{ad}{}_{be}$, $\alpha_c{}^{ad}{}_{be}$, $k_c{}^{ad}{}_{be}$, κ.λ.π. τὰ στοιχεῖα τοῦ $V_c{}^{ad}{}_{be}$.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ διανυσματικοῦ χώρου $V_c{}^{ad}{}_{be}$, καὶ ὅλων τῶν χώρων ποὺ κατασκευάζονται παρόμοια ἀπὸ τοὺς ἀρχικοὺς διανυσματικοὺς χώρους, θὰ λέγονται <u>ταννυστές</u> (tensors). Γιὰ τὶς εἰκόνες τους στοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς θὰ γράφουμε

$$T_c{}^{ad}{}_{be}\left(\left(\kappa^c, \lambda_a, \mu_d, \nu^b, \xi^e\right)\right) = T_c{}^{ad}{}_{be}\,\kappa^c \lambda_a \mu_d \nu^b \xi^e =$$

$$= T_c{}^{ad}{}_{be}\,\mu_d \xi^e \kappa^c \lambda_a \nu^b = \lambda_a \mu_d\, T_c{}^{ad}{}_{be}\,\kappa^c \xi^e \nu^b =$$

$$= \ldots\,,$$

δηλαδὴ θὰ τὶς γράφουμε σὰν "formal" γινόμενα τοῦ ταννυστῆ μὲ τὰ διανύσματα-μεταβλητές, χωρὶς νὰ ἐνδιαφερόμαστε γιὰ τὴ σειρὰ τῶν ὅρων τοῦ γινομένου. Γιὰ νὰ ποῦμε ὅλη τὴν ἀλήθεια, στὴν ἀρχικὴ ἐπιλογὴ τῶν διατεταγμένων διανυσματικῶν χώρων ἀπαιτήσαμε ὅλοι οἱ χῶροι νὰ εἶναι διαφορετικοὶ γιὰ νὰ μποροῦμε νὰ παριστάνουμε τὶς εἰκόνες τῶν πολυγραμμικῶν ἀπεικονίσεων μὲ τὸν παραπάνω τρόπο. [$T_c{}^{aa}{}_{be}\,\kappa^c \lambda_a \mu_a \nu^b \xi^e$ εἶναι διφορούμενο ὅταν ἡ τάξη τῶν ὅρων δὲν παίζει ρόλο].

<u>Παρατήρηση 1η</u>: Οἱ ταννυστές, σὰν στοιχεῖα κάποιων διανυσματικῶν χώρων, εἶναι καὶ αὐτοὶ διανύσματα. Μόνο ποὺ αὐτοὶ οἱ ἀρκετὰ μπερδεμένοι διανυσματικοὶ χῶροι ἔχουν κατασκευασθεῖ ἀπὸ ἄλλους ἁπλούστερους, καὶ ποὺ ἀποφασίζουμε νὰ βλέπουμε

τούς ταννστές ὄχι σάν ἁπλά διανύσματα ἀλλά σάν ἀπεικονίσεις μεταξύ αὐτῶν τῶν ἁπλούστερων διανυσματικῶν χώρων. Ἀπό κάθε συλλογή ἀρχικῶν διανυσματικῶν χώρων μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἕνα ἄπειρο πλῆθος ταννστῶν, ταννστές κάποιου εἴδους γιά κάθε συλλογή δεικτῶν. Οἱ δείκτες ἔχουν ἕναν μόνον σκοπό: νά μᾶς ὑπενθυμίζουν σέ ποιό διανυσματικό χῶρο ὁ ταννστής ἀνήκει καί, κατά συνέπεια καί, ποιές ἀπεικονίσεις παριστάνει.

Γιά νά συνεννοούμαστε μέ τόν ὑπόλοιπο κόσμο, ἀναφέρουμε τήν καθιερωμένη ὁρολογία. Οἱ πάνω δείκτες τῶν ταννστῶν λέγονται <u>ἀνταλλοίωτοι</u> (contravariant), οἱ κάτω δείκτες <u>συναλλοίωτοι</u> (covariant). <u>Ἀνταλλοίωτη τάξη</u> (contravariant rank) τοῦ ταννστῆ λέγεται ὁ ἀριθμός τῶν ἀνταλλοίωτων δεικτῶν του, συναλλοίωτη τάξη (covariant rank) ὁ ἀριθμός τῶν συναλλοίωτων δεικτῶν του καί ἕνας ταννστής μέ m ἀνταλλοίωτη καί n συναλλοίωτη τάξη λέγεται καί ταννστής $\binom{m}{n}$. Ταννστής τάξεως $\binom{m}{0}$ λέγεται ἀνταλλοίωτος, τάξεως $\binom{0}{n}$ λέγεται συναλλοίωτος, τάξεως $\binom{1}{0}$ διάνυσμα, τάξεως $\binom{0}{1}$ 1-μορφή (one form ἤ covector) καί τάξεως $\binom{0}{0}$ βαθμωτό ἤ ἀριθμός.

(Δ) Θὰ δοῦμε τώρα ὅτι κάθε τανυστής, ποὺ ὁρίσθηκε σὰν μία ἀπεικόνιση ἀπὸ κάποιο καρτεσιανὸ γινόμενο διανυσματικῶν χώρων στοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς, παριστάνει συγχρόνως καὶ πολλὲς ἄλλες πολυγραμμικὲς ἀπεικονίσεις.

Ἔστω ὁ τανυστὴς

$$T^a{}_{bc}{}^d : V_a \times V^b \times V^c \times V_d \ni (\alpha_a, \beta^b, \gamma^c, \delta_d) \longrightarrow T^a{}_{bc}{}^d \alpha_a \beta^b \gamma^c \delta_d \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Ἀποφασίζουμε νὰ καθορίσουμε (νὰ σταθεροποιήσουμε) τὰ διανύσματα α_a, β^b καὶ γ^c. Τότε ὅμως μποροῦμε νὰ δοῦμε τὴν ἀπεικόνιση (1) καὶ σὰν ἀπεικόνιση $V_d \longrightarrow \mathbb{R}$, ποὺ εἶναι καὶ γραμμική, καὶ ποὺ ξέρουμε ὅτι δὲν εἶναι τίποτε παραπάνω ἀπὸ ἕνα στοιχεῖο τοῦ διανυσματικοῦ χώρου V^d. Τὴν ἀπεικόνιση αὐτὴ θὰ τὴν συμβολίζουμε

$$T^a{}_{bc}{}^d \alpha_a \beta^b \gamma^c : V_d \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (2)$$

Ὥστε, $T^a{}_{bc}{}^d \alpha_a \beta^b \gamma^c \in V^d$. Βλέπουμε λοιπὸν ὅτι ἂν κάνουμε τὴ σύμβαση νὰ ἀγνοοῦμε τοὺς δεῖκτες ποὺ ἐμφανίζονται δύο φορὲς (πάντοτε μία σὰν συναλλοίωτοι καὶ μία σὰν ἀνταλλοίωτοι δεῖκτες) σὲ τυπικὰ (formal) γινόμενα τανυστῶν μὲ διανύσματα, ὁ συμβολισμός μας μᾶς δείχνει ἀμέσως ποὺ ἀνήκει τὸ διάνυσμα ποὺ παράγεται.

Αὐτὲς τὶς ἰδέες θὰ τὶς γενικεύσουμε λίγο. Ἀποφασίζουμε τώρα νὰ καθορίσουμε τὰ διανύσματα α_a καὶ β^b καὶ βλέπουμε τὴν ἀπεικόνιση (1) σὰν τὴν πολυγραμμικὴ ἀπεικόνιση

$$T^a{}_{bc}{}^d \alpha_a \beta^b : V^c \times V_d \ni (x^c, y_d) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow T^a{}_{bc}{}^d \alpha_a \beta^b x^c y_d \in \mathbb{R} \quad . \qquad (3)$$

Ἄρα λοιπόν, ἡ $T^a{}_{bc}{}^d \alpha_a \beta^b$ εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ χώρου $V_c{}^d$, καί ἡ σύμβαση γιά τήν ἀγνόηση τῶν ἐπαναλαμβανόμενων δεικτῶν μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ ἀπό τά διανύσματα καί στούς τανυστές.

Ἄς δοῦμε τώρα τήν ἀπεικόνιση (3) ἀπό μία διαφορετική σκοπιά. Γιά κάθε διανύσματα α_a καί β^b ὁ τανυστής $T^a{}_{bc}{}^d$ ὁρίζει ἕνα στοιχεῖο τοῦ χώρου $V_c{}^d$. Ὥστε

$$T^a{}_{bc}{}^d : V_a \times V^b \ni (\alpha_a, \beta^b) \longrightarrow T^a{}_{bc}{}^d \alpha_a \beta^b \in V_c{}^d, \qquad (4)$$

δηλαδή ὁ τανυστής εἶναι καί πολυγραμμική ἀπεικόνιση ἀπό τό καρτεσιανό γινόμενο διανυσματικῶν χώρων (πλήθους μικροτέρου ἀπό τό πλῆθος τῶν δεικτῶν του) σέ ἄλλους χώρους τανυστῶν μέ μικρότερη τάξη. Καί εἶναι προφανές ὅτι ἕναν συγκεκριμένο τανυστή μποροῦμε νά τόν δοῦμε σάν μιά τέτοια ἀπεικόνιση κατά πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Π.χ.

$$\begin{aligned} T^a{}_{bc}{}^d &: V_a \longrightarrow V_{bc}{}^d \ , \\ T^a{}_{bc}{}^d &: V^b \times V_d \longrightarrow V^a{}_c \ , \\ T^a{}_{bc}{}^d &: V_a \times V^c \times V_d \longrightarrow V_b \ , \quad \text{κ.λ.π.} \end{aligned} \qquad (5)$$

Οἱ ὁδηγίες γιά τή γραφή αὐτῶν τῶν ἀπεικονίσεων εἶναι φανερές. Τό πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι καρτεσιανό γινόμενο διανυσματικών χώρων μέ δείκτες ἀπό τούς δείκτες τοῦ τανυστῆ τοποθετημένους στήν ἀντίθετή τους θέση (πάνω ⇄ κάτω). Τό πεδίο τιμῶν εἶναι χῶρος τανυστῶν μέ ἀκριβῶς τούς ὑπόλοιπους δείκτες διατηρημένους στή θέση πού εἶχαν καί στόν τανυστή.

Οἱ παραπάνω παρατηρήσεις δίνουν καί τήν ἀπάντηση στό ἐρώτημα: "Ἄν δοθῆ ἕνας τανυστικός χῶρος, κατά πόσο μποροῦμε νά κατασκευάσουμε τούς ἀρχικούς διανυσματικούς χώρους "ἐξ ὧν συνετέθη"; Ἐάν δοθοῦν $(n-1)$ ὁποιοιδήποτε ἀπό τούς ἀρχικούς διανυσματικούς χώρους, ὅπου n εἶναι ὁ συνολικός ἀριθμός τῶν δεικτῶν τοῦ τανυστικοῦ χώρου, τότε μποροῦμε νά κατασκευάσουμε τόν n-στό. Ἄν ὅμως μᾶς δοθοῦν $n-p$ μόνον ἀπ' αὐτούς, $1 \leq p \leq n$, τότε μποροῦμε μόνον νά κατασκευάσουμε ἕναν τανυστικό χῶρο μέ συνολική τάξη (= συνολικό ἀριθμό δεικτῶν) p.

(E) Θά ὁρίσουμε τώρα δύο πράξεις μεταξύ τανυστῶν, γινόμενο καί πρόσθεση.

Ἔστω δύο τανυστές, π.χ. $T^a{}_b$ καί $\Sigma_c{}^{de}$ πού δέν ἔχουν κανένα κοινό δείκτη. Τό γινόμενό τους ὁρίζεται νά εἶναι ὁ ἑξῆς τανυστής:

$$M^a{}_{bc}{}^{de} = T^a{}_b \Sigma_c{}^{de} : \quad V_a \times V^b \times V^c \times V_d \times V_e \ni (\alpha_a, \beta^b, \gamma^c, \delta_d, \varepsilon_e) \to$$
$$\longrightarrow (T^a{}_b \alpha_a \beta^b)(\Sigma_c{}^{de} \gamma^c \delta_d \varepsilon_e) \in \mathbb{R} . \quad (6)$$

Ἡ $M^a{}_{bc}{}^{de}$ εἶναι προφανῶς πολυγραμμική καί κατά συνέπεια ἡ ἀπεικόνιση (6) ὁρίζει τανυστή. Τό γινόμενο τανυστῶν εἶναι προσεταιριστικό $[(T^a{}_b \Sigma^c{}_e{}^d) Y^m{}_n = T^a{}_b(\Sigma^c{}_e{}^d Y^m{}_n)]$, ἐπιμεριστικό ὡς πρός τήν πρόσθεση $[T^a{}_b(\Sigma^c{}_d{}^e + M^c{}_d{}^e) = T^a{}_b \Sigma^c{}_d{}^e + T^a{}_b M^c{}_d{}^e]$ καί ἀντιμεταθετικό κατά μία ἔννοια πού θά γίνει προφανής μόλις ὁρίσουμε παρακάτω τήν ἑπόμενη πράξη μεταξύ τανυστῶν. Τό γινόμενο ὅπως ὁρίσθηκε γενικεύει τόν πολλαπλασιασμό τανυστή μέ πραγματικό ἀριθμό. Θά ἤθελα ἐπίσης νά τονίσω ὅτι ὁ ὁρισμός τοῦ γινομένου δέν κάνει τούς χώρους τανυστῶν ἄλγεβρες γιατί δέν ὁρίσθηκε τό γινόμενο δύο στοιχείων τοῦ ἴδιου διανυσματικοῦ χώρου, οὔτε καί τό γινόμενο εἶναι στοιχεῖο τοῦ ἴδιου διανυσματικοῦ χώρου.

Ἡ δεύτερη πράξη εἶναι ἡ πρόσθεση δύο τανυστῶν μέ ἀκριβῶς τούς ἴδιους δείκτες καί ἀκριβῶς στήν ἴδια θέση, πάνω ἤ κάτω, ἀλλά, πιθανῶς, διαφορετική σειρά. Γιά νά ὁρίσουμε τήν πράξη αὐτή κάνουμε χρήση τοῦ γεγονότος ὅτι ὑπάρχει ἕνας φυσιολογικός ἰσομορφισμός μεταξύ τῶν διανυσματικῶν χώρων, π.χ., $V_m{}^p{}_q$, $V^p{}_{mq}$, $V^p{}_{qm}$, $V_{qm}{}^p$ κ.λ.π. Πράγματι, ὁ $T_m{}^p{}_q \in V_m{}^p{}_q$ ἀντιστοιχεῖ στόν $M^p{}_{qm} \in V^p{}_{qm}$ γιά τόν ὁποῖο ἰσχύει

$$T_m{}^p{}_q\, \alpha^m \beta_p \gamma^q = M^p{}_{qm}\, \alpha^m \beta_p \gamma^q, \quad \forall \alpha^m \in V^m,$$

$\forall \beta_p \in V_p$, $\forall \gamma^q \in V^q$. Εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι γιά κάθε τανυστή $T_m{}^p{}_q$ ὑπάρχει μοναδικός τανυστής $M^p{}_{qm}$ πού ἱκανοποιεῖ τήν παραπάνω ταυτότητα καί ὅτι ἡ ἀντιστοιχία πού ὁρίζεται κατ' αὐτό τόν τρόπο εἶναι ἰσομορφισμός διανυσματικῶν χώρων.

ὁ ἰσομορφισμός εἶναι φυσιολογικός γιατί δέν χρειάζεται κανένα ἐπιπλέον δεδομένο γιά νά βρεθῆ. Χρησιμοποιώντας αὐτό τόν ἰσομορφισμό βρίσκουμε τήν πρόσθεση $T_m{}^p{}_q + \Sigma^p{}_{qm}$ ὡς ἑξῆς: $T_m{}^p{}_q + \Sigma^p{}_{qm}$ εἶναι τό στοιχεῖο τοῦ $V_m{}^p{}_q$ πού παίρνουμε ἐάν προσθέσουμε τό $T_m{}^p{}_q$ μέ τήν ἰσομορφική εἰκόνα τοῦ $\Sigma^p{}_{qm}$ στόν $V_m{}^p{}_q$ ἤ τό στοιχεῖο τοῦ $V^p{}_{qm}$ πού παίρνουμε ἐάν προσθέσουμε τό $\Sigma^p{}_{qm}$ μέ τήν ἰσομορφική εἰκόνα τοῦ $T_m{}^p{}_q$ στόν $V^p{}_{qm}$ ἤ ..., δηλαδή προσθέτουμε modulo τούς παραπάνω φυσιολογικούς ἰσομορφισμούς.

(2) Μέχρι τώρα βρίσαμε καί μελετήσαμε τανυστές ξεκινώντας ἀπό πολλούς, διάφορους ἐν γένει, διανυσματικούς χώρους. Τώρα θά ἐξειδικεύσουμε λίγο τους τανυστές, πρᾶγμα πού θά μᾶς ἐπιτρέψει νά βρίσουμε δύο ἐπιπλέον πράξεις σ' αὐτούς, ἀντικατάσταση δεικτῶν καί συστολή δεικτῶν. Ὅλοι οἱ τανυστές πού χρησιμοποιοῦνται στή φυσική ἀνήκουν σ' αὐτή τήν ἐξειδικευμένη κατηγορία τανυστῶν. Ἡ βασική παραδοχή εἶναι ὅτι τώρα πλέον ἔχουμε ἕναν μόνον διαθέσιμο διανυσματικό χῶρο ἀπό τόν ὁποῖο θέλουμε νά κατασκευάσουμε τανυστές.

Ἔστω διανυσματικός χῶρος V καί $V^a, V^b, V^c, \ldots$ διάφορα ἀντίτυπα αὐτοῦ, ἀπαιτοῦμε δηλαδή ὅτι μᾶς δόθηκαν καί ἰσομορφισμοί $i^a: V \longrightarrow V^a$, $i^b: V \longrightarrow V^b$, ... μεταξύ τοῦ ἀρχικοῦ διανυσματικοῦ χώρου καί τῶν ἀντιτύπων του. Καθιερώνουμε τόν συμβολισμό $i^a(\xi) = \xi^a$, $i^b(\xi) = \xi^b, \ldots$, δηλαδή οἱ εἰκόνες τοῦ $\xi \in V$ ἀπό τούς διάφορους ἰσομορφισμούς ἀπεικονίζονται μέ τό ἴδιο μικρό γράμμα καί διαφορετικό πάνω δείκτη πού δηλώνει membership. Παρόμοια συμβολίζουμε καί τά στοιχεῖα τῶν δυϊκῶν χώρων $\mu\in V^*$, $\mu_a\in V_a$, $\mu_b\in V_b$, ὑποθέτοντας ὅτι βρίσκαμε μία ἀπεικόνιση $g: V\longrightarrow V^*$ καί μετά, χρησιμοποιώντας τήν g, ἐπεκτείναμε τούς ἀρχικούς ἰσομορφισμούς καί σέ ἰσομορφισμούς μεταξύ τῶν V^* καί $V_a, V_b, \dots$ Εἴμαστε ἕτοιμοι τώρα νά βρίσουμε *ἀντικατάσταση δεικτῶν* (index substitution).

Θεωροῦμε χῶρο ταννυστῶν, π.χ. $V^a{}_{bc}{}^d$ καί στοιχεῖο του $T^a{}_{bc}{}^d$. Διαλέγουμε δύο δείκτες, ἕναν ἀπό τή συλλογή τῶν δεικτῶν τοῦ $T^a{}_{bc}{}^d$, π.χ. d, καί ἕναν πού δέν ἀνήκει στή συλλογή, π.χ. m. Ὁ ἰσομορφισμός μεταξύ τῶν V^d καί V^m (ὁ $i^m\circ(i^d)^{-1}$) μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά νά βρίσει ἰσομορφισμό (ὄχι φυσιολογικό!) μεταξύ τῶν $V^a{}_{bc}{}^d$ καί $V^a{}_{bc}{}^m$, τόν

$$V^a{}_{bc}{}^d \ni T^a{}_{bc}{}^d \longrightarrow T^a{}_{bc}{}^m \in V^a{}_{bc}{}^m$$

ὅπου

$$T^a{}_{bc}{}^d \xi_d = T^a{}_{bc}{}^m \xi_m, \quad \forall \xi_d \in V_d, \quad \xi_m = (i_m(i_d)^{-1})(\xi_d).$$

Ὁ $T^a{}_{bc}{}^m$ πού βρέθηκε ἀπό τόν $T^a{}_{bc}{}^d$ καί αὐτή τήν πράξη λέγεται ὅτι κατασκευάσθηκε ἀπό τόν $T^a{}_{bc}{}^d$ μέ ἀντικατάσταση τοῦ δείκτη d μέ τόν δείκτη m. Προσοχή! Δέν γράφουμε ὅτι $T^a{}_{bc}{}^d = T^a{}_{bc}{}^m$.

Παράδειγμα: Ἔστω ὁ ταννυστής T^{ab}. Κάνοντας ἀντικατάσταση δεικτῶν μποροῦμε νά πάρουμε διαδοχικά

$$T^{ab}\longrightarrow T^{am}, \quad T^{am}\longrightarrow T^{nm}, \quad T^{nm}\longrightarrow T^{bm}, \quad T^{bm}\longrightarrow T^{ba}.$$

Ἐν γένει λοιπόν δέν ἰσχύει ὅτι $T^{ab}=T^{ba}$. Ἄν ἰσχύει $T^{ab}=T^{ba}$ τότε ὁ ταννυστής $T^{ab}\in V^{ab}$ λέγεται *συμμετρικός*. Αὐτό εἶναι ἰδιότητα τοῦ στοιχείου T^{ab} καί ὄχι τοῦ χώρου V^{ab}.

Ὁρίζουμε τώρα τή <u>συστολή δεικτῶν</u> (contraction). Ἔστω ταυνυστής, π.χ. $T^{abc}{}_{d}$, μέ ἕναν τουλάχιστον συναλλοίωτο κι ἕναν ἀνταλλοίωτο δείκτη. Διαλέγουμε δύο δείκτες του, ἕναν συναλλοίωτο κι ἕναν ἀνταλλοίωτο, π.χ. b καί d. Ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ ταυνυστής γράφεται σάν πεπερασμένο ἄθροισμα γινομένων ταυνυστῶν τῆς μορφῆς

$$T^{abc}{}_{d} = \lambda^{ac}\alpha^{b}\beta_{d} + \mu^{ac}\gamma^{b}\delta_{d} + \dots + \nu^{ac}\varepsilon^{b}\eta_{d}, \quad (7)$$

ὅπου κάθε ὅρος τοῦ ἀθροίσματος εἶναι (ταυνυστικό) γινόμενο δύο διανυσμάτων μέ τούς δείκτες πού ξεχωρίσαμε ἐπί ἕναν ταυνυστή πού "κουβαλᾶ" ὅλους τούς ὑπόλοιπους δείκτες. Τό στοιχεῖο

$$\lambda^{ac}(\alpha^{b}\beta_{b}) + \mu^{ac}(\gamma^{b}\delta_{b}) + \dots + \nu^{ac}(\varepsilon^{b}\eta_{b}) \quad (8)$$

τοῦ χώρου λ^{ac} (ἀφοῦ $\alpha^{b}\beta_{b}$ κ.λ.π. εἶναι ἀριθμοί) λέγεται συστολή τοῦ $T^{abc}{}_{d}$ πάνω στούς δείκτες b καί d καί συμβολίζεται $T^{abc}{}_{b} = T^{amc}{}_{m} = T^{apc}{}_{p}$ κ.λ.π. Ἄν καί ἡ ἀνάλυση τοῦ ταυνυστῆ $T^{abc}{}_{d}$ στή μορφή (7) δέν εἶναι μοναδική ἐπιπλέον ἀποδεικνύεται ὅτι τό ἀποτέλεσμα (8) εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τήν ἀρχική ἀνάλυση καί συνεπῶς ἡ πράξη τῆς συστολῆς εἶναι καλῶς ὁρισμένη (δηλ. δίνει ἕνα ἀκριβῶς ἀποτέλεσμα).

<u>Παρατήρηση 2η:</u> Ἡ συστολή ἐλαττώνει κατά δύο τήν τάξη τοῦ ταυνυστῆ. Ἀπό ἕναν ταυνυστή $\binom{m}{n}$ παίρνουμε ἕναν ταυνυστή $\binom{m-1}{n-1}$. Ἐάν κάνουμε ὅ ἕναν

ταννυστή δύο ἢ περισσότερες συστολές, θὰ τὶς συμβολίζουμε μὲ διαφορετικοὺς ἐπαναλαμβανόμενους δείκτες. Μ' αὐτὴ τὴν ἐπιπλέον σύμβαση ὁ συμβολισμός μας ἐπαρκεῖ γιὰ νὰ ἐκφράσει τὶς διάφορες πράξεις.

Παρατήρηση 3η: Ἀπ' ἐδῶ κι ἐμπρὸς θὰ ἐπιτρέπουμε καὶ ταννυστὲς τῆς μορφῆς $\alpha_{ab}{}^{m}\beta_{dm}{}^{g}$ ποὺ θὰ παριστάνουν τὴν συστολὴ τοῦ ταννυστῆ $\alpha_{ab}{}^{c}\beta_{de}{}^{g}$ πάνω στοὺς δείκτες c καὶ e. Σ' αὐτὴ τὴ περίπτωση λέμε ὅτι κάναμε πολλαπλασιασμό ταννυστῶν μὲ (σύγχρονη) συστολή. Εὔκολα μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ὅτι οἱ συμβολισμοί μας $\mu_a\xi^a$ καὶ $T_{ab}{}^{c}\xi^a\eta^b\gamma_c$ γιὰ τὶς εἰκόνες τῶν στοιχείων τοῦ δυϊκοῦ χώρου καὶ τῶν ταννυστῶν εἶναι συμβιβαστοὶ μὲ τὸν συμβολισμό μας γιὰ γινόμενο ταννυστῶν μὲ συστολή.

Παράδειγμα 2ον: Ὁ ταννυστὴς $T_a{}^b$ παριστάνει τὴ γραμμικὴ ἀπεικόνιση

$$T_a{}^b : V^a \ni \eta^a \longrightarrow T_a{}^b\eta^a \in V^b. \qquad (9)$$

Ἐπειδὴ V^a καὶ V^b εἶναι ἀντίτυπα τοῦ ἴδιου διανυσματικοῦ χώρου V, ὁ $T_a{}^b$ μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ καὶ ὅτι παριστάνει ἕνα γραμμικὸ μετασχηματισμὸ τοῦ V στὸν ἑαυτό του. Γι' αὐτὸ οἱ ταννυστὲς $\binom{1}{1}$ λέγονται καὶ γραμμικοὶ μετασχηματισμοί.

$$\begin{tikzcd} V^a \arrow[r, "T_a{}^b"] \arrow[rr, bend right, "M_a{}^c = T_a{}^m \Sigma_m{}^c"'] & V^b \arrow[r, "\Sigma_b{}^c"] & V^c \end{tikzcd}$$

Ἔστω δύο τέτοιοι γραμμικοὶ μετασχηματισμοί. Ἡ σύνθεσή τους $\Sigma \circ T$ παριστάνεται μέ τό γινόμενο μέ συστολή $T_a{}^m \Sigma_m{}^c$.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "i^a"'] \arrow[dr, "i^b"] & \\ V^a \arrow[rr, "i^b \circ (i^a)^{-1}", "\delta_a{}^b"'] & & V^b \end{tikzcd}$$

Ὁ ταννυστής $\binom{1}{1}$ πού παριστάνει τή γραμμική ἀπεικόνιση
$$V^a \ni \xi^a \longrightarrow (i^b \circ (i^a)^{-1})(\xi^a) = \xi^b \in V^b,$$
πού εἶναι ἡ σύνθεση τῶν δοσμένων ἰσομορφισμῶν, λέγεται ταννυστής τοῦ Kronecker καί παριστάνεται συνήθως μέ $\delta_a{}^b$:
$$\delta_a{}^b : V^a \ni \xi^a \longrightarrow \delta_a{}^b \xi^a = \xi^b \in V^b. \quad (10)$$
Ἀποδεικνύεται ὅτι, π.χ., $\delta^a{}_b T^{cb}{}_{pq} = T^{ca}{}_{pq}$, δηλ. ὅτι πολλαπλασιασμός μέ συστολή μέ τόν ταννυστή τοῦ Kronecker ἰσοδυναμεῖ μέ ἀντικατάσταση δείκτη. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι εὔκολη: Ἁπλῶς γράφουμε τόν $T^{cb}{}_{pq}$ σάν ἄθροισμα γινομένων ταννυστῶν τοῦ χώρου $V^c{}_{pq}$ μέ διανύσματα τοῦ χώρου V^b καί ἀφήνουμε τόν $\delta^a{}_b$ νά δράσει στά διανύσματα τοῦ V^b. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται ὅτι $\delta^a{}_a = \dim V$.

(H) Ὁρίζουμε τώρα συνιστῶσες ταννυστῶν. Ἔστω $\{e_i\}$, $i=1,2,\ldots n$ μία βάση τοῦ V καί ἔστω $(e^a)_i$, $(e^b)_i$, $(e^c)_i$, $\ldots$, $i=1,2,\ldots n$ οἱ ἀντίστοιχες βάσεις τῶν $V^a, V^b, V^c, \ldots$ πού προκύπτουν ἀπό τούς ἰσομορφισμούς $i^a, i^b, i^c, \ldots$ καί $(e_a)_i$, $(e_b)_i$, $(e_c)_i$ οἱ δυϊκές τῶν παραπάνω βάσεων [δηλ. βάσεις τῶν ἀντίστοιχων δυϊκῶν χώρων γιά τίς ὁποῖες ἰσχύει $(e_a)_i (e^a)_j = \delta_{ij}$ = δέλτα τοῦ Kronecker, πού δέν πρέπει νά συγχέεται μέ τόν τανυστή τοῦ Kronecker]. Γιά τόν τανυστικό χῶρο, π.χ., $V^a{}_b{}^c$ θεωροῦμε τά ἑξῆς, $(\dim V)^3 = n^3$ τό πλῆθος, στοιχεῖα του $\{(f^a{}_b{}^c)_i{}^j{}_k\ ,\ i,j,k = 1,2,\dots n\}$

$$(f^a{}_b{}^c)_i{}^j{}_k : V_a \times V^b \times V_c \ni \big((e_a)_\lambda, (e^b)_\mu, (e_c)_\nu\big) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \big((f^a{}_b{}^c)_i{}^j{}_k\big)\big((e_a)_\lambda, (e^b)_\mu, (e_c)_\nu\big) = \delta_{i\lambda}\,\delta_{j\mu}\,\delta_{k\nu} \in \mathbb{R},$$

πού εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι ἀποτελοῦν μία βάση τοῦ $V^a{}_b{}^c$. Οἱ συνιστῶσες τοῦ τανυστή $T^a{}_b{}^c$ ὡς πρός τή βάση $(f^a{}_b{}^c)_i{}^j{}_k$,

$$T^a{}_b{}^c = \sum_{i,j,k}^{1,n} [T^a{}_b{}^c]^i{}_j{}^k\,(f^a{}_b{}^c)_i{}^j{}_k, \qquad (11)$$

λέγονται συνιστῶσες τοῦ τανυστή ὡς πρός τήν ἀρχική βάση $\{e_i,\ i=1,2,\dots n\}$ τοῦ χώρου V.
Γενικά ἕνας $\binom{m}{n}$ τανυστής ἔχει $(\dim V)^{m+n}$ συνιστῶσες.

Προφανῶς ἔχουμε $\mu_a \xi^a =$

$$= \Big(\sum_{i=1}^n (\mu_a)_i (e_a)_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^n (\xi^a)^j (e^a)^j\Big) = \sum_{i,j} (\mu_a)_i (\xi^a)^j (e_a)_i\big((e^a)^j\big) =$$

$$= \sum_{i,j} (\mu_a)_i (\xi^a)^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n (\mu_a)_i (\xi^a)^i.$$ Ὥστε

τό γινόμενο δύο διανυσμάτων μέ συστολή ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀντιστοίχων συντεταγμένων τους, ἐφ' ὅσον τὰ δύο διανύσματα ἔχουν ἐκφραστεῖ σὲ δύο δυϊκές βάσεις. Ἐπειδὴ ὅμως καὶ ἡ συστολὴ τανυστῶν οὐσιαστικὰ ἔχει ἀναχθεῖ, μὲ τὴν ἀνάλυση (8), σὲ συστολὴ διανυσμάτων συμπεραίνουμε ὅτι οἱ συντεταγμένες τῆς συστολῆς ἑνὸς τανυστῆ εὔκολα προσδιορίζονται ἀπὸ τὴν

$$(T^{amc}{}_{m})^{ij} = \sum_{k=1}^{n} (T^{abc}{}_{d})^{ikj}{}_{k} \qquad (12).$$

Π.χ. ἰσχύει $(T^{a}{}_{b}\,\xi^{b})^{i} = \sum_{j=1}^{n} (T^{a}{}_{b})^{i}{}_{j}\,(\xi^{b})^{j}$. (13)

Χρησιμοποιώντας τὴν (13) εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ συνιστῶσες τοῦ τανυστῆ τοῦ Kronecker ὡς πρὸς ὁποιαδήποτε βάση εἶναι τὰ δέλτα τοῦ Kronecker: $(\delta_{a}{}^{b})_{i}{}^{j} = \delta_{ij}$.

Υποθέτουμε τώρα ὅτι ἀρχίζουμε ἀπὸ μία ἄλλη βάση τοῦ χώρου V, $\{\tilde{e}_i, i=1,2,\dots n\}$, καὶ ὑπολογίζουμε τὶς συντεταγμένες ἑνὸς τανυστῆ ὡς πρὸς τὴν καινούργια βάση. Προφανῶς τὰ διανύσματα $(\tilde{e}^{a})_{i}$ εἶναι γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων $(e^{a})_{i}$, ἔστω

$$(\tilde{e}^{a})_{i} = A_{ik}(e^{a})_{k}, \qquad (14)$$

ὅπου A_{ik} εἶναι ἕνας $n\times n$ πίνακας καὶ οἱ ἐπαναλαμβανόμενοι δείκτες (ὄχι τανυστικοὶ δείκτες!) δηλώνουν ἄθροιση. Ἔστω ἐπίσης $(\tilde{e}_{a})_{j} = B_{\lambda j}(e_{a})_{\lambda}$ ἡ σχέση μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων δυϊκῶν βάσεων. Η ἀπαίτηση ὅτι $(\tilde{e}^a)_i (\tilde{e}_a)_j = \delta_{ij}$ δίνει

$A_{ik} B_{kj} = \delta_{ij}$, δηλαδὴ ὅτι ὁ πίνακας B_{ij} εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ A_{ij}, καὶ ἡ ἀπαίτηση ὅτι

$(\tilde{f}^a{}_b{}^c)_i{}^j{}_k (\tilde{e}_a)_\lambda (\tilde{e}^b)_\mu (\tilde{e}_c)_\nu = \delta_{i\lambda} \delta_{j\mu} \delta_{k\nu}$ δίνει ὅτι ἡ καινούργια βάση δίνεται ἀπό τόν ἑξῆς γραμμικό συνδυασμό τῶν στοιχείων τῆς παλιᾶς βάσεως:

$$(\tilde{f}^a{}_b{}^c)_i{}^j{}_k = A_{i\rho} B_{\sigma j} A_{k\tau} (f^a{}_b{}^c)_\rho{}^\sigma{}_\tau . \qquad (15)$$

Τέλος ἀπό τή σχέση $[T^a{}_b{}^c]^{\tilde{i}}{}_{\tilde{j}}{}^{\tilde{k}} (\tilde{f}^a{}_b{}^c)_i{}^j{}_k = T^a{}_b{}^c = [T^a{}_b{}^c]^\rho{}_\sigma{}^\tau (f^a{}_b{}^c)_\rho{}^\sigma{}_\tau$ βρίσκουμε ὅτι

$$[T^a{}_b{}^c]^{\tilde{i}}{}_{\tilde{j}}{}^{\tilde{k}} = B_{\rho i} A_{j\sigma} B_{\tau k} [T^a{}_b{}^c]^\rho{}_\sigma{}^\tau , \qquad (16)$$

ὅπου οἱ περισπωμένες πάνω στούς δείκτες ἁπλῶς δηλώνουν ὅτι οἱ συνιστῶσες τοῦ τανυστῆ ἀναφέρονται ὡς πρός τήν περισπώμενη βάση. Ἡ σχέση (16), καί παρόμοιες σχέσεις γιά τανυστές μέ περισσότερους δείκτες, δίνουν τίς σχέσεις μεταξύ τῶν συνιστωσῶν ἑνός τανυστῆ ὡς πρός διαφορετικές βάσεις τοῦ ἀρχικοῦ διανυσματικοῦ χώρου.

10. Τανυστικά πεδία.

Στὴν ἑνότητα 8 διαπιστώσαμε ὅτι σὲ κάθε σημεῖο p πολλαπλότητας M μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε τὸν ἐφαπτόμενο χῶρο T_p [ἀπ' ἐδῶ καὶ ἐμπρὸς θὰ τὸν συμβολίζουμε $T(p)$] ποὺ εἶναι ἕνας διανυσματικὸς χῶρος ἴδιας διαστάσεως μὲ τὴν πολλαπλότητα M. Στὴν ἑνότητα 9 διαπιστώσαμε ὅτι ξεκινώντας ἀπὸ κάθε διανυσματικὸ χῶρο V μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε μία πρακτικὰ ἄπειρη συλλογὴ τανυστικῶν χώρων $V^{ab}{}_c{}^d{}_e \ldots$, ἕναν τανυστικὸ χῶρο γιὰ κάθε συλλογὴ δεικτῶν. Ὁ στόχος μας τώρα εἶναι νὰ συνδυάσουμε αὐτὲς τὶς δύο κατασκευές. Ἀφήνοντας σὲ κάθε σημεῖο p τῆς πολλαπλότητας τὸν χῶρο $T(p)$ νὰ παίξει τὸν ρόλο ποὺ ἔπαιξε ὁ V στὴν ἑνότητα 9, κατασκευάζουμε τανυστικοὺς χώρους σὲ κάθε σημεῖο τῆς πολλαπλότητας. Οἱ χῶροι αὐτοὶ θὰ παριστάνονται $T^a_{(p)}$, $T_{(p)a}$, $T_{(p)}{}^{ab}{}_{cd}{}^e, \ldots$. Οἱ τέσσερεις γνωστὲς πράξεις μεταξὺ τανυστῶν ἐφαρμόζονται φυσικὰ καὶ σ' αὐτοὺς τοὺς χώρους.

Ὁρισμός: Τανυστικὸ πεδίο σὲ πολλαπλότητα M εἶναι ἕνας καθορισμὸς ἑνὸς τανυστῆ σὲ κάθε σημεῖο τῆς πολλαπλότητας τέτοιος ὥστε ὅλοι οἱ τανυστὲς νὰ ἔχουν ἀκριβῶς τοὺς ἴδιους δεῖκτες καὶ ἀκριβῶς στὴν ἴδια θέση. Π.χ. ἡ ἀπεικόνιση

$$T^a{}_b{}^c : M \ni p \longrightarrow T^a{}_b{}^c(p) \in \bigcup_{p\in M} T_{(p)}{}^a{}_b{}^c ,$$

ὅπου $T^a{}_b{}^c(p) \in T_{(p)}{}^a{}_b{}^c$, $\forall p \in M$ εἶναι ἕνα τανυστικό πεδίο. Οἱ τέσσερες πράξεις μεταξύ τανυστῶν ἐφαρμοζόμενες σημεῖο κατά σημεῖο μποροῦν νά ἐπεκταθοῦν καί σέ πράξεις μεταξύ τανυστικῶν πεδίων.

Σύμφωνα μέ ὅσα ἔχουμε πεῖ μέχρι τώρα, τά C^∞-διανυσματικά πεδία εἶναι ἀπεικονίσεις ἀπό τίς C^∞-συναρτήσεις στίς C^∞-συναρτήσεις στή πολλαπλότητα. Τά συναλλοίωτα διανυσματικά πεδία εἶναι γραμμικές ἀπεικονίσεις ἀπό τά ἀνταλλοίωτα διανυσματικά πεδία στά βαθμωτά πεδία. Τό πεδίο $\mu_a(p)$ λέγεται C^∞ ἐάν γιά κάθε C^∞ διανυσματικό πεδίο $\xi^a(p)$, $\mu_a(p)\,\xi^a(p) = (\mu_a \xi^a)(p)$ εἶναι C^∞-βαθμωτό πεδίο. Τά τανυστικά πεδία εἶναι πολυγραμμικές ἀπεικονίσεις ἀπό τό (κατάλληλο) καρτεσιανό γινόμενο διανυσματικῶν πεδίων στά βαθμωτά πεδία. Τό τανυστικό πεδίο λέγεται C^∞ ἐάν γιά κάθε C^∞ διανυσματικά πεδία παίρνουμε ἕνα C^∞-βαθμωτό πεδίο. Σύμφωνα μέ τίς παρατηρήσεις τῆς σελίδας 67 τά τανυστικά πεδία εἶναι καί πολυγραμμικές ἀπεικονίσεις ἀπό καρτεσιανά γινόμενα διανυσματικῶν πεδίων σέ ἄλλα τανυστικά πεδία μέ λιγότερους δεῖκτες καί εἶναι C^∞ ἐάν γιά κάθε C^∞-διανυσματικά πεδία δίνουν ξανά C^∞-τανυστικά πεδία. Τέλος χρησιμοποιώντας καί πολλαπλασιασμό τανυστῶν μέ συστολή μποροῦμε νά δοῦμε τά τανυστικά πεδία σάν ἀπεικονίσεις ἀπό τανυστικά πεδία σέ τανυστικά πεδία καί νά τά θεωροῦμε C^∞ ἐάν "δέν καταστρέφουν τήν C^∞-τότητα (λειότητα) τῶν ἄλλων τανυστικῶν πεδίων." Π.χ. τό τανυστικό πεδίο $T^a{}_b{}^c$ παριστάνει τίς ἀπεικονίσεις

$$T^a{}_b{}^c : \alpha_c{}^{pq} \longrightarrow T^a{}_b{}^c \alpha_c{}^{pq},$$

$$\beta^b{}_{cm} \longrightarrow T^a{}_b{}^c \beta^p{}_{cm},$$

$$f \longrightarrow f\, T^a{}_b{}^c,$$

καί ἄλλες πολλές.

<u>Παρατήρηση:</u> Στήν τελευταία παράγραφο ἡ γραμμικότητα (καί ἡ πολυγραμμικότητα) ἐννοεῖται λίγο γενικότερα ἀπ' ὅτι συνήθως. Π.χ. ἡ F ἡ γραμμική εἶναι ἐάν $\forall$ διανυσματικά πεδία ξ^a καί μ^a καί $\forall$ βαθμωτό πεδίο $f(p)$ ἰσχύει

$$F(\xi^a + f\mu^a) = F(\xi^a) + f\,F(\mu^a).$$

Αὐτή ἡ γενίκευση εἶναι ἐπιτρεπτή γιατί ἀπαιτοῦμε γραμμικότητα σέ κάθε σημεῖο τῆς πολλαπλότητας καί σ' ἕνα συγκεκριμένο σημεῖο $f(p)$ εἶναι ἀριθμός.

Θά τελειώσουμε τήν ἑνότητα ἀναφέροντας τίς σχέσεις μετασχηματισμοῦ τῶν συνιστωσῶν ἑνός τανυστή σέ δύο συστήματα συντεταγμένων. Ἔστω σημεῖο p πολλαπλότητας M, δύο χάρτες (U,ϕ) καί $(\tilde{U},\tilde{\phi})$ πού περιέχουν τό p, x^i καί $\tilde{x}^i$ τά συστήματα συντεταγμένων πού ὁρίζουν οἱ χάρτες σέ μία περιοχή τοῦ p καί $x^i = x^i(\tilde{x}^j)$ καί $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$ οἱ σχέσεις μετασχηματισμοῦ αὐτῶν. Σέ κάθε χάρτη χρησιμοποιούμε τή φυσική βάση (σελ. 49) $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ γιά τόν χώρο T_p. Οἱ συνιστῶσες ἑνός τανυστικοῦ πεδίου ὡς πρός τή βάση $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ λέγονται συνιστῶσες τοῦ τανυστή στόν ἀντίστοιχο χάρτη ἤ, συνηθέστερα, στό ἀντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων. Χρησιμοποιώντας ὅτι $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} = \delta_{ik}$, $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^k} = \delta_{ik}$ καί τή σχέση (4) τῆς σελίδας 54 στό συμβολισμό τῆς σελίδας 76 ἐξίσωση 14 καί παρακάτω, ἔχουμε

$$A_{ij} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \quad \text{καί συνεπῶς}$$

$$B_{pj} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^p}.$$

Ἀντικατάσταση αὐτῶν στή σχέση (16) τῆς σελίδας 77 δίνει

$$[T^a{}_b{}^c]^{\tilde{i}}{}_{\tilde{j}}{}^{\tilde{k}} = \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^p}\right)\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^j}\right)\left(\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^\varphi}\right)[T^a{}_b{}^c]^p{}_\sigma{}^\varphi, \quad (1)$$

τή σχέση "μετασχηματισμοῦ τῶν συνιστωσῶν τανυστή ὅταν ἀλλάξει τό σύστημα συντεταγμένων". Ὁ κανόνας τῆς σχέσεως (1) εἶναι προφανής, μνημονεύεται εὔκολα καί εὔκολα γενικεύεται σέ τανυστικά πεδία μέ περισσότερους δείκτες.

11. Τελεστές παραγωγίσεως.

Στήν Ενότητα 8 ορίσαμε τά διανυσματικά πεδία σάν τελεστές διαφορίσεως πού ξέρουν νά διαφορίζουν C^∞ βαθμωτά πεδία. Στήν Ενότητα αυτή θά ορίσουμε γενικότερους τελεστές διαφορίσεως πού ξέρουν νά διαφορίζουν κάθε C^∞ τανυστικό πεδίο.

Λίγη συζήτηση πρώτα. Άν φανταστούμε μία πολλαπλότητα n-διαστάσεων σάν επιφάνεια n-διαστάσεων σέ κάποιο χώρο, ή πείρα μάς λέει ότι υπάρχουν n διευθύνσεις κατά μήκος τών οποίων μπορούμε νά διαφορίσουμε. Περιμένουμε λοιπόν ότι ή διαφόριση ενός τανυστικού πεδίου θά είναι ένα καινούργιο τανυστικό πεδίο μέ έναν δείκτη επιπλέον. Τί δείκτη όμως, συναλλοίωτο ή ανταλλοίωτο; Γιά κάθε βαθμωτό πεδίο f προσπαθούμε νά καταλάβουμε τί πρέπει νά είναι ή παράγωγός του ∇f. Γιά κάθε διανυσματικό πεδίο ξ^a, (ξ^a καί ∇f) παράγουν ένα άλλο βαθμωτό πεδίο, δηλ. ή ∇f φαίνεται νά είναι απεικόνιση από διανυσματικά πεδία σέ βαθμωτά πεδία. Η ∇f λοιπόν συμπεριφέρεται σάν συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο πράγμα πού προτείνει ότι ή παραγώγιση προσθέτει ένα συναλλοίωτο δείκτη σέ κάθε τανυστικό πεδίο. Μετά τίς παραπάνω παρατηρήσεις θά προχωρήσουμε αξιωματικά.

<u>Ορισμός:</u> <u>Τελεστής παραγωγίσεως</u> (derivative operator) ∇_a είναι μία απεικόνιση από C^∞-τανυστικά πεδία σέ C^∞-τανυστικά πεδία μέ ένα

ἐπιπλέον συναλλοίωτο δείκτη πού ἱκανοποιεῖ τίς συνθῆκες :

i) Εἶναι γραμμική. Π.χ. ἰσχύει $\nabla_a(\beta_p{}^q{}_r + \gamma_p{}^q{}_r) =$

$= \nabla_a \beta_p{}^q{}_r + \nabla_a \gamma_p{}^q{}_r$, γιά τυχόντα τανυστικά πεδία. Προσοχή. Δέν ἀπαιτοῦμε (καί δέν ἔχουμε) γραμμικότητα κατά τή γενικευμένη ἔννοια τῆς παραγώγισης τῆς σελ. 80.

ii) Ἰσχύει ὁ κανόνας τοῦ Leibnitz γιά τό γινόμενο τανυστικῶν πεδίων. Π.χ.

$\nabla_a(\beta_m{}^n \gamma_{pq}{}^s) = (\nabla_a \beta_m{}^n)\gamma_{pq}{}^s + \beta_m{}^n(\nabla_a \gamma_{pq}{}^s)$.

iii) Ἡ ∇_a ἀντιμετατίθεται μέ τίς πράξεις τῆς συστολῆς καί τῆς ἀντικαταστάσεως δεικτῶν. Π.χ. Ἐάν $\alpha_{pq}{}^r = \nabla_p \beta_q{}^r$ τότε $\alpha_{pm}{}^m = \nabla_p(\beta_q{}^q)$. Ἐπίσης ἐάν $\alpha_{mp}{}^q = \nabla_m \beta_p{}^q$ τότε $\alpha_{mp}{}^s = \nabla_m \beta_p{}^s$.

iv) Γιά κάθε C^∞ βαθμωτό πεδίο f,

$\xi^m \nabla_m f = \xi^m(f) = \xi(f)$, ὅπου τό δεύτερο μέλος $\xi(f)$ παριστάνει τήν ἐπίδραση τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου ξ^m στό βαθμωτό f πού ὁρίσε τό ξ^m.

v) Δύο διαδοχικοί τελεστές παραγωγίσεως ἀντιμετατίθενται ὅταν ἐνεργοῦν σέ βαθμωτά πεδία, δηλαδή $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$, $\forall$ C^∞-βαθμωτό πεδίο f.

Ἡ συνθήκη v), πού θά συζητηθεῖ λεπτομερῶς στό τέλος τῆς ἑνότητας, δέν εἶναι καθολικῶς παραδεκτή.

<u>Παρατήρηση 1η:</u> Ἐάν <u>$f=$ σταθερά, τότε $\nabla_a f=0$.</u>

Πράγματι, ἀπό τήν συνθήκη iii) τῆς σελ. 48 καί τήν προηγούμενη συνθήκη iv) παίρνουμε ὅτι $\xi^a \nabla_a f=0$, $\forall$ διανυσματικό πεδίο ξ^a, πού εἶναι ἀκριβῶς ὁ ὁρισμός τοῦ μηδενικοῦ συναλλοίωτου διανυσματικοῦ πεδίου.

<u>Παρατήρηση 2η:</u> Ἡ ἔννοια τοῦ σταθεροῦ τανυστικοῦ πεδίου δέν ὑπάρχει γιατί δύο τανυστές σέ διαφορετικά σημεῖα τῆς πολλαπλότητας εἶναι στοιχεῖα διαφορετικῶν διανυσματικῶν χώρων καί κατά συνέπεια δέν μποροῦν νά συγκριθοῦν. [Σ' αὐτή τή περίπτωση ἡ πεῖρα μας ἀπό τόν χῶρο $\mathbb{R}^n$ δέν μᾶς καθοδηγεῖ σωστά. Στόν $\mathbb{R}^n$ οἱ διάφοροι ἐφαπτόμενοι χῶροι μποροῦν νά ταυτοποιηθοῦν γιατί εἶναι ὅλοι τους φυσιολογικά ἰσόμορφοι μέ τόν ἴδιο τόν $\mathbb{R}^n$. Αὐτή ἡ ταυτοποίηση ἐπεκτείνεται καί στούς τανυστικούς χώρους σέ διαφορετικά σημεῖα μέ τούς ἴδιους ἀκριβῶς δείκτες πράγμα πού μᾶς ἐπιτρέπει νά μιλοῦμε στόν $\mathbb{R}^n$ καί – μόνον στόν $\mathbb{R}^n$! – γιά σταθερά τανυστικά πεδία.

Ἀπ' ἐναντίας, ὑπάρχει ἡ ἔννοια τοῦ μηδενικοῦ τανυστικοῦ πεδίου σέ πολλαπλότητα, ἡ ἐκλογή τοῦ οὐδέτερου στοιχείου τοῦ τανυστικοῦ χώρου σέ κάθε σημεῖο τῆς πολλαπλότητας. Ἀπό τήν ἰδιότητα i) παίρνουμε εὔκολα ὅτι <u>ἡ παράγωγος κάθε μηδενικοῦ τανυστικοῦ πεδίου εἶναι μηδέν.</u>

Θὰ ἀσχοληθοῦμε τώρα μὲ τὴν ὕπαρξη καὶ τὴν μοναδικότητα τελεστῶν παραμορφώσεως σὲ μία πολλαπλότητα.

<u>Θεώρημα:</u> Ἡ πολλαπλότητα M δέχεται ἕνα τελεστὴ παραμορφώσεως ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν ἡ M εἶναι παρασυμπαγής.

[Ὁ ὁρισμὸς τοῦ παρασυμπαγοῦς τοπολογικοῦ χώρου καὶ οἱ παρατηρήσεις ποὺ ἔγιναν στὴν σελίδα 19 εἶναι λάθος. Τὰ σωστὰ εἶναι τὰ ἑξῆς:

Ἡ οἰκογένεια $\{U_\alpha, \alpha\in A\}$ λέγεται <u>κάλυμμα</u> (cover) τοῦ χώρου X ἐὰν $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = X$.

Ἡ οἰκογένεια $\{V_\beta, \beta\in B\}$ λέγεται <u>ὑποκάλυμμα</u> (subcover) τοῦ $\{U_\alpha, \alpha\in A\}$ ἐὰν $\bigcup_{\beta\in B} V_\beta = X$ καὶ ἐπιπλέον $\forall \beta\in B, \exists \alpha\in A$ ὥστε $V_\beta = U_\alpha$.

Ἡ οἰκογένεια $\{W_\gamma, \gamma\in\Gamma\}$ λέγεται <u>λέπτυνση</u> (refinement) τῆς $\{U_\alpha, \alpha\in A\}$ ἐὰν $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} W_\gamma = X$ καὶ $\forall \gamma\in\Gamma, \exists \alpha\in A$ ὥστε $W_\gamma \subset U_\alpha$.

Ὥστε καὶ τὸ ὑποκάλυμμα καὶ ἡ λέπτυνση εἶναι καλύμματα τοῦ χώρου. Τὸ ὑποκάλυμμα ἀποτελεῖται ἀπὸ μερικὰ ἀπὸ τὰ στοιχεῖα (ὑποσύνολα τοῦ X) τοῦ καλύμματος. Στὴν λέπτυνση μποροῦμε νὰ παίρνουμε μερικὰ μόνον ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ καλύμματος ἢ καὶ ὑποσύνολα αὐτῶν.

Στὴν περίπτωση ποὺ ὁ X εἶναι τοπολογικὸς χῶρος, τὸ κάλυμμα, τὸ ὑποκάλυμμα, ἡ λέπτυνση λέγονται <u>ἀνοικτὰ</u> (open) ἐὰν ὅλα τὰ στοιχεῖα τους εἶναι ἀνοικτὰ ὑποσύνολα τοῦ τοπολογικοῦ χώρου.

Ὁ τοπολογικὸς χῶρος X λέγεται παρασυμπαγὴς ἐὰν γιὰ κάθε ἀνοικτὸ κάλυμμά του μποροῦμε νὰ βροῦμε μία ἀνοικτὴ λέπτυνση τέτοια ὥστε κάθε σημεῖο τοῦ X νὰ ἀνήκει τὸ πολὺ σὲ πεπερασμένου πλήθους στοιχεῖα τῆς λέπτυνσης.

Ὁ τοπολογικὸς χῶρος τοῦ τρίτου παραδείγματος τῆς σελίδας 6 δὲν εἶναι παρασυμπαγής. Δὲν εἶναι ὅμως καὶ Hausdorff.

εἶναι πολύ δύσκολο νά κατασκευάσουμε τοπολογικό χῶρο ὁ ὁποῖος εἶναι Hausdorff καί δέν εἶναι παρασυμπαγής.

Σέ ἀρκετά βιβλία ἡ παρασυμπαγότητα προαπαιτεῖ ὅτι ὁ χῶρος εἶναι καί Hausdorff.]]

Ὅλες οἱ πολλαπλότητες πού ἐμφανίζονται στή φυσική εἶναι παρασυμπαγεῖς (καί Hausdorff) καί συνεπῶς δέχονται τελεστές παραγωγίσεως.

Θά μελετήσουμε τώρα τή μοναδικότητα τῶν τελεστῶν παραγωγίσεως σέ πολλαπλότητα. Θά διαπιστώσουμε ὅτι οἱ τελεστές παραγωγίσεως δέν εἶναι ποτέ μοναδικοί καί ὅτι ξέρουμε πολύ καλά πόσοι τέτοιοι ὑπάρχουν. Ἡ μή μοναδικότητά τους εἶναι ἀρκετά εὐχάριστη: πολλές φορές θά μᾶς ἐπιτρέψει νά διαλέξουμε καί νά δουλέψουμε μέ ἕνα κατάλληλο τελεστή πού ἐξυπηρετεῖ κάποιον ἐπιπλέον σκοπό. Ἡ ἀνάπτυξή μας θά γίνει σέ ἕξη βήματα.

1) Ἄς εἶναι ∇_a καί $\tilde{\nabla}_a$ δύο τελεστές παραγωγίσεως καί f ἕνα τυχόν C^∞ βαθμωτό πεδίο. Θέλουμε νά ὑπολογίσουμε τό $\tilde{\nabla}_a f - \nabla_a f$. Γιά τυχόν διανυσματικό πεδίο ξ^a,

$$\xi^a(\tilde{\nabla}_a f - \nabla_a f) = \xi^a \tilde{\nabla}_a f - \xi^a \nabla_a f = \xi(f) - \xi(f) = 0$$

(χρησιμοποιήσαμε γραμμικότητα καί τή συνθήκη iv)).

Ὥστε

$$\boxed{\tilde{\nabla}_a f = \nabla_a f}, \ \forall f \text{ βαθμωτό}, \qquad (1)$$

δηλ. ὅλοι οἱ τελεστές παραγωγίσεως ἔχουν τήν ἴδια δράση στά βαθμωτά πεδία.

2) Μελετοῦμε τώρα τό $\tilde{\nabla}_a \xi^b - \nabla_a \xi^b$ γιά τυχόν ἀνταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο ξ^b. Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι ὁ $\tilde{\nabla}_a - \nabla_a$ δρᾶ γραμμικά στό ξ^b, μέ τή γενικευμένη μάλιστα ἔννοια τῆς γραμμικότητας πού περιγράψαμε

στή παρατήρηση τῆς σελίδας 80. Πράγματι,

$$(\tilde\nabla_a - \nabla_a)(f\xi^b + \eta^b) = \cancel{(\tilde\nabla_a f)\xi^b} + f\tilde\nabla_a\xi^b + \tilde\nabla_a\eta^b - \cancel{(\nabla_a f)\xi^b} - f\nabla_a\xi^b - \nabla_a\eta^b =$$

$= f(\tilde\nabla_a - \nabla_a)\xi^b + (\tilde\nabla_a - \nabla_a)\eta^b$. Ἀλλά γραμμικές ἀπεικονίσεις ἀπό τανυστικά πεδία σέ τανυστικά πεδία εἶναι τανυστικά πεδία. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι ὑπάρχει τανυστικό πεδίο $C_a{}^b{}_m$ ὥστε $\tilde\nabla_a\xi^b - \nabla_a\xi^b = C_a{}^b{}_m\xi^m$. Ὥστε οἱ τελεστές παραγωγίσεως διαφωνοῦν στή δράση τους σέ ἀνταλλοίωτα διανυσματικά πεδία καί τό μέγεθος τῆς διαφωνίας τους μετρᾶται μέ τό τανυστικό πεδίο $C_a{}^b{}_m$:

$$\boxed{\tilde\nabla_a\xi^b = \nabla_a\xi^b + C_a{}^b{}_m\xi^m}, \quad \forall \xi^b. \qquad (2)$$

3) Ὑπολογίζουμε τώρα τό $\tilde\nabla_a\eta_b - \nabla_a\eta_b$ γιά τυχόν συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο η_b. Γιά τυχόν ἀνταλλοίωτο x^b χρησιμοποιώντας τόν κανόνα τοῦ Leibnitz καί τή σχέση (1) ἔχουμε

$$x^b(\tilde\nabla_a\eta_b - \nabla_a\eta_b) = \cancel{\tilde\nabla_a(x^b\eta_b)} - (\tilde\nabla_a x^b)\eta_b - \cancel{\nabla_a(x^b\eta_b)} +$$

$$+ (\nabla_a x^b)\eta_b = -[\tilde\nabla_a x^b - \nabla_a x^b]\eta_b =$$

$$= -C_a{}^b{}_m x^m \eta_b = -C_a{}^p{}_m x^m \eta_p = -C_a{}^p{}_b x^b \eta_p = -C_a{}^m{}_b x^b \eta_m.$$

Ὥστε $x^b(\tilde\nabla_a\eta_b - \nabla_a\eta_b + C_a{}^m{}_b\eta_m) = 0, \ \forall x^b \Rightarrow$

$$\boxed{\tilde\nabla_a\eta_b = \nabla_a\eta_b - C_a{}^m{}_b\eta_m}, \quad \forall \eta_b. \qquad (3)$$

Τό πεδίο $C_a{}^m{}_b$ προκύπτει ἀπό τό $C_a{}^b{}_m$ μέ ἀντικατάσταση δεικτῶν καί κατά συνέπεια περιέχει ἀκριβῶς τήν ἴδια πληροφορία μέ τό $C_a{}^b{}_m$. Μποροῦμε λοιπόν νά τό θεωρήσουμε κατά μία γενικευμένη ἔννοια σάν τό "ἴδιο" τανυστικό πεδίο. Ἡ σχέση (3) λοιπόν λέει ὅτι τό "ἴδιο" τανυστικό πεδίο $C_a{}^m{}_b$ ἐκφράζει καί τό μέτρο τῆς διαφωνίας τῶν δύο τελεστῶν καί στά συναλλοίωτα διανυσματικά πεδία.

4) Θά ἀποδείξουμε τώρα μία ἰδιότητα τοῦ $C^m{}_{ab}$.

Γιά τυχόν βαθμωτό πεδίο f, $\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b f - \nabla_a\nabla_b f =$
$= \tilde{\nabla}_a \nabla_b f - \nabla_a\nabla_b f = (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(\nabla_b f) = - C^m{}_{ab}(\nabla_m f)$, ἀφοῦ τό $\nabla_b f$ εἶναι ἕνα συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο. Σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα ι) ἡ πρώτη ἔκφραση ἰσοῦται καί μέ $\tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_a f - \nabla_b\nabla_a f = \cdots = - C^m{}_{ba}(\nabla_m f)$. Σύγκριση δίνει ὅτι

$$\boxed{C^m{}_{ab} = C^m{}_{ba}} \qquad (4)$$

, ὅτι δηλαδή τό $C^m{}_{ab}$ εἶναι συμμετρικό ὡς πρός τούς δύο συναλλοίωτους δείκτες του. Ἡ (4) εἶναι ὁ μόνος περιορισμός πού ὑπάρχει στό $C^m{}_{ab}$. Σημειώνουμε ὅτι ἡ σύγκριση τῶν τανυστῶν $C^m{}_{ab}$ καί $C^m{}_{ba}$ γίνεται σύμφωνα μέ τήν ἰδέα πού ἀναπτύχθηκε στίς σελίδες 69 καί 70.

5) Τέλος ἀποδεικνύουμε ὅτι τό $C^m{}_{ab}$ (καί τά πεδία πού παίρνουμε ἀπ' αὐτό μέ ἀντικατάσταση δεικτῶν) ἀρκοῦν γιά νά ἐκφράσουμε τή διαφορά τῆς δράσεως τῶν δύο τελεστῶν σέ τυχόν τανυστικό πεδίο. Ἡ ἰδέα περιγράφεται στό τανυστικό πεδίο $T_{bc}{}^d$. Θέλουμε νά ὑπολογίσουμε τό $\tilde{\nabla}_a T_{bc}{}^d - \nabla_a T_{bc}{}^d$. Γιά τυχόντα πεδία x^b, y^c καί w_d ἔχουμε:

$$x^b y^c w_d(\tilde{\nabla}_a T_{bc}{}^d - \nabla_a T_{bc}{}^d) =$$
$$= \cancel{\tilde{\nabla}_a(x^b y^c w_d T_{bc}{}^d)} - T_{bc}{}^d\,\tilde{\nabla}_a(x^b y^c w_d) -$$
$$- \cancel{\nabla_a(x^b y^c w_d T_{bc}{}^d)} + T_{bc}{}^d\,\nabla_a(x^b y^c w_d) =$$
$$= - T_{bc}{}^d\left[(\tilde{\nabla}_a x^b)y^c w_d + x^b(\tilde{\nabla}_a y^c)w_d + x^b y^c(\tilde{\nabla}_a w_d)\right] +$$
$$+ T_{bc}{}^d\left[(\nabla_a x^b)y^c w_d + x^b(\nabla_a y^c)w_d + x^b y^c(\nabla_a w_d)\right] =$$

$$= -T_{bc}{}^{d}\left(\tilde{\nabla}_a x^b - \nabla_a x^b\right) y^c w_d - T_{bc}{}^{d} x^b \left(\tilde{\nabla}_a y^c - \nabla_a y^c\right) w_d -$$

$$- T_{bc}{}^{d} x^b y^c \left(\tilde{\nabla}_a w_d - \nabla_a w_d\right) = - T_{bc}{}^{d} C_a{}^{b}{}_{p} x^p y^c w_d -$$

$$- T_{bc}{}^{d} x^b C_a{}^{c}{}_{p} y^p w_d + T_{bc}{}^{d} x^b y^c C_{ad}^{p} w_p =$$

$$= \left(- T_{mc}{}^{d} C_{ab}^{m} - T_{bm}{}^{d} C_a{}^{m}{}_{c} + T_{bc}{}^{m} C_{am}^{d}\right) x^b y^c w_d ,$$

καὶ συνεπῶς

$$\boxed{\tilde{\nabla}_a T_{bc}{}^{d} = \nabla_a T_{bc}{}^{d} - C_{ab}^{m} T_{mc}{}^{d} - C_{ac}^{m} T_{bm}{}^{d} + C_{am}^{d} T_{bc}{}^{m}} . \quad (5)$$

Ὥστε λοιπὸν ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιδράσεων τῶν δύο τελεστῶν περιλαμβάνει ἕναν ὅρο ἀνάλογο πρὸς τὸ C^{p}_{qr} γιὰ κάθε δείκτη τοῦ τανυστικοῦ πεδίου μὲ πρόσημο "+" γιὰ τοὺς ἀνταλλοίωτους καὶ "−" γιὰ τοὺς συναλλοίωτους δείκτες. Ὁ τύπος (5) εὔκολα γενικεύεται καὶ μνημονεύεται γιὰ τανυστὲς μὲ περισσότερους δείκτες.

6) Εὔκολα ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφο. Ἔστω ∇_a ἕνας τελεστὴς παραγωγίσεως καὶ ἔστω C^{m}_{ab} ἕνα τυχὸν C^∞ συμμετρικὸ ὡς πρὸς τοὺς συναλλοίωτους δεῖκτες τανυστικὸ πεδίο. Ὁρίζουμε μία καινούργια ἀπεικόνιση – τὴν παριστάνουμε $\tilde{\nabla}_a$ –, ἀπὸ C^∞-τανυστικὰ πεδία ποὺ δὲν περιέχουν τὸν δείκτη a σὲ τανυστικὰ πεδία ποὺ περιέχουν τὸν "a" σὰν ἕναν ἐπιπλέον συναλλοίωτο δείκτη, ἀπὸ τὴ σχέση (1) γιὰ βαθμωτὰ πεδία, ἀπὸ τὴν (2) γιὰ ἀνταλλοίωτα διανυσματικά, ἀπὸ τὴν (3) γιὰ συναλλοίωτα διανυσματικά, ἀπὸ τὴ γενίκευση τῆς (5) γιὰ τυχόντα τανυστικὰ πεδία. Εὔκολα μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ἀπεικόνιση $\tilde{\nabla}_a$ εἶναι ἕνας καινούργιος τελεστὴς παραγωγίσεως.

Συνοψίζουμε: Τελεστές παραγωγίσεως δέν εἶναι ποτέ μοναδικοί σέ μία πολλαπλότητα (ἐκτός ἀπό πολλαπλότητες μέ διάσταση μηδέν!) ἀλλά καταλαβαίνουμε πάρα πολύ καλά κατά πόσο δέν εἶναι μοναδικοί. Κάθε C^∞ τανυστικό πεδίο μέ ἕναν ἀνταλλοίωτο καί δύο συναλλοίωτους δείκτες καί συμμετρικό ὡς πρός τούς συναλλοίωτους δείκτες ὁρίζει ἕνα τελεστή παραγωγίσεως. Ὑπάρχουν λοιπόν ἄπειροι τελεστές παραγωγίσεως. Ἄν μᾶς δοθεῖ ἕνας ξέρουμε νά κατασκευάσουμε ὅλους τούς ὑπόλοιπους. Ἡ μή μοναδικότητά τους μᾶς ἐπιτρέπει νά διαλέγουμε καί νά δουλεύουμε μέ τόν τελεστή πού εἶναι ὁ πλέον κατάλληλος γιά τήν ἀντιμετώπιση τοῦ συγκεκριμένου προβλήματος. Σέ τέτοιες περιπτώσεις ξεκινᾶμε ἀπό ἕναν τυχαῖο τελεστή (πού τίς περισσότερες φορές εἶναι ὁ τελεστής τοῦ παραδείγματος πού ἀκολουθεῖ), ἀντιστοιχοῦμε τόν ζητούμενο τελεστή μέ κάποιο πεδίο $C^m{}_{ab}$, ἐκφράζουμε τίς ἐπιπλέον ἐπιθυμητές συνθῆκες σάν συνθῆκες στό $C^m{}_{ab}$ καί τελικά προσδιορίζουμε τό $C^m{}_{ab}$.

Παράδειγμα: Ἔστω πολλαπλότητα M καί χάρτης της (V, ϕ) πού δίνει συντεταγμένες $\{x^1, x^2, \dots x^n\}$ στά σημεῖα τοῦ V. Ἔστω τυχόν τανυστικό πεδίο, π.χ. $T^a{}_b{}^c$, μέ συνιστῶσες σ' αὐτό τόν χάρτη $[T^a{}_b{}^c]^i{}_j{}^k$. Ὑπολογίζουμε τίς n^4 συναρτήσεις n μεταβλητῶν $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\{[T^a{}_b{}^c]^i{}_j{}^k\}$ καί τίς μεταχειριζόμαστε σάν τίς συνιστῶσες $[\Sigma_m{}^a{}_b{}^c]_\lambda{}^i{}_j{}^k = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\{[T^a{}_b{}^c]^i{}_j{}^k\}$ ἑνός καινούργιου τανυστικοῦ πεδίου

$\Sigma_m{}^{a}{}_{b}{}^{c}$. Ἐπαναλαμβάνοντας τὴν ἴδια κατασκευὴ γιὰ κάθε τανυστικὸ πεδίο ὁρίζουμε μία ἀπεικόνιση ἀπὸ C^∞-τανυστικὰ πεδία σὲ τανυστικὰ πεδία μ' ἕναν ἐπιπλέον συναλλοίωτο δείκτη. Εὔκολα ἐλέγχεται ὅτι ἡ ἀπεικόνιση αὐτὴ εἶναι ἕνας τελεστὴς παραγωγίσεως.

Θεωροῦμε τώρα $\frac{n^2(n+1)}{2}$ τυχαῖες C^∞ συναρτήσεις τῶν n μεταβλητῶν $x^1, x^2, \ldots x^n$ καὶ τὶς ἀφήνουμε νὰ παίζουν τὸν ρόλο τῶν συνιστωσῶν $[C^m{}_{ab}]^i{}_{jk}$ τοῦ $C^m{}_{ab}$. [$C^m{}_{ab} = C^m{}_{ba}$ ἐάν $[C^m{}_{ab}]^i{}_{jk} = [C^m{}_{ab}]^i{}_{kj}$. Χρειάζονται $\frac{n(n+1)}{2}$ γιὰ τοὺς δύο συμμετρικοὺς κάτω δείκτες καὶ ὅλοι αὐτοὶ μποροῦν νὰ συνδυασθοῦν κατὰ n τρόπους μὲ τὸν ἐπάνω δείκτη i.] Χρησιμοποιώντας τώρα τὶς συνιστῶσες τῶν σχέσεων (2), (3) καὶ (5) μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε, μὲ τὴ βοήθεια συνιστωσῶν, τὸν τυχόντα τελεστὴ παραγωγίσεως στὸ χάρτη (U, ϕ).

Ὥστε λοιπόν, ἡ ἀφθαιρεσία στὴν ἐκλογὴ ἑνὸς τελεστὴ παραγωγίσεως εἶναι ἀκριβῶς ἴση μὲ τὴν ἀφθαιρεσία στὴν ἐκλογὴ $\frac{n^2(n+1)}{2}$ C^∞ βαθμωτῶν πεδίων στὴν πολλαπλότητα. (Προσοχή, κάθε βαθμωτὸ πεδίο ἔχει ἄπειρους "βαθμοὺς ἐλευθερίας". Ἔχει ἕνα μόνο βαθμὸ ἐλευθερίας σ' ἕνα σημεῖο).

<u>Παράδειγμα 2ον</u>: Στήν Ἑνότητα 9Z ὁρίσαμε τόν τανυστή τοῦ Kronecker σάν τόν $\binom{1}{1}$ τανυστή πού ἱκανοποιεῖ τήν

$$\delta_a{}^b \xi^a = \xi^b , \quad \forall \xi^a \qquad (6)$$

καί ἀποδείξαμε ὅτι $\delta_a{}^b T^{ca}{}_{d\dots}^{\dots} = T^{cb}{}_{d\dots}^{\dots}$, γιά τυχόντα τανυστή. Διαλέγοντας τόν τανυστή τοῦ Kronecker σέ κάθε σημεῖο μιᾶς πολλαπλότητας ἔχουμε τό τανυστικό πεδίο τοῦ Kronecker, πού τό συμβολίζουμε ἐπίσης $\delta_a{}^b$. Γιά τυχόντα τελεστή παραγωγίσεως ἡ (6) δίνει

$(\nabla_m \delta_a{}^b)\, \xi^a + \delta_a{}^b (\nabla_m \xi^a) = (\nabla_m \xi^b)$, καί ἐπειδή $\delta_a{}^b (\nabla_m \xi^a) = \nabla_m \xi^b$ παίρνουμε ὅτι $(\nabla_m \delta_a{}^b)\, \xi^a = 0, \forall \xi^a \Rightarrow$

$$\nabla_m \delta_a{}^b = 0 , \quad \forall \nabla_m . \qquad (7)$$

Ἡ σχέση (7) δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τόν τελεστή παραγωγίσεως πού χρησιμοποιήθηκε! Ἐλέγχουμε αὐτό τό ἀποτέλεσμα καί διαφορετικά. Γιά ὁποιονδήποτε ἄλλο $\tilde{\nabla}_m$, $\tilde{\nabla}_m \delta_a{}^b = \nabla_m \delta_a{}^b - C_{ma}^p \delta_p{}^b + C_{mp}^b \delta_a{}^p =$ $= \nabla_m \delta_a{}^b - C_m{}^b{}_a + C_m{}^b{}_a = \nabla_m \delta_a{}^b$. Δηλαδή, γιά τόν τανυστή τοῦ Kronecker ὅλοι οἱ ὅροι οἱ ἀνάλογοι τῶν C^a_{bc} ἀλληλοαναιροῦνται.

<u>Παρατήρηση 3η</u>: Τό γεγονός ὅτι οἱ ὅροι τῆς σχέσεως (5) ἀφαιροῦνται ὅταν ἀναφέρονται σέ συναλλοίωτους δείκτες καί προστίθενται ὅταν ἀναφέρονται σέ ἀνταλλοίωτους δείκτες δέν εἶναι οὔτε οὐσιώδες, οὔτε καί καθολικῶς παραδεκτό στή βιβλιογραφία. Π.χ. χρησιμοποιώντας τό $-C^a_{bc}$ στή θέση τοῦ C^a_{bc} θά εἴχαμε "+" γιά τούς συναλλοίωτους καί "−" γιά τούς ἀνταλλοίωτους δείκτες. Ἁπλῶς πρέπει νά καθορίσουμε τή

σύμβασή μας γράφοντας τίς σχέσεις (2) καί (3) καί μετά νά παραμείνουμε συνεπεῖς μ' αὐτήν.

Παρατήρηση 4η: Ἡ συνθήκη $\nabla_a\nabla_b f = \nabla_b\nabla_a f$, $\forall$ C^∞ βαθμωτό πεδίο περιελήφθηκε στίς συνθῆκες τοῦ ὁρισμοῦ μας γιά νά γενικεύση τήν $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ πού ἰσχύει γιά συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν μέ συνεχεῖς μερικές παραγώγους. Στή μελέτη τῆς μοναδικότητας τῶν τελεστῶν παραγωγίσεως ἔπαιξε ἕνα μόνο ρόλο: ἔκανε τό $C^m{}_{ab}$ συμμετρικό ὡς πρός τούς δύο κάτω δείκτες του. Πολλές φορές οἱ τελεστές παραγωγίσεως ἀπαιτοῦνται νά ἱκανοποιοῦν μόνο τίς συνθῆκες i)–iv). Σ' αὐτή τή περίπτωση ἡ ἀνάλυσή μας ἐξακολουθεῖ νά ἰσχύει μέ μία μόνο διαφορά: τό πεδίο $C^m{}_{ab}$ δέν ἀπαιτεῖται πλέον νά εἶναι συμμετρικό. Λέμε τότε ὅτι μελετοῦμε τελεστές παραγωγίσεως μέ στρέψη (torsion). Αὐτή τή γενίκευση δέν θά τήν θεωρήσουμε γιατί δέν μᾶς χρειάζεται στή Σχετικότητα. Ἀναφέρουμε ὅμως ὅτι ὑπάρχει μία θεωρία βαρύτητος (γενίκευση τῆς Σχετικότητας), ἡ θεωρία τῶν Einstein–Cartan, πού χρησιμοποιεῖ καί στρέψη. Σ' αὐτή τή περίπτωση τό συμμετρικό κομμάτι τοῦ $C^m{}_{ab}$ σχετίζεται μέ τή μάζα καί τό ἀντισυμμετρικό του κομμάτι μέ τό spin.

Στήν ἑπόμενη ἑνότητα θά διαπιστώσουμε ὅτι ἄν ἀντί γιά τή συνθήκη v) ἀπαιτήσουμε τήν ἀντιμεταθετικότητα δύο διαδοχικῶν παραγωγίσεων κάθε τανυστικοῦ πεδίου τότε ἀποκλείονται σχεδόν ὅλες οἱ ἐνδιαφέρουσες πολλαπλότητες καί οἱ ἐνδιαφέροντες τελεστές παραγωγίσεως.

12. Τανυστής τοῦ Riemann. Καμπυλότητα.

Στήν ἑνότητα αὐτή θά βροῦμε τό τανυστικό πεδίο τοῦ Riemann σάν τό τανυστικό πεδίο πού μετρᾶ κατά πόσο δύο διαδοχικές παραγωγίσεις τοῦ τυχόντος τανυστικοῦ πεδίου δέν ἀντιμετατίθενται. Ἀργότερα θά παρουσιάσουμε καί ἐπιχειρήματα πού ὑποδεικνύουν ὅτι αὐτό τό τανυστικό πεδίο μετρᾶ καί τή "καμπυλότητα" τῆς πολλαπλότητας.

Ἔστω τυχών τελεστής παραγωγίσεως ∇_a καί τυχόν C^∞ διανυσματικό πεδίο ξ_c. Μελετοῦμε τό τανυστικό πεδίο $(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\xi_c$. Ἀποδεικνύουμε πρῶτα ὅτι ὁ $\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a$ ἐπιδρᾶ γραμμικά στό ξ_c μέ τή γενικευμένη ἔννοια τῆς γραμμικότητας τῆς σελ. 80. Πράγματι γιά τυχόντα f C^∞-βαθμωτό καί η_c C^∞-διανυσματικό ἔχουμε:

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)(\eta_c + f\xi_c) = \\
&= \nabla_a\left[\nabla_b\eta_c + (\nabla_b f)\xi_c + f(\nabla_b\xi_c)\right] - \nabla_b\left[\nabla_a\eta_c + (\nabla_a f)\xi_c + f(\nabla_a\xi_c)\right] = \\
&= \left[\nabla_a\nabla_b\eta_c + (\nabla_a\nabla_b f)\xi_c + \cancel{(\nabla_b f)(\nabla_a\xi_c)} + \cancel{(\nabla_a f)(\nabla_b\xi_c)} + f\,\nabla_a\nabla_b\xi_c\right] - \\
&- \left[\nabla_b\nabla_a\eta_c + (\nabla_b\nabla_a f)\xi_c + \cancel{(\nabla_a f)(\nabla_b\xi_c)} + \cancel{(\nabla_b f)(\nabla_a\xi_c)} + f\,\nabla_b\nabla_a\xi_c\right] = \\
&= (\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\eta_c + f\,(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\xi_c\ .
\end{aligned}
$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι ὑπάρχει τανυστικό πεδίο $R_{abc}{}^{m}$ ὥστε

$$\boxed{(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\xi_c = R_{abc}{}^{m}\xi_m\ , \quad \forall\ \xi_c} \quad (1).$$

Τό $R_{abc}{}^{m}$ λέγεται τό τανυστικό πεδίο τοῦ Riemann τῆς πολλαπλότητας M πού ἀντιστοιχεῖ στόν τελεστή παραγωγίσεως ∇_a. [Γιά κάποιο λόγο πού δέν τόν καταλαβαίνω, τίς περισσότερες φορές ἀναφέρεται σάν ὁ τανυστής τοῦ Riemann τῆς M γιά τόν ∇_a].

Ὑπολογίζουμε τώρα τό $(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\xi^c$, $\forall\, \xi^c$. Γιά τυχόν x_c ἔχουμε

$$
\begin{aligned}
0 &= (\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)(\xi^c x_c) = \\
&= \nabla_a\left[(\nabla_b\xi^c)x_c+\xi^c(\nabla_b x_c)\right]-\nabla_b\left[(\nabla_a\xi^c)x_c+\xi^c(\nabla_a x_c)\right] = \\
&= \left[(\nabla_a\nabla_b\xi^c)x_c+\cancel{(\nabla_b\xi^c)(\nabla_a x_c)}+\cancel{(\nabla_a\xi^c)(\nabla_b x_c)}+\xi^c(\nabla_a\nabla_b x_c)\right]- \\
&\quad -\left[(\nabla_b\nabla_a\xi^c)x_c+\cancel{(\nabla_a\xi^c)(\nabla_b x_c)}+\cancel{(\nabla_b\xi^c)(\nabla_a x_c)}+\xi^c(\nabla_b\nabla_a x_c)\right] = \\
&= \left[(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\xi^c\right]x_c+\underbrace{\xi^c(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)x_c}_{\xi^c R_{abc}{}^{m}x_m\,=\,\xi^m R_{abm}{}^{c}x_c},
\end{aligned}
$$

$\forall\, x_c$. Ἄρα,

$$\boxed{(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\xi^c = -R_{abm}{}^{c}\,\xi^m, \quad \forall\,\xi^m} \qquad (2)$$

Παρόμοια βρίσκουμε γιά τό τυχόν τανυστικό πεδίο ὅτι

$$\boxed{\begin{aligned}(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)T_{cd}{}^{e} &= R_{abc}{}^{m}T_{md}{}^{e}+R_{abd}{}^{m}T_{cm}{}^{e}- \\ &\quad -R_{abm}{}^{e}T_{cd}{}^{m}\end{aligned}} \qquad (3)$$

δηλ. κάθε δείκτης τοῦ τανυστῆ δίνει κι ἀπό ἕνα ὅρο στό δεξιό μέλος.

Θὰ ὁρίσουμε τώρα λίγο συμβολισμὸ ποὺ θὰ μᾶς ἐπιτρέψῃ νὰ ἐκφράσουμε ὄμορφα τὶς ἰδιότητες τοῦ τανυστῆ τοῦ Riemann. Ἀναφέρεται στὸ συμμετρικὸ καὶ τὸ ἀντισυμμετρικὸ τμῆμα ἑνὸς τανυστῆ.

Ἔστω ὁ T_{ab}. Ὁρίζουμε

$$T_{(ab)} = \frac{1}{2!}\left(T_{ab} + T_{ba}\right) = \text{συμμετρικὸ τμῆμα τοῦ } T_{ab}.$$

Προφανῶς $T_{(ab)} = T_{ab} \Longleftrightarrow T_{ab} = T_{ba}$.

Γενικὰ ἕνας τανυστὴς μὲ δύο ἢ περισσότερους δεῖκτες σὲ μία θέση (πάνω ἢ κάτω) λέγεται ὁλικὰ συμμετρικὸς (ὡς πρὸς τοὺς δεῖκτες αὐτῆς τῆς θέσεως) ἐὰν δὲν ἀλλάζει κατὰ τὴν ἐναλλαγὴ δύο ὁποιωνδήποτε ἀπ' αὐτοὺς τοὺς δεῖκτες. Παρόμοια ὁρίζεται καὶ ὁ ὁλικὰ ἀντισυμμετρικὸς τανυστής.

Δουλεύοντας, π.χ., μὲ συναλλοίωτους μόνο δεῖκτες ὁρίζουμε

$$T_{(abc)} = \frac{1}{3!}\left(T_{abc} + T_{bca} + T_{cab} + T_{cba} + T_{bac} + T_{acb}\right),$$

$$T_{(a_1 a_2 \dots a_n)} = \frac{1}{n!}\left(\sum_{(i_1, i_2, \dots i_n)} T_{a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}}\right),$$ ὅπου τὸ

ἄθροισμα γίνεται σ' ὅλες τὶς μεταθέσεις τῶν $1, 2, \dots n$.

Παρόμοια ὁρίζουμε

$$T_{[ab]} = \frac{1}{2!}\left(T_{ab} - T_{ba}\right)$$

$$T_{[abc]} = \frac{1}{3!}\left(T_{abc} + T_{bca} + T_{cab} - T_{cba} - T_{bac} - T_{acb}\right)$$

$$T_{[a_1 a_2 \dots a_n]} = \frac{1}{n!}\left(\sum_{(i_1, \dots i_n)} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} T_{a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}}\right),$$

ὅπου

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_m} = \begin{cases} +1 & \text{ἐάν } (i_1, \dots i_m) \text{ εἶναι ἄρτια μετάθεση τῶν } 1,2,\dots n \\ -1 & \text{ἐάν } (i_1, \dots i_m) \text{ εἶναι περιττή μετάθεση τῶν } 1,2,\dots n. \end{cases}$$

Εὔκολα ἀποδεικνύονται, π.χ., οἱ :

$T_{(abc)} = T_{abc} \iff$ ὁ T_{abc} εἶναι ὁλικά συμμετρικός,

$T_{[abcd]} = T_{abcd} \iff$ ὁ T_{abcd} εἶναι ὁλικά ἀντισυμμετρικός,

$$T_{((abc))} = T_{(abc)} = T_{((ab)c)},$$

$$T_{[[abc]]} = T_{[abc]} = T_{[a[bc]]},$$

$$T_{[(ab)cd]} = 0, \qquad T_{(a[bc]d)} = 0.$$

Γενικά, ὅταν παρενθέσεις περιβάλλουν παρενθέσεις ἤ ὅταν ἀγκύλες περιβάλλουν ἀγκύλες, οἱ ἐσωτερικές παρενθέσεις ἤ ἀγκύλες μποροῦν νά ἀγνοηθοῦν. Ὅταν ὅμως παρενθέσεις περιβάλλουν ἀγκύλες ἤ ὅταν ἀγκύλες περιβάλλουν παρενθέσεις τό ἀποτέλεσμα εἶναι ὁ μηδενικός τανυστής.

Μέ τόν καινούργιο μας συμβολισμό ἡ ταυτότητα πού ὁρίζει τόν τανυστή τοῦ Riemann, ἐξ. (1), γράφεται

$$\nabla_{[a}\nabla_{b]}\xi_c = \frac{1}{2} R_{abc}{}^{m}\xi_m, \tag{4}$$

παρόμοια καί οἱ ταυτότητες (2) καί (3).

Ἀναφέρουμε τώρα τίς βασικές ἰδιότητες τοῦ τανυστῆ τοῦ Riemann.

1. $R_{[ab]c}{}^{d} = R_{abc}{}^{d}$, Προφανής ἀπό τόν ὁρισμό.

2. $R_{[abc]}{}^{d} = 0$.

<u>Ἀπόδειξη:</u> Γιά τυχόν C^∞ βαθμωτό πεδίο f ἔχουμε

$$\nabla_{[a}\nabla_{b]}\nabla_c f = \frac{1}{2} R_{abc}{}^{m}(\nabla_m f) \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2} R_{[abc]}{}^{m}(\nabla_m f) = \nabla_{[[a}\nabla_{b]}\nabla_{c]} f = \nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]} f = \nabla_{[a}\nabla_{(b}\nabla_{c)]} f = 0,$$

δηλ. $R_{[abc]}{}^{m}(\nabla_m f) = 0, \quad \forall \; C^\infty$ βαθμωτό $f \Longrightarrow$

$R_{[abc]}{}^{m} = 0$, ἐπειδή σέ κάθε σημεῖο τῆς πολλαπλότητας τά $\nabla_m f$ γιά ὅλα τά βαθμωτά ἀπαρτίζουν ἕνα διανυσματικό χῶρο n διαστάσεων, πού εἶναι ὁ ἴδιος μέ τόν διανυσματικό χῶρο τῶν τιμῶν τῶν συναλλοιώτων διανυσματικῶν πεδίων στό ἴδιο σημεῖο.

3. $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{e} = 0$. Ἡ ἰδιότητα αὐτή λέγεται ταυτότητα τοῦ Bianchi. [Πολλές φορές ἀναφέρονται "οἱ ταυτότητες" τοῦ Bianchi. Δέν ὑπάρχουν ἄλλες, αὐτή πού δώσαμε εἶναι ἡ μοναδική. Πολλές εἶναι οἱ συνιστῶσες τοῦ τανυστικοῦ πεδίου $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{e}$ πού δίνει πολλές βαθμωτές ἀλλά μία μόνο τανυστική ταυτότητα].

Ἀπόδειξη: Γιά τυχόν διανυσματικό πεδίο ξ_a ἔχουμε:

$$\nabla_a \nabla_{[b}\nabla_{c]}\xi_d = \nabla_a\left(\frac{1}{2} R_{bcd}{}^{m}\xi_m\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla_a R_{bcd}{}^{m})\xi_m + \frac{1}{2} R_{bcd}{}^{m}(\nabla_a \xi_m) \Longrightarrow$$

$$\nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]}\xi_d = \frac{1}{2}\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{m}\xi_m + \frac{1}{2} R_{[bc|d|}{}^{m}(\nabla_{a]}\xi_m), \qquad (5)$$

ὅπου χρησιμοποιήσαμε τίς δύο κάθετες γραμμοῦλες "||" γιά νά δηλώσουμε ὅτι στόν τελευταῖο ὅρο ὁ δείκτης d δέν συμμετέχει στήν πράξη "πάρε τό ἀντισυμμετρικό τμῆμα".

Χρησιμοποιώντας τώρα τή σχέση (3) γιά τό τανυστικό πεδίο $\nabla_c \xi_d$ παίρνουμε

$$\nabla_{[a}\nabla_{b]}\nabla_c \xi_d = \frac{1}{2} R_{abc}{}^m \nabla_m \xi_d + \frac{1}{2} R_{abd}{}^m \nabla_c \xi_m \Rightarrow$$

$$\nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]} \xi_d = \frac{1}{2} \cancel{R_{[abc]}{}^m} \nabla_m \xi_d + \frac{1}{2} R_{[ab|d|}{}^m \nabla_{c]} \xi_m . \quad (6)$$

Οἱ τελευταῖοι ὅροι τῶν (5) καί (6) εἶναι ἴσοι γιατί (bca) εἶναι ἄρτια μετάθεση τῶν (abc). Ἀφοῦ καί τά πρῶτα μέλη εἶναι ἴσα συμπεραίνουμε ὅτι

$\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^m \xi_m = 0$, $\forall\, \xi_m$ ἀπ᾽ ὅπου προκύπτει ἡ ταυτότητα τοῦ Bianchi.

Παράδειγμα 1ον: Ἔστω ∇_a καί $\tilde{\nabla}_a$ δύο τελεστές παραγωγίσεως σέ πολλαπλότητα καί $R_{abc}{}^d$, $\tilde{R}_{abc}{}^d$ οἱ ἀντίστοιχοι τανυστές τοῦ Riemann. Ἐάν ἡ σχέση μεταξύ τῶν ∇_a καί $\tilde{\nabla}_a$ ἐκφράζεται ἀπό τό τανυστικό πεδίο $C^a{}_{bc}$ θέλουμε νά βροῦμε τή σχέση μεταξύ τῶν $R_{abc}{}^d$ καί $\tilde{R}_{abc}{}^d$ συναρτήσει τοῦ $C^a{}_{bc}$.

Γιά τυχόν διανυσματικό πεδίο ξ_c ὑπολογίζουμε τό

$$\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \xi_c = \tilde{\nabla}_a \left(\nabla_b \xi_c - C^m{}_{bc} \xi_m \right) =$$

$$= \tilde{\nabla}_a (\nabla_b \xi_c) - (\tilde{\nabla}_a C^m{}_{bc}) \xi_m - C^m{}_{bc} (\tilde{\nabla}_a \xi_m) =$$

$$= \nabla_a \nabla_b \xi_c - C^m{}_{ab} (\nabla_m \xi_c) - C^m{}_{ac} (\nabla_b \xi_m) -$$

$$- \left[\nabla_a C^m{}_{bc} - C^s{}_{ab} C^m{}_{sc} - C^s{}_{ac} C^m{}_{bs} + C^m{}_{as} C^s{}_{bc} \right] \xi_m -$$

$$- C^m{}_{bc} \left(\nabla_a \xi_m - C^s{}_{am} \xi_s \right) =$$

$$= \nabla_a \nabla_b \xi_c - C^m{}_{ab} \nabla_m \xi_c - 2 C^m{}_{c(a} (\nabla_{b)} \xi_m) - (\nabla_a C^m{}_{bc}) \xi_m +$$

$$+ 2 C^s{}_{c(a} C^m{}_{b)s} \xi_m + C^s{}_{ab} C^m{}_{sc} \xi_m - C^m{}_{as} C^s{}_{bc} \xi_m .$$

Παίρνουμε τώρα τό ἀντισυμμετρικό τμῆμα τῶν δύο μελῶν ὡς πρός τούς δείκτες "a" καί "b".

Τό πρῶτο μέλος δίνει $\frac{1}{2}\tilde{R}_{abc}{}^{m}\xi_m$.

Στό δεύτερο μέλος ὁ δεύτερος, τρίτος, πέμπτος καί ἕκτος ὅρος δίνουν μηδέν γιατί εἶναι συμμετρικοί ὡς πρός a καί b, ὁ πρῶτος δίνει $\frac{1}{2}R_{abc}{}^{m}\xi_m$ καί ὁ τέταρτος καί ἕβδομος ἀντισυμμετρίζονται ὡς πρός a καί b. Ἐξαλείφοντας τό ξ_m παίρνουμε τή ζητούμενη σχέση

$$\tilde{R}_{abc}{}^{m} = R_{abc}{}^{m} - 2\nabla_{[a}C^{m}_{b]c} - 2\,C^{m}_{s[a}C^{s}_{b]c}\,. \qquad (7).$$

<u>Παράδειγμα 2ον:</u> Συστολή τῶν δεικτῶν b καί m τοῦ τανυστικοῦ πεδίου τοῦ Riemann $R_{abc}{}^{m}$ δίνει τό τανυστικό πεδίο τοῦ Ricci

$$R_{ac} = R_{amc}{}^{m} \qquad (8)$$

(ἀναφορικά μέ τόν τελεστή παραγωγίσεως ∇_a πού ὅρισε τόν τανυστή τοῦ Riemann). Προσοχή! Πρός τό παρόν ὁ τανυστής τοῦ Ricci δέν ἔχει καμμία συμμετρία.

13. Μετρικός τανυστής.

Σ' αὐτή τήν ἑνότητα θά μελετήσουμε πολλαπλότητες μέ δίχως ἐπιπλέον δομή, ἕνα προτιμητέο τανυστικό πεδίο $\binom{0}{2}$. Θά διαπιστώσουμε ὅτι σ' αὐτή τή περίπτωση ἡ γεωμετρία τῆς πολλαπλότητας μπορεῖ νά μελετηθεῖ πολύ λεπτομερῶς, π.χ. θά διαπιστώσουμε ὅτι ἔχουμε κάτι σάν ἀπόσταση μεταξύ σημείων τῆς πολλαπλότητας, ἔχουμε τίς γεωδαισιακές πού εἶναι τά "πιό εὐθύγραμμα τμήματα" πού μποροῦν νά ὑπάρξουν στή πολλαπλότητα, ἔχουμε μοναδικό προτιμητέο τελεστή παραγωγίσεως, ἐπιπλέον ἰδιότητες τοῦ τανυστῆ τοῦ Riemann καί γενικά ἔχουμε ὅ,τι μᾶς χρειάζεται γιά νά κάνουμε φυσική. Ἡ μελέτη πολλαπλοτήτων μέ μετρικό τανυστή ἀναφέρεται συνήθως σάν γεωμετρία τοῦ Riemann.

<u>Ὁρισμός:</u> Ἔστω πολλαπλότητα M. <u>Μετρικός τανυστής</u> (metric) στήν M λέγεται ἕνα C^∞-$\binom{0}{2}$ τανυστικό πεδίο g_{ab} πού εἶναι

i) συμμετρικό, δηλ. $g_{ab} = g_{ba}$, καί

ii) ἀντιστρεπτό (invertible), δηλ. ὑπάρχει τανυστικό πεδίο g^{ac} ὥστε $g_{ab}\, g^{ac} = \delta_b{}^c =$ τό τανυστικό πεδίο τοῦ Kronecker.

Προσοχή!, πρός τό παρόν ἡ συστολή γίνεται ὡς πρός τούς πρώτους δεῖκτες.

Ἀποδεικνύουμε πρῶτα δύο ἁπλές ἰδιότητες τοῦ g_{ab}.

1. Ὁ g^{ab} εἶναι συμμετρικός. Πράγματι,

$$g^{ma}\, g^{nb}\, g_{mn} = \delta_n{}^a\, g^{nb} = g^{ab},$$

ἐνῶ τό πρῶτο μέλος ἰσοῦται καί μέ

$g^{ma} g^{nb} g_{nm} = g^{ma} \delta_m{}^b = g^{ba}$. Συνεπώς, μεταξύ άλλων, δέν χρειάζεται πλέον νά σκοτιζόμαστε γιά τή θέση τών δεικτών μέ τούς όποίους κάνουμε πολλαπλασιασμό μέ συστολή.

2. Ο άντίστροφος g^{ab} τού g_{ab} είναι μοναδικός. Πράγματι, έστω $\tilde{g}^{ab}$ ένας άκόμη άντίστροφος τού g_{ab}. Τότε, $(g^{ab} - \tilde{g}^{ab}) g_{am} = \delta_m{}^b - \delta_m{}^b = 0 \Rightarrow$

$$0 = (g^{ab} - \tilde{g}^{ab}) g_{am} g^{mc} = (g^{ab} - \tilde{g}^{ab}) \delta_a{}^c =$$

$$= g^{ac} - \tilde{g}^{ac} \Rightarrow \tilde{g}^{ac} = g^{ac}.$$

Συνεπώς σέ κάθε πολλαπλότητα μέ μετρικό τανυστή g_{ab} θά θεωρούμε πάντοτε καί τόν <u>άντίστροφό</u> του (inverse) g^{ab} πού είναι μονοσήμαντα ορισμένος.

Άποφασίζουμε νά χρησιμοποιήσουμε τήν ύπαρξη καί τή γνώση τών g_{ab} καί g^{ab} γιά νά άπλοποιήσουμε τό συμβολισμό μας. Καθιερώνουμε τή σύμβαση: Πολλαπλασιασμός τανυστών (καί τανυστικών πεδίων) μέ g_{ab} ή g^{ab} μέ σύγχρονη συστολή θά ύποδηλώνεται μέ κατέβασμα ή άνέβασμα τού συστελλόμενου δείκτη τού τανυστή. Π.χ. θά γράφουμε

$$T_{ab}{}^c g^{bd} = T_a{}^{dc} = g_{am} T^{mdc} = g^{ck} T_a{}^d{}_k = \dots$$

Μ' αύτή τή σύμβαση ό μετρικός τανυστής πολύ λίγο έμφανίζεται άναλυτικά στίς σχέσεις πού γράφουμε, άν καί συνήθως έχει ήδη παίξει άρκετό ρόλο. Εύκολα έλέγχει κανείς ότι τό διαδοχικό άνέβασμα καί κατέβασμα ένός δείκτη άφήνει τόν τανυστή άμετάβλητο καί συνεπώς ή σύμβασή μας δέν όδηγεί σέ άντινομίες.

Ἀποδεικνύουμε πρῶτα τό παρακάτω πολύ σημαντικό.

<u>Θεώρημα:</u> Ἔστω (M, g_{ab}) παρασυμπαγής πολλαπλότητα μέ μετρικό τανυστή. Ὑπάρχει ἕνας καί μόνον ἕνας τελεστής παραγωγίσεως ∇_a ὥστε $\nabla_a g_{bc} = 0$.

<u>Ἀπόδειξη:</u> Ἔστω $\tilde{\nabla}_a$ τυχαῖος τελεστής παραγωγίσεως (περιμένουμε λοιπόν ὅτι $\tilde{\nabla}_a g_{bc} \neq 0$) καί ∇_a ὁ τελεστής πού ἀναζητοῦμε. Ἔστω ὅτι οἱ ∇_a καί $\tilde{\nabla}_a$ σχετίζονται μέ τό πεδίο $\tilde{C}^a{}_{bc}$, ὁπότε ἔχουμε

$$\nabla_a g_{bc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - \tilde{C}^m{}_{ab}\, g_{mc} - \tilde{C}^m{}_{ac}\, g_{bm} .$$

Ἀναζητοῦμε τό $\tilde{C}^a{}_{bc}$ ὥστε $\nabla_a g_{bc} = 0$, δηλ. ἀπαιτοῦμε

$$\tilde{C}^m{}_{ab}\, g_{mc} + \tilde{C}^m{}_{ac}\, g_{mb} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} . \qquad (1)$$

Γράφουμε καί τίς δύο σχέσεις πού προκύπτουν μέ διαδοχικές κυκλικές ἐναλλαγές τῶν a, b, c:

$$\tilde{C}^m{}_{bc}\, g_{ma} + \tilde{C}^m{}_{ba}\, g_{mc} = \tilde{\nabla}_b g_{ca} , \qquad (2)$$

$$\tilde{C}^m{}_{ca}\, g_{mb} + \tilde{C}^m{}_{cb}\, g_{ma} = \tilde{\nabla}_c g_{ab} . \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τίς (2) καί (3), ἀφαιρώντας τήν (1) καί χρησιμοποιώντας τή συμμετρία τοῦ $\tilde{C}^a{}_{bc}$ παίρνουμε

$$2\, \tilde{C}^m{}_{bc}\, g_{ma} = \tilde{\nabla}_b g_{ca} + \tilde{\nabla}_c g_{ab} - \tilde{\nabla}_a g_{bc} \qquad (4)$$

καί πολλαπλασιάζοντας τήν (4) μέ g^{an} βρίσκουμε, μετά κι ἀπό ἀντικατάσταση δεικτῶν,

$$\tilde{C}^a{}_{bc} = \frac{1}{2}\, g^{am} \left(\tilde{\nabla}_b g_{cm} + \tilde{\nabla}_c g_{bm} - \tilde{\nabla}_m g_{bc} \right) . \qquad (5)$$

Ὁρίζοντας λοιπόν τόν τελεστή ∇_a ἀπό τόν $\tilde{\nabla}_a$ καί τό $\tilde{C}^a{}_{bc}$ τῆς (5) ἔχουμε προσδιορίσει ἕνα τελεστή πού ἱκανοποιεῖ τήν $\nabla_a g_{bc} = 0$.

Πρέπει νά δείξουμε τώρα, γιά τή μοναδικότητα, ὅτι ὁ ∇_a δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τόν ἀρχικό $\tilde{\nabla}_a$. Ὑποθέτουμε λοιπόν ὅτι χρησιμοποιήσαμε τόν $\tilde{\tilde{\nabla}}_a$ σάν βοηθητικό τελεστή, ὑπολογίσαμε τό $\tilde{\tilde{C}}^a_{bc}$ ἀπό τήν ἀντίστοιχη τῆς (5) σχέση καί κατασκευάσαμε τόν ∇_a πού γιά νά εἴμαστε ἀκριβεῖς τόν συμβολίζουμε $\underset{\approx}{\nabla}_a$. Ὁ προηγούμενος εἶναι ὁ $\underset{\sim}{\nabla}_a$. Ἔστω ἐπίσης K^a_{bc} τό τανυστικό πεδίο πού δίνει τή σχέση τῶν $\tilde{\nabla}_a$ καί $\tilde{\tilde{\nabla}}_a$. Γιά τυχαῖο διανυσματικό ξ_b ἔχουμε

$$\underset{\sim}{\nabla}_a \xi_b - \underset{\approx}{\nabla}_a \xi_b = \tilde{\nabla}_a \xi_b - \tilde{C}^r_{ab}\xi_r - \tilde{\tilde{\nabla}}_a \xi_b + \tilde{\tilde{C}}^r_{ab}\xi_r =$$

$$= (\tilde{\nabla}_a - \tilde{\tilde{\nabla}}_a)\xi_b + (\tilde{\tilde{C}}^r_{ab} - \tilde{C}^r_{ab})\xi_r =$$

$$= -K^m_{ab}\xi_m + \frac{1}{2} g^{rm}\Big(\tilde{\tilde{\nabla}}_a g_{bm} + \tilde{\tilde{\nabla}}_b g_{am} - \tilde{\tilde{\nabla}}_m g_{ab} -$$

$$- \tilde{\nabla}_a g_{bm} - \tilde{\nabla}_b g_{am} + \tilde{\nabla}_m g_{ab}\Big)\xi_r =$$

$$= -K^m_{ab}\xi_m + \frac{1}{2} g^{rm}\Big(K^s_{ab} g_{sm} + K^s_{am} g_{bs} + K^s_{ba} g_{sm} +$$

$$+ K^s_{bm} g_{as} - K^s_{ma} g_{sb} - K^s_{mb} g_{as}\Big)\xi_r =$$

$$= -K^m_{ab}\xi_m + \underbrace{\frac{1}{2} g^{rm} \cdot 2 K^s_{ab} g_{sm} \xi_r}_{= \delta_s^r K^s_{ab}\xi_r = K^s_{ab}\xi_s} = 0 .$$

Ὥστε οἱ δύο τελεστές πού κατασκευάσαμε συμφωνοῦν ὅταν ἐπιδροῦν στό τυχόν συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο. Ἀλλά τότε πρέπει νά συμφωνοῦν κι ὅταν ἐπιδροῦν στό τυχόν τανυστικό πεδίο. Πράγματι. Ἡ διαφορά τῶν ἐπιδράσεων τῶν $\underset{\sim}{\nabla}_a$ καί $\underset{\approx}{\nabla}_a$ ἐκφράζεται ἀπό κάποιο τανυστικό πεδίο $\underline{C}^a_{bc}$. Συνεπῶς

$$0 = \underset{\sim}{\nabla}_a \xi_b - \underset{\approx}{\nabla}_a \xi_b = \underline{C}^m_{ab}\xi_m , \quad \forall \xi_m \Longrightarrow \underline{C}^m_{ab} = 0. \quad \blacksquare$$

Ὁρισμός: Ὁ τελεστής παραγωγίσεως ∇_a πού ἱκανοποιεῖ τήν $\nabla_a g_{bc} = 0$ θά ἀναφέρεται ἐάν ὁ τελεστής παραγωγίσεως (ἤ ἡ παράγωγος) πού εἶναι συμβιβαστός μέ τόν μετρικό τανυστή (compatible with the metric). Σέ πολλά συγγράμματα ἀναφέρεται καί ὡς "ἡ συναλλοίωτη παράγωγος". Ἡ ὁρολογία αὐτή χρησιμοποιήθηκε γιά νά δηλώσει ὅτι ἡ παράγωγος αὐτή εἶναι ἕνα καινούργιο τανυστικό πεδίο σέ ἀντίθεση μέ τίς "μερικές παραγώγους" πού δέν εἶναι τανυστικά πεδία. Νομίζω ὅτι ἡ ὁρολογία "συναλλοίωτη παράγωγος" δέν εἶναι πλέον πετυχημένη γιατί ἤδη ξέρουμε ὅτι ὅλοι οἱ τελεστές ∇_a δίνουν τανυστικά πεδία. Ἐκεῖνο πού ξεχωρίζει τόν ἕνα, τόν προτιμητέο τελεστή παραγωγίσεως εἶναι ἡ εἰδική του σχέση μέ τόν μετρικό τανυστή.

Παράδειγμα 1ον: Ἔστω πολλαπλότητα M μέ μετρικό τανυστή g_{ab} καί τελεστή ∇_a συμβιβαστό μέ τόν g_{ab}. Ἔστω ἐπίσης (U,ϕ) ἕνας χάρτης τῆς M πού δίνει συντεταγμένες x^i στά σημεῖα τῆς περιοχῆς U. Ἀναφορικά μέ τόν (U,ϕ) κατασκευάζουμε καί τόν τελεστή παραγωγίσεως τοῦ παραδείγματος τῆς σελίδας 90 (συνιστῶσες $\longrightarrow$ μερικές παραγώγους $\longrightarrow$ καινούργιες συνιστῶσες) πού τόν συμβολίζουμε $\boldsymbol{\nabla}_a$. Οἱ τελεστές ∇_a καί $\boldsymbol{\nabla}_a$ σχετίζονται μέ κάποιο τανυστικό πεδίο C^a_{bc} πού ἔχει συνιστῶσες στόν χάρτη (U,ϕ) $[C^a_{bc}]^i_{jk}$. Συμβολίζουμε

$\Gamma^i_{jk} = [C^a_{bc}]^i_{jk}$ καί ὀνομάζουμε τά Γ^i_{jk} σύμβολα Christoffel δευτέρου εἴδους. Ἐπειδή τό C^a_{bc} εἶναι συμμετρικό ἰσχύει $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος μᾶς ἔδωσε ἤδη τόν τρόπο ὑπολογισμοῦ τῶν συμβόλων τοῦ Christoffel: διαλέγουμε τόν βοηθητικό τελεστή $\bar{\nabla}_a$ τῆς ἀποδείξεως νά εἶναι ὁ τελεστής "πάρε τίς μερικές παραγώγους τῶν συνιστωσῶν" καί παίρνουμε τίς συνιστῶσες τῆς σχέσεως (5).

Ἔστω τώρα $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ ἕνας ἄλλος χάρτης τῆς M, μέ συντεταγμένες $\tilde{x}^i$, ὥστε $U \cap \tilde{U} \neq \phi$. Περιοριζόμαστε στή κοινή τους περιοχή. Οἱ g_{ab} καί ∇_a δέν ἐξαρτῶνται ἀπό τούς χάρτες ἐνῶ ὅλα τά ἄλλα, $\bar{\nabla}_a$, $[C^a_{bc}]^i_{jk}$, $\tilde{\bar{\nabla}}_a$ = "μερικές παράγωγοι συνιστωσῶν ὡς πρός τόν καινούργιο χάρτη", $[\tilde{C}^a_{bc}]^{\tilde{i}}_{\tilde{j}\tilde{k}} = \tilde{\Gamma}^i_{jk}$ = σύμβολα Christoffel ὡς πρός τόν $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$, ἐξαρτῶνται. Προφανῶς τά $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ δέν εἶναι ἁπλῶς οἱ συνιστῶσες τοῦ C^a_{bc} στόν καινούργιο χάρτη γιατί οἱ τελεστές $\bar{\nabla}_a$ καί $\tilde{\bar{\nabla}}_a$ εἶναι ἐν γένει διάφοροι. Συνήθως ἀναφέρεται ὅτι "τά σύμβολα τοῦ Christoffel δέν μετασχηματίζονται σάν συνιστῶσες τανυστῆ". Ὁ μετασχηματισμός τους εὔκολα βρίσκεται ἀπό τίς συνιστῶσες τῆς σχέσεως (5).

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\alpha}\right)\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^j}\right)\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^k}\right)+\left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{x}^k}\right)\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\mu}\right). \quad (6)$$

Ὁ μηδενισμός τοῦ τελευταίου ὅρου $\left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^k}\right)\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\mu}\right)$ δίνει τήν ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ὥστε οἱ τελεστές παραγωγίσεως πού ὁρίζονται ὅπως στό παράδειγμα τῆς σελίδας 90 νά συμπίπτουν. Π.χ., ὅταν οἱ σχέσεις τῶν συντεταγμένων εἶναι γραμμικές, οἱ δύο τελεστές εἶναι οἱ ἴδιοι.

Παρατήρηση 1η: Ἔστω τυχόν τανυστικό πεδίο T_{bcd} καί τυχόν τελεστής ∇_a. Θέτουμε $M_{abcd} = \nabla_a T_{bcd}$. Ποιό εἶναι τό τανυστικό πεδίο $M_a{}^b{}_{cd}$; Ἐάν πρῶτα παραγωγίσαμε καί μετά ἀνεβάσαμε τόν δείκτη εἶναι $M_a{}^b{}_{cd} = g^{bm}\nabla_a T_{mcd}$. Ἐάν ὅμως πρῶτα ἀνεβάσαμε τόν δείκτη καί μετά παραγωγίσαμε εἶναι τό

$$M_a{}^b{}_{cd} = \nabla_a(g^{bm}T_{mcd}) = g^{bm}\nabla_a T_{mcd} + (\nabla_a g^{bm})T_{mcd}.$$

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι ὁ συμβολισμός πού καθιερώσαμε στήν ἀρχή τῆς ἑνότητας γίνεται διφορούμενος ὅταν ὑπεισέρχονται καί παραγωγίσεις. Δέν εἶναι διφορούμενος μόνον ὅταν $\nabla_a g^{bm}=0$, δηλ. ὅταν χρησιμοποιοῦμε τόν τελεστή τόν συμβιβαστό μέ τόν μετρικό τανυστή! Ἐκτός κι ἄν ἀναφέρουμε τό ἀντίθετο, ἀπ' ἐδῶ κι ἔμπρός πάντα στίς πολλαπλότητες μέ μετρικό τανυστή θά χρησιμοποιοῦμε τόν τελεστή παραγωγίσεως πού εἶναι συμβιβαστός μέ τόν μετρικό τανυστή.

Παρατήρηση 2η: Ἡ ἐλευθερία στήν ἐπιλογή ἑνός τελεστή παραγωγίσεως εἶναι ἡ ἐλευθερία τῶν C^a_{bc}. Ἡ συνθήκη πού ἐπιβάλαμε εἶναι ἡ $\nabla_a g_{bc} = 0$. Τά C^a_{bc} καί $\nabla_a g_{bc}$ ἔχουν τήν "ἴδια δομή δεικτῶν", τρεῖς δείκτες, συμμετρικά ὡς πρός τούς δύο. Αὐτό ἦταν καλή ἔνδειξη ὅτι θά καταφέρουμε νά βροῦμε τόν ∇_a ὥστε $\nabla_a g_{bc} = 0$. Πρακτικά, εἴχαμε $\frac{n^2(n+1)}{2}$ βαθμούς ἐλευθερίας καί $\frac{n^2(n+1)}{2}$ συνθῆκες νά ἐπιβάλουμε.

Παρατήρηση 3η: Ἔχει ἀποδειχθεῖ (δύσκολο!) ὅτι ἐάν ἡ πολλαπλότητα δέχεται (globally) μετρικό τανυστή τότε εἶναι παρασυμπαγής. Ἔτσι, ἡ συνθήκη "παρασυμπαγής" στό θεώρημα δέν χρειάζεται.