Β Α Σ Ι Λ Η   Κ.   Ξ Α Ν Θ Ο Π Ο Υ Λ Ο Υ

Πτυχιούχου Μαθηματικοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης
Κατόχου M.S. καί Ph.D. Φυσικῆς Πανεπιστημίου Chicago
'Επιμελητῆ στήν Ἕδρα 'Αστρονομίας τοῦ Α.Π.Θ.

ΤΟΠΙΚΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΑΜΠΡΕΛΟΕΙΔΕΙΣ
Μ Ε Λ Α Ν Ε Σ   Ο Π Ε Σ

Πραγματεία γιά 'Υφηγεσία

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1982

Στούς δασκάλους μου

Ε.Ε., Α.Κ., Β.Σ., Γ.Κ.,
Σ.Π., R.G., A.A., S.C..

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

῾Η πραγματεία αὐτή ἀσχολεῖται μέ τίς στατικές καί ἀξισυμμετρικές τοπικές μελανές ὀπές τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας καί τήν ἀναλυτική κατασκευή τῶν γενικότερων λύσεων αὐτῶν μέ σφαιρικό καί σαμπρελοειδῆ ὁρίζοντα.

Σχεδόν ὅλες οἱ ἐργασίες πάνω στίς μελανές ὀπές ἀναφέρονται στή μελέτη τῶν μεμονωμένων μελανῶν ὀπῶν, δηλαδή στή μελέτη φυσικῶν μοντέλων πού περιγράφουν μία - μόνη της - μελανή ὀπή στό χωρόχρονο, καί τίποτε ἄλλο. Γι'αὐτές τίς μελανές ὀπές οἱ κατάλληλες ὁριακές συνθῆκες πού ἱκανοποιεῖ ὁ χωρόχρονος πού τίς περιγράφει εἶναι ὅτι ἀσυμπτωτικά (στό ἄπειρο) τείνει πρός τόν ἐπίπεδο χωρόχρονο τοῦ Minkowski.

Οἱ τοπικές μελανές ὀπές δέν εἶναι ἐν γένει μεμονωμένες ἀλλά περιβάλλονται ἀπό μιά ἀξονικά συμμετρική κατανομή ὕλης. ᾿Εφ᾿ ὅσον πλέον οἱ ἐξισώσεις Einstein μέ μηδενικές πηγές (source free Einstein equations) ἀπαιτεῖται νά ἱκανοποιοῦνται μόνο σέ μιά περιοχή γύρω ἀπό τή μελανή ὀπή καί ἐφ᾿ὅσον ὁ μετρικός τανυστής τῆς μελανῆς ὀπῆς δέν ἀπαιτεῖται νά εἶναι ἀσυμπτωτικά ἐπίπεδος, οἱ ἐξισώσεις Einstein ἐπιτρέπουν τήν ὕπαρξη πολύ περισσότερων λύσεων τοπικῶν μελανῶν ὀπῶν ἀπό τίς λύσεις μεμονωμένων μελανῶν ὀπῶν. Στήν πραγματεία αὐτή ἀναπτύσσουμε μιά μέθοδο προσδιορισμοῦ τῶν λύσεων τῶν ἐξισώσεων Einstein πού περιγράφουν στατικές καί ἀξισυμμετρικές τοπικές μελανές ὀπές καί βρίσκουμε ἀναλυτικά ὅλες αὐτές τίς λύσεις. Οἱ λύσεις ἐμπίπτουν σέ δύο διαφορετικές κατηγορίες, ἀνάλογα μέ τό ἄν ὁ ὁρίζοντάς τους εἶναι τοπολογικά μιά σφαίρα ἤ μιά σαμπρέλα. Οἱ σφαιρικές τοπικές μελανές ὀπές εἶναι ἤδη γνωστές.

Τό πιό ἀνέλπιστο ἀποτέλεσμα τῆς ἔρευνας αὐτῆς εἶναι ὅτι οἱ λύσεις τῶν στατικῶν καί ἀξισυμμετρικῶν τοπικῶν μελανῶν ὀπῶν ἐκφράζονται ἀναλυτικά μέ τή βοήθεια τῶν πολυώνυμων Legendre.

Εὐχαριστῶ θερμά τούς καθηγητές S. Chandrasekhar, Β. Μπαρμπάνη, Σ. Περσίδη καί Γ. Θεοδώρου γιά πολλές χρήσιμες συζητήσεις, εὔστοχες ὑποδείξεις καί συνεχῆ συμπαράσταση. Ἐπίσης εὐχαριστῶ τήν παρασκευάστρια τοῦ Ἐργαστηρίου Ἀστρονομίας κ. Μυρτώ Βασιλειάδη γιά τήν ἔξοχη δακτυλογράφηση ἑνός δύσκολου χειρόγραφου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΜΕΛΑΝΩΝ ΟΠΩΝ

1.1. Μεμονωμένες μελανές όπές

Ἀναμφισβήτητα ἡ Γενική Θεωρία τῆς Σχετικότητας ἀποτελεῖ τήν καλύτερη θεωρία βαρύτητας πού ἔχει διατυπωθεῖ μέχρι σήμερα. Ἀπό τό 1916 πού προτάθηκε ἀπό τόν Einstein[1-3] ἔχει ὑποβληθεῖ σέ πολλές δοκιμασίες, θεωρητικές καί πειραματικές, καί τίς ἔχει περάσει ὅλες μέ μεγάλη ἐπιτυχία. Ἀπό τή θεωρητική σκοπιά ἡ Γενική Θεωρία τῆς Σχετικότητας εἶναι α) αὐτοσυνεπής, β) συμβιβαστή μέ τό πεπερασμένο τῆς ταχύτητας διάδοσης τοῦ φωτός πού ἀποτελεῖ καί τό πάνω ὅριο ταχύτητας διάδοσης οἱουδήποτε κλασσικοῦ πεδίου καί οἱασδήποτε πληροφορίας καί γ) συμφωνεῖ μέ τή Νευτώνεια θεωρία βαρύτητας στίς περιοχές ἀσθενῶν βαρυτικῶν πεδίων. Ἀξίζει νά σημειωθεῖ ὅτι στή δεκαετῆ προσπάθειά του πού ὁδήγησε στή διατύπωση τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας, ὁ Einstein[4] προσπάθησε νά κατασκευάσει μιά θεωρία βαρύτητας πού νά γενικεύει τή θεωρία τοῦ Νεύτωνα καί πού νά εἶναι συμβιβαστή μέ τό πεπερασμένο τῆς ταχύτητας διάδοσης ὅλων τῶν κλασσικῶν πεδίων.

Ἐφ᾽ὅσον οἱ προβλέψεις τῆς Νευτώνειας θεωρίας βαρύτητας καί τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας συμφωνοῦν στίς περιοχές τῶν ἀσθενῶν βαρυτικῶν πεδίων, ὁ πλοῦτος τῆς Σχετικότητας, οἱ οὐσιαστικοί πειραματικοί ἔλεγχοι πού τήν καθιερώνουν σάν τήν καλύτερη θεωρία βαρύτητας, καί τά καινούργια φυσικά φαινόμενα πού προβλέπει γίνονται ἀντιληπτά στίς περιοχές ἰσχυρῶν βαρυτικῶν πεδίων. (Ἐξαίρεση ἀποτελεῖ ἡ πρόβλεψη τῆς ὕπαρξης τῶν κυμάτων βαρύτητας). Περιοχές ἰσχυρῶν βαρυτικῶν πεδίων ἀποτελοῦν ἡ Big Bang, ἡ ἀρχική ἔκρηξη πού δημιούργησε τό σύμπαν, καί οἱ μελανές ὀπές (black holes). Αὐτές εἶναι οἱ περιοχές τοῦ σύμπαντος ὅπου "ἀνακαλύπτουμε" τή Γενική Σχετικότητα καί συγχρόνως τό έργαστήριο όπου θά μπορέσουμε νά τήν έλέγξουμε πειραματικά. Ἡ πραγματεία αὐτή ἀναφέρεται στή μελέτη τῶν μελανῶν ὀπῶν.

Μιά ἀπλουστευμένη εἰκόνα τῶν μελανῶν ὀπῶν εἶναι δυνατόν νά παρουσιαστεῖ καί μέ τή βοήθεια ἰδεῶν τῆς Νευτώνειας Μηχανικῆς: Ἡ ταχύτητα διαφυγῆς ἀπό τήν ἐπιφάνεια σφαιρικῆς μάζας M πού ἔχει ἀκτίνα R εἶναι $v=\sqrt{2GMR^{-1}}$. Γιά κάθε μάζα λοιπόν M, μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἡ χαρακτηριστική ἐκείνη ἀκτίνα R_S, γιά τήν ὁποία ἡ ταχύτητα διαφυγῆς ἰσοῦται μέ τήν ταχύτητα τοῦ φωτός. Ἡ ἀκτίνα αὐτή λέγεται ἀκτίνα Schwarzschild[5] τῆς μάζας M καί δίνεται ἀπό τή σχέση $R_S = {}^{2GM}/_{c^2}$. Προφανῶς,ἄν ἡ μάζα M περιοριστεῖ σέ ἀκτίνα μικρότερη τῆς R_S, τό φῶς, πού δεχόμαστε ὅτι ὑφίσταται τήν ἐπίδραση τοῦ βαρυτικοῦ πεδίου, δέν μπορεῖ νά διαφύγει μακρυά ἀπό τή μάζα M. Ἐφ'ὅσον μάλιστα ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός ἀποτελεῖ τό πάνω ὅριο τῶν ταχυτήτων μέ τίς ὁποῖες μποροῦν νά μεταφερθοῦν πληροφορίες τίποτε δέν μπορεῖ νά διαφύγει μακρυά ἀπό τή μάζα M. Ἡ μάζα M ἀποτελεῖ μιά μελανή ὀπή πού προδίδει τήν ὕπαρξή της μόνο ἀπό τό πεδίο βαρύτητας πού δημιουργεῖ. Φυσικά οἱ ἀπλουστευμένες αὐτές μελανές ὀπές δέν εἶναι "ἀπόλυτα μαῦρες". Φῶς καί σωματίδια μέ κατάλληλες ταχύτητες μποροῦν θεωρητικά νά βγοῦν ἀπό τόν ὁρίζοντα (γεγονότων), πού εἶναι ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια ἀκτίνας $R=R_S$· μόνο πού δέν μποροῦν νά φτάσουν σέ ἄπειρη ἀπόσταση ἀπό τή μάζα M. Εὔκολα μπορεῖ νά διαπιστωθεῖ ὅτι φῶς ἤ σωματίδια πού φεύγουν ἀπό ἀπόσταση $r<R_S$ ἀπό τό κέντρο τῆς σφαιρικῆς μάζας M μποροῦν νά φτάσουν τό πολύ μέχρι τήν ἀπόσταση R ἀπό τό κέντρο πού δίνεται ἀπό τή σχέση ${}^1/_r - {}^1/_{R_S} = {}^1/_R$.

Ἡ Γενική Θεωρία τῆς Σχετικότητας προβλέπει τήν ὕπαρξη μελανῶν ὀπῶν. Ἔχουν ἀνακαλυφτεῖ τέσσερις ἀκριβεῖς λύσεις τῶν ἐξισώσεων πεδίου τοῦ Einstein πού περιλαμβάνουν καί περιοχές τοῦ χώρου ἀπό τίς όποίες τίποτε δέν μπορεῖ νά διαφύγει στό έξωτερικό σύμπαν. Οἱ τέσσερις αὐτές λύσεις εἶναι ἡ λύση Schwarzschild[5] (1916), ἡ Reissner - Nordström[6,7] (1918-19), ἡ Kerr[8] (1963) καί ἡ Kerr-Newman[9] (1965). Ἐξαρτῶνται, ἀντίστοιχα, ἀπό τίς παράμετρες M, M καί Q, M καί J, M καί J καί Q, ὅπου M εἶναι ἡ ὁλική μάζα, J ἡ ὁλική στροφορμή καί Q τό ὁλικό φορτίο τῆς μελανῆς ὀπῆς. Οἱ δύο πρῶτες εἶναι σφαιρικά συμμετρικές ἐνῶ οἱ δύο τελευταῖες, πού ἔχουν καί στροφορμή, δέν εἶναι. Οἱ τρεῖς πρῶτες λύσεις μποροῦν νά θεωρηθοῦν σάν μερικές περιπτώσεις τῆς μελανῆς ὀπῆς Kerr-Newman. Ἐπιπλέον, μία συλλογική προσπάθεια[10-13] πού ἄρχισε τό 1968 καί πρακτικά ὁλοκληρώθηκε τό 1975 (Robinson) ἀπόδειξε ὅτι οἱ παραπάνω τέσσερις λύσεις εἶναι οἱ μοναδικές λύσεις τῶν ἐξισώσεων Einstein πού περιγράφουν τίς ἀξονικά συμμετρικές (ἀξισυμμετρικές) καί μεμονωμένες μελανές ὀπές στά πλαίσια τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας. Ἔτσι, πράγμα σπανιότατο γιά τή σχετικότητα, ξέρουμε ἀναλυτικά ὅλες τίς λύσεις ἀξισυμμετρικῶν καί μεμονωμένων μελανῶν ὀπῶν, οἱ ὁποῖες μάλιστα εἶναι ἀρκετά ἁπλές καί μποροῦν νά μελετηθοῦν ἀναλυτικά.

Τό γεγονός πώς ἡ γενικότερη λύση μελανῆς ὀπῆς ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τίς τρεῖς παράμετρες M, J καί Q συνεπάγεται κάτι πολύ σημαντικό: Ὅλες οἱ πληροφορίες οἱ σχετικές μέ τό εἶδος τῆς ὕλης πού σχημάτισε τή μελανή ὀπή, τήν κατανομή της, τίς ροπές ἀδράνειάς της, τίς λεπτομέρειες τῆς κατανομῆς τῆς στροφορμῆς, τῆς κατανομῆς τῶν φορτίων κλπ., χάνονται κατά τό σχηματισμό τῆς μελανῆς ὀπῆς. Ἡ μόνη πληροφορία πού διατηρεῖται στό βαρυτικό (καί τό ἠλεκτρομαγνητικό, ὅταν ὑπάρχει μή μηδενικό φορτίο) πεδίο εἶναι ἡ πληροφορία γιά τήν ὁλική μάζα, τήν ὁλική στροφορμή καί τό ὁλικό φορτίο τῆς μελανῆς ὀπῆς. Τό συμπέρασμα αὐτό εὐφημιστικά ἀναφέρεται σάν τό "no hair theorem"[12].

Γιά τήν ἁπλούστερη, τή μελανή ὀπή Schwarzschild, ἡ Γενική Θεωρία τῆς Σχετικότητας προβλέπει ὅτι ἡ ἀκτίνα Schwarzschild R_s καί ἡ ὁλική μάζα M συνδέονται ἀκριβῶς μέ τήν ἴδια σχέση $R_s = 2GM/c^2$

μέ τήν ὁποία συνδέονται καί στίς ἁπλουστευμένες μελανές ὀπές τῆς Νευτώνειας θεωρίας. ῾Υπάρχει ὅμως καί μία θεμελιώδης διαφορά: Στή Σχετικότητα ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια $r = R_s$ εἶναι ἕνας ἀπόλυτος ὁρίζοντας γεγονότων: Τίποτε δέν μπορεῖ νά φύγει ἀπό τόν ὁρίζοντα, οὔτε καί γιά λίγο, οὔτε κι ἄν προσπαθοῦμε νά τό ἐκτοξεύσουμε ἀπό τήν ἐπιφάνεια $r = R_s$. Οἱ μελανές ὀπές τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας εἶναι πραγματικές "μαῦρες τρύπες στό χῶρο". Καί στίς ἄλλες τρεῖς λύσεις τῶν ἐξισώσεων Einstein πού περιγράφουν μελανές ὀπές ὁ ὁρίζοντας γεγονότων εἶναι μιά ἐπιφάνεια μονῆς κατεύθυνσης πού ἡ ἀκτίνα της δίνεται, γιά τή γενικότερη μελανή ὀπή Kerr-Newman, ἀπό τή σχέση $R_s = M + (M^2 - J^2/M^2 - Q^2/M^2)^{1/2}$.

῞Ενα ἄλλο χαρακτηριστικό τῶν μελανῶν ὀπῶν τῆς Σχετικότητας εἶναι πώς σώματα πού ἔχουν περάσει μέσα στόν ὁρίζοντα γεγονότων ὄχι μόνο δέν μποροῦν νά ξαναφύγουν ἔξω, ἔστω καί γιά λίγο, ἀλλά οὔτε καί μποροῦν νά σταθοῦν σέ μιά σταθερή ἀπόσταση $r = a < R_s$ ἀπό τό κέντρο, ἔστω κι ἄν διαθέτουν ὁσοδήποτε ἰσχυρούς πύραυλους. ῞Οπως στήν καθημερινή μας ζωή δέν μποροῦμε νά συγκρατήσουμε τήν πρός τό μέλλον κίνησή μας στό χρόνο, ἔτσι καί μέσα στή μελανή ὀπή δέν μποροῦμε νά σταματήσουμε τήν κίνησή μας πρός τό κέντρο. Αὐτή ἡ παρατήρηση εἶναι μία ἁπλοϊκή ἐξήγηση τοῦ γεγονότος ὅτι οἱ ρόλοι τοῦ χώρου καί τοῦ χρόνου ἐναλλάσσονται μέσα στή μελανή ὀπή. Στό σημεῖο αὐτό ἀναφέρουμε ὅτι ἡ διαδρομή ἀπό τόν ὁρίζοντα μέχρι τίς ἀποστάσεις πού δεχόμαστε ὅτι ἰσχύει ἡ Θεωρία τῆς Σχετικότητας διανύεται σέ χρόνο 10^{-5} sec. περίπου γιά μιά μελανή ὀπή μέ μάζα μία ἡλιακή μάζα.

Οἱ σχετικιστικές μελανές ὀπές εἶναι ἕνα πεδίο ὅπου ἡ ἔρευνα συνεχίζεται καί καινούργιες ἰδιότητες καί φαινόμενα συνεχῶς ἀνακαλύπτονται. ᾿Αναφέρουμε μερικά:

–᾿Εξαγωγή ἐνέργειας[14-17] ἀπό μελανές ὀπές: ῎Αν καί τίποτε δέν μπορεῖ νά διαφύγει ἀπό τίς μελανές ὀπές, ἔχει βρεθεῖ ἕνας πολύ ἔξυπνος μηχανισμός μέ τόν όποῖο - χωρίς νά παραβιάζεται καμμιά άπό τίς άρχές τῆς σχετικότητας - ένέργεια μπορεῖ νά άφαιρεθεῖ άπ'αύτές. 'Ο μηχανισμός όφείλεται στόν Penrose (1969), άναφέρεται συνήθως σάν ή "Penrose process" καί έφαρμόζεται άποκλειστικά στίς περιστρεφόμενες μελανές όπές Kerr καί Kerr-Newman. Σ'αύτές τίς μελανές όπές ύπάρχει μιά περιοχή έξω άπό τόν όρίζοντα, ή έργόσφαιρα, στήν όποία εἶναι δυνατές καί τροχιές ύλικῶν σωματιδίων μέ άρνητική ένέργεια. ('Εργόσφαιρα δέν ύπάρχει στίς μή περιστρεφόμενες, σφαιρικά συμμετρικές μελανές όπές). 'Η μέθοδος τοῦ Penrose εἶναι ή έξῆς: Σῶμα συνολικῆς ένέργειας E_o εἰσέρχεται στήν έργόσφαιρα ὅπου καί διασπᾶται σέ δύο κομμάτια. Τό ἕνα άπό τά δύο περνᾶ τόν όρίζοντα άκολουθώντας τροχιά άρνητικῆς ένέργειας E_1, ένῶ τό δεύτερο άκολουθεῖ τροχιά πού τό φέρνει έξω άπό τή μελανή όπή. Διατήρηση τῆς ένέργειας στό σημεῖο τῆς διάσπασης δίνει $E_o=E_1+E_2$. 'Εφ'ὅσον λοιπόν $E_1<0$, τό δεύτερο κομμάτι άπομακρύνεται μέ ένέργεια E_2, μεγαλύτερη άπό τήν άρχική E_o. Λεπτομερεῖς ύπολογισμοί έχουν δείξει ὅτι: Πρῶτον, ή ένέργεια πού άφαιρεῖται άπό τή μελανή όπή εἶναι κυρίως άρνητική ένέργεια μέ άποτέλεσμα, μετά άπό άρκετές έφαρμογές τῆς μεθόδου Penrose, ή στροφορμή τῆς μελανῆς όπῆς νά έλαττώνεται, ή έργόσφαιρα νά μικραίνει (καί τελικά νά έξαφανίζεται) καί ή μέθοδος νά μήν εἶναι πλέον έφαρμόσιμη. Καί δεύτερον, ὅταν οἱ διασπάσεις τῶν σωματιδίων στήν έργόσφαιρα συμβαίνουν τυχαῖα, μόνον ἕνα πολύ μικρό ποσοστό άπ'αύτές δίνουν σωματίδια πού διαφεύγουν μέ μεγαλύτερη ένέργεια άπό τήν άρχική. "Ετσι ή μέθοδος Penrose δέν φαίνεται νά μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ στήν άστροφυσική γιά νά έξηγηθοῦν οἱ τεράστιες έκλύσεις ένέργειας πού παρατηροῦνται σέ μερικά άστροφυσικά φαινόμενα (π.χ Quasars). Αύτή ή άδυναμία της φυσικά δέν έλαττώνει καθόλου τό μεγάλο θεωρητικό ένδιαφέρον πού παρουσιάζει.

-"Θερμοδυναμική" τῶν μελανῶν ὀπῶν: "Εχει ἀποδειχθεῖ, τελείως γενικά, ὅτι ὅταν μιά μελανή ὀπή ὑποστεῖ μιά ὁποιαδήποτε φυσική μεταβολή (π.χ πτώση ἑνός σώματος στή μελανή ὀπή, ἀπορρόφηση ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας) ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁρίζοντα τῆς μελανῆς ὀπῆς μεγαλώνει ἤ παραμένει σταθερή· ποτέ δέν μικραίνει![15-17,21-23] Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁρίζοντα λοιπόν, σέ πρώτη ὄψη, μοιάζει πολύ μέ τήν ἐντροπία ἑνός συστήματος. Ἡ ὁμοιότητα αὐτή εἶναι ἀκόμη βαθύτερη. Θεωροῦμε ἕνα κλειστό φυσικό σύστημα πού περιέχει καί μελανές ὀπές. Ἄς εἶναι A ἡ συνολική ἐπιφάνεια τῶν ὁριζόντων τῶν μελανῶν ὀπῶν καί S ἡ συνολική ἐντροπία τῆς ὕλης καί τῆς ἐνέργειας τοῦ συστήματος πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τίς μελανές ὀπές. Ὅταν κάποια μάζα πέσει στίς μελανές ὀπές, ἡ S ἐλαττώνεται καί ὁ δεύτερος νόμος τῆς θερμοδυναμικῆς φαίνεται ὅτι παραβιάζεται. Συγχρόνως ὅμως αὐξάνει ἡ A. Γιά νά συνδυαστοῦν οἱ δύο παραπάνω μεταβολές ἔχει προταθεῖ τό γενικευμένο δεύτερο θερμοδυναμικό ἀξίωμα:[24-26] Κατά τίς μεταβολές ἑνός κλειστοῦ φυσικοῦ συστήματος ἡ γενικευμένη ἐντροπία τοῦ συστήματος

$$\tilde{S} = S + \frac{\pi k c^3}{2Gh} A \qquad (1.1)$$

δέν ἐλαττώνεται. Στήν παραπάνω σχέση k εἶναι ἡ σταθερή τοῦ Boltzman, h ἡ σταθερή τοῦ Planck, G ἡ σταθερή τοῦ Νεύτωνα καί c ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός. Σέ ὅλα τά φυσικά συστήματα πού ἔχουν μελετηθεῖ, τό γενικευμένο δεύτερο θερμοδυναμικό ἀξίωμα ἰσχύει. Ἐπιπλέον, ὑπάρχουν ἰσχυρές ἐνδείξεις (καί ἀποδείξεις σέ μερικές περιπτώσεις) πώς ἡ καθολική ἰσχύς τοῦ γενικευμένου θερμοδυναμικοῦ ἀξιώματος ἰσοδυναμεῖ μέ μία ἄλλη εἰκασία, πώς ὅλες οἱ ἀνωμαλίες (singularities) τοῦ χωρόχρονου πού σχηματίζονται μετά ἀπό βαρυτική κατάρρευση περιβάλλονται ἀπό ὁρίζοντες γεγονότων (Cosmic Censor Hypothesis)[14]. Ὁ γενικευμένος δεύτερος νόμος τῆς θερμοδυναμικῆς συνδυάζοντας σχετικότητα, θερμοδυναμική καί κβαντομηχανική, πιθανόν νά ἀποτελεῖ μιά ἀπό τίς θεμελιώδους σημασίας ἀνακαλύψεις τῆς δεκαετίας τοῦ ἑβδομήντα.

- Θερμοκρασία τῶν μελανῶν ὀπῶν:[25,26] 'Η παραδοχή τῆς ἰσχύος τῆς θερμοδυναμικῆς σχέσης $dE = TdS$ (μεταβολή ἐνέργειας γιά ἰσόχωρες καί ἀντιστρεπτές μεταβολές) καί στίς μεταβολές πού ὑφίστανται οἱ μελανές ὀπές μέ έντροπία $\frac{\pi k c^3}{2Gh} A$ μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά νά ὁριστεῖ ἡ θερμοκρασία μιᾶς μελανῆς ὀπῆς. Γιά τή μελανή ὀπή Schwarzschild βρίσκουμε

$$T = \frac{hc^3}{16\pi^2 kG} \cdot \frac{1}{M} = \frac{6x10^{-8}}{(M/M_\odot)} \quad {}^oK . \tag{1.2}$$

'Η θερμοκρασία μιᾶς μελανῆς ὀπῆς εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογη τῆς μάζας της. 'Ανάλογες σχέσεις, καί μέ τήν ἴδια ἐξάρτηση ὡς πρός τή μάζα, μποροῦν νά γραφοῦν γιά τή θερμοκρασία καί τῶν ἄλλων μελανῶν ὀπῶν.

- 'Ακτινοβολία σωματιδίων ἀπό τίς μελανές ὀπές (Φαινόμενο Hawking):[27-32] Οἱ μελανές ὀπές πού μέχρι τώρα περιγράψαμε εἶναι οἱ μελανές ὀπές πού προβλέπει ἡ κλασσική σχετικότητα. "Αν καί πρός τό παρόν δέν ὑπάρχει κβαντική θεωρία βαρύτητας, μποροῦμε φυσικά νά μελετήσουμε τή συμπεριφορά μερικῶν κβαντισμένων πεδίων, π.χ., βαθμωτῶν ἤ ἠλεκτρομαγνητικῶν, στόν καμπύλο χῶρο πού δημιουργεῖται γύρω ἀπό μιά μελανή ὀπή. 'Από τίς μελέτες αὐτές προέκυψε κάτι τό τελείως ἀναπάντεχο: Κβαντομηχανικά οἱ μελανές ὀπές ἀκτινοβολοῦν σωματίδια μέ κατανομή μέλανος σώματος καί θερμοκρασία πού δίνεται ἀπό τή σχέση (1.2)! 'Η ἀνακάλυψη αὐτή τοῦ Hawking[27] (1974) δείχνει ἐπιπλέον πώς ἡ θερμοκρασία πού ἀναφέραμε στήν προηγούμενη παράγραφο εἶναι κάτι παραπάνω ἀπό τό συντελεστή ἀναλογίας τῆς σχέσης $dE = TdS$, καί ἀρχίζουμε νά τή δεχόμαστε σάν τή θερμοκρασία τῆς μελανῆς ὀπῆς. 'Επειδή ἡ θερμοκρασία ἐλαττώνεται μέ τήν αὔξηση τῆς μάζας τῆς μελανῆς ὀπῆς, σημαντική εἶναι μόνο ἡ ἀκτινοβολία ἀπό μικρές μελανές ὀπές. Πάντως, καθώς ἡ μελανή ὀπή ἀκτινοβολεῖ, ἡ μάζα της έλαττώνεται, ἡ θερμοκρασία της αὐξάνει, καί ἡ ἀκτινοβολία της συνεχίζεται μέ έντονότερο ρυθμό! Οἱ προβλέψεις τῶν προσεγγιστικῶν λογαριασμῶν, πού εἶναι οἱ μόνοι πού γίνονται πρός τό παρόν, εἶναι πώς οἱ μελανές ὀπές ἐξαερώνονται, μέ μιά ἔκρηξη κατά τίς τελευταῖες στιγμές τῆς ὕπαρξής τους. Ἡ (προσεγγιστική) κβαντομηχανική λοιπόν πού πρός τό παρόν διαθέτουμε, προβλέπει πώς καί οἱ μελανές ὀπές ἔχουν πεπερασμένη ζωή! Μόνο πού ἡ συνολική τους ζωή βρίσκεται πώς εἶναι περίπου $10^{66}({}^{M}/_{M_{\odot}})^{3}$ ἔτη, δηλαδή πολλές-πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη ἀπό τήν ὁλική ἡλικία τοῦ σύμπαντος γιά μελανές ὀπές μέ μάζες $1\ M_{\odot}$ πού προκύπτουν κατά τήν κατάρρευση ἀστέρων. Τό φαινόμενο Hawking λοιπόν θά ἔχει ἀστροφυσική σημασία μόνον ἄν ὑπάρχουν καί μικρές μελανές ὀπές στό σύμπαν, μέ μάζα περίπου 10^{15}gr, (γιά τίς ὁποῖες ἡ θεωρία προβλέπει ἀκτίνα περίπου 1 fermi, δηλαδή περίπου σάν τήν ἀκτίνα ἑνός ἐλαφροῦ πυρήνα!) οἱ ὁποῖες θά ἔχουν ζωή ὅση περίπου καί ἡ ἡλικία τοῦ σύμπαντος καί αὐτό τόν καιρό θά ἐκρήγνυνται. Φυσικά δέν ξέρουμε κανένα φυσικό μηχανισμό σχηματισμοῦ τέτοιων μελανῶν ὀπῶν. Παρ'ὅλα αὐτά, ἡ θεωρητική σημασία τοῦ φαινόμενου Hawking εἶναι τεράστια γιατί μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν ἕνα πρῶτο βῆμα πρός τή δημιουργία μιᾶς κβαντικῆς θεωρίας τῆς βαρύτητας.

-Διαταραχές τῶν μελανῶν ὀπῶν: Οἱ ἀναλυτικές ἐκφράσεις τῶν λύσεων πού περιγράφουν μελανές ὀπές στή σχετικότητα εἶναι ἀρκετά ἁπλές ὥστε νά ἐπιτρέπουν τή μαθηματική ἀνάλυση τῆς θεωρίας διαταραχῶν πρώτης τάξης.[33] Πράγματι, γιά τίς μελανές ὀπές Schwarzschild,[34-42] Reissner-Nordström[43-53] καί Kerr[54-69] οἱ γενικότερες διαταραχές πρώτης τάξης ἔχουν ἤδη μελετηθεῖ ἱκανοποιητικά. Ἀπό τίς μελέτες αὐτές ἔχουν προκύψει πολλά ἐνδιαφέροντα συμπεράσματα. Π.χ. ἔχει βρεθεῖ πώς στή μελανή ὀπή Kerr ἐμφανίζεται τό φαινόμενο τῆς ὑπερακτινοβολίας[56,57] (superradiance): Κύματα πού προσπίπτουν στή μελανή ὀπή μέ κατάλληλη συχνότητα καί χωρική ἐξάρτηση ἀνακλῶνται μέ ἔνταση καί ἐνέργεια μεγαλύτερη ἀπό τήν εἰσερχόμενη. Μ'αὐτό τόν τρόπο τό κύμα ἀφαιρεῖ κινητική ἐνέργεια ἀπό τή μελανή ὀπή. Τό φαινόμενο τῆς ὑπερακτινοβολίας μπορεῖ νά παρατηρηθεῖ μόνο σέ μελανές όπές πού περιστρέφονται. Γιά τίς μελανές όπές Schwarzschild καί Reissner-Nordström προέκυψε ὅτι οἱ διαταραχές τους διαχωρίζονται σέ δύο κατηγορίες, τίς διαταραχές ἄρτιας (even) καί περιττῆς (odd) ὁμοτιμίας (parity)[34,35,43-45]. Ἡ μελέτη καί τῶν δύο εἰδῶν διαταραχῶν ἀνάγεται στή μελέτη σκέδασης κυμάτων ἀπό δυναμικά "μικρῆς ἐμβέλειας"[40,50] (short range potentials). Ἐπίσης βρέθηκε ὅτι οἱ διαταραχές ἄρτιας ὁμοτιμίας μποροῦν εὔκολα νά προσδιοριστοῦν[49] ἀπό τίς διαταραχές περιττῆς ὁμοτιμίας καί ἀντίστροφα καί ὅτι καί οἱ δύο κατηγορίες διαταραχῶν περιγράφονται ἀπό ἰσοδύναμα προβλήματα σκέδασης[49,51]. Ἕνα ἄλλο φαινόμενο[33,49] πού προέκυψε ἀπό μελέτη διαταραχῶν πρώτης τάξης εἶναι πώς, κατά τή σκέδαση βαρυτικῶν κυμάτων ἀπό τή μελανή ὀπή Reissner-Nordström, ἕνα μέρος τῆς ἐνέργειας πού ἀκτινοβολεῖται ἐκπέμπεται σάν ἐνέργεια ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων, καί ἀντίστροφα. Δυστυχῶς τό ποσοστό τῆς ἐνέργειας πού μετατρέπεται ἀπό βαρυτική σέ ἠλεκτρομαγνητική εἶναι πολύ μικρό ὥστε ἡ ἰδέα νά διαπιστώσουμε τήν ὕπαρξη κυμάτων βαρύτητας ἔμμεσα παρατηρώντας τά ἠλεκτρομαγνητικά στά ὁποῖα μετατράπηκαν τά βαρυτικά κύματα νά μή φαίνεται πραγματοποιήσιμη. Στίς μελέτες διαταραχῶν ἡ μελανή ὀπή Kerr-Newman ἀποτελεῖ τή μεγάλη ἐξαίρεση[33]. Γι'αὐτήν, ὅλες σχεδόν οἱ ἐνδιαφέρουσες ἐρωτήσεις παραμένουν ἀναπάντητες, γιατί ἔχουν παρουσιαστεῖ ἀναπάντεχες δυσκολίες στή μελέτη τῶν ἐξισώσεων πού περιγράφουν τά διάφορα φυσικά φαινόμενα. Εἶναι φανερό πώς μιά καινούργια ἰδέα ἀπαιτεῖται γιά τή λύση καί τῶν προβλημάτων αὐτῶν.

1.2. Τοπικές μελανές όπές

Στήν πραγματεία αύτή κατασκευάζουμε άναλυτικά τίς γενικότερες λύσεις τῶν έξισώσεων Einstein πού περιγράφουν στατικές, άξισυμμετρικές, τοπικές μελανές όπές (static, axisymmetric, local black holes) τῶν όποίων ὁ όρίζοντας εἶναι τοπολογικά μιά σαμπρέλα (torus). Ἡ μέθοδος τῆς κατασκευῆς πού άκολουθοῦμε εἶναι γενική, έφαρμόζεται καί γιά τίς στατικές, άξισυμμετρικές, τοπικές μελανές όπές μέ (τοπολογικά) σφαιρικό όρίζοντα, καί στήν περίπτωση αύτή δίνει τά ἴδια άποτελέσματα μ'αύτά πού πρόσφατα βρέθηκαν άπό τόν Chandrasekhar.[33] Ἡ μέθοδος τοῦ Chandrasekhar εἶναι διαφορετική άπό τή δική μας καί δέν έφαρμόζεται γιά τίς σαμπρελοειδεῖς μελανές όπές.

Ὁ μετρικός τανυστής μιᾶς τοπικῆς μελανῆς όπῆς έν γένει δέν εἶναι άσυμπτωτικά έπίπεδος (asymptotically flat ἤ asymptotically Minkowskian) καί συνεπῶς δέν περιγράφει μία μεμονωμένη μελανή όπή. Ἐφ'ὅσον λοιπόν δέν ἱκανοποιεῖται μία άπό τίς βασικότερες προϋποθέσεις τοῦ θεωρήματος μοναδικότητας τῶν Israel, Carter καί Robinson[10-13], (τό no hair theorem), εἶναι δυνατή ἡ ὕπαρξη κι ἄλλων λύσεων μελανῶν όπῶν ἔξω άπό τήν τριπαραμετρική οἰκογένεια λύσεων Kerr-Newman. Ἄς σημειωθεῖ ὅτι τά μοντέλα τοπικῶν μελανῶν όπῶν άνταποκρίνονται καλύτερα πρός τή φυσική πραγματικότητα άπό τά μοντέλα μεμονωμένων μελανῶν όπῶν.

Ἡ φυσική κατάσταση πού περιγράφουν οἱ τοπικές μελανές όπές εἶναι ἡ ἑξῆς: Σέ μιά περιοχή τοῦ χώρου ὑπάρχει μιά μελανή όπή καί γιά ὁρισμένη πεπερασμένη άπόσταση ἔξω άπό τή μελανή όπή (δηλαδή ἔξω άπό τόν ὁρίζοντα τῆς μελανῆς όπῆς) δέν ὑπάρχει τίποτε ἄλλο έκτός άπό τό πεδίο βαρύτητας. Μάζα, φορτία κλπ., ὅπως καί ἄλλα φυσικά πεδία εἶναι δυνατό νά ὑπάρχουν πέρα άπό τήν παραπάνω πεπερασμένη άπόσταση άπό τή μελανή όπή. Ἐφ'ὅσον λοιπόν ἡ μελανή ὀπή περιβάλλεται ἀπό ὕλη δέν εἶναι μεμονωμένη, καί συνεπῶς ὁ χωρόχρονος δέν ἀπαιτεῖται νά τείνει ἀσυμπτωτικά πρός τόν ἐπίπεδο χωρόχρονο Minkowski. Φυσικά ἡ ἐξωτερική κατανομή τῆς ὕλης ἐπηρεάζει τή μορφή τοῦ χωρόχρονου γύρω ἀπό τή μελανή ὀπή.

Στό σημεῖο αὐτό θά πρέπει νά τονιστεῖ ὅτι ἡ μελέτη μας καί ἡ κατασκευή τῆς γεωμετρίας τοῦ χωρόχρονου περιορίζεται μόνο στή περιοχή τοῦ χωρόχρονου γύρω ἀπό τή μελανή ὀπή ὅπου δέν ὑπάρχει τίποτε ἄλλο ἐκτός ἀπό τό πεδίο βαρύτητας.

Τά κυριώτερα χαρακτηριστικά τῶν τοπικῶν μελανῶν ὀπῶν (καί συγχρόνως καί οἱ προϋποθέσεις γιά νά θεωρηθεῖ ὅτι μιά λύση τῶν ἐξισώσεων Einstein περιγράφει μιά τοπική μελανή ὀπή) εἶναι τά ἑξῆς:

(α) Στόν χωρόχρονό τους ὑπάρχει μιά λεία (smooth, C^∞), φωτοειδής (null) ὑπερεπιφάνεια (hyper-surface) "μονῆς κατεύθυνσης", ὁ ὁρίζοντας γεγονότων[23] (event horizon). Στό χωρόχρονο ὁ ὁρίζοντας εἶναι μιά πολλαπλότητα μέ τοπολογία $N\text{x}R$ ὅπου N εἶναι μιά συμπαγής, φωτοειδής ἐπιφάνεια δύο διαστάσεων. Ἡ ἐπιφάνεια N εἶναι ἡ τομή τοῦ ὁρίζοντα μέ μιά χωροειδῆ (spacelike) ὑπερεπιφάνεια (τήν ἐπιφάνεια σταθεροῦ χρόνου t_o) καί συνήθως ἀναφέρεται κι αὐτή σάν ὁ ὁρίζοντας τῆς μελανῆς ὀπῆς· ἡ N εἶναι ὁ ὁρίζοντας τῆς μελανῆς ὀπῆς στήν τρισδιάστατη παράστασή της σ'ἕνα διάγραμμα χώρου. Στίς μελανές ὀπές πού κατασκευάζουμε στήν πραγματεία αὐτή ὁ ὁρίζοντας N ἔχει τήν τοπολογία τῆς σφαίρας S^2 ἤ τῆς σαμπρέλας $S^1\text{x}S^1$.

(β) Ὁ μετρικός τανυστής τοῦ χωρόχρονου ἱκανοποιεῖ, σέ μία ἀνοιχτή περιοχή $U=N\text{x}R\text{x}R$ τοῦ ὁρίζοντα, τίς ἐξισώσεις Einstein (vacuum Einstein equations) μέ τανυστή πίεσης καί ἐνέργειας (stress energy tensor) ἴσο μέ τό μηδέν.

(γ) Ὅλες οἱ ἀνωμαλίες (singularities) τοῦ χωρόχρονου περικλείονται ἀπό τόν ὁρίζοντα, πού σημαίνει ὅτι δέν ὑπάρχουν στόν χωρόχρονο "γυμνές ἀνωμαλίες"[23] (naked singularities).

Οἱ λύσεις τῶν ἐξισώσεων Einstein πού προσδιορίζουμε ἔχουν δύο συμμετρίες: Ὁ μετρικός τανυστής τῶν μελανῶν ὀπῶν ἔχει ἀξονική συμμετρία ἐνῶ συγχρόνως εἶναι ἀνεξάρτητος καί τοῦ χρόνου. Ἡ ὕπαρξη τῶν συμμετριῶν αὐτῶν ἐκφράζεται μαθηματικά μέ τή συνθήκη ὅτι ὁ μετρικός τανυστής στήν περιοχή U τῆς μελανῆς ὀπῆς δέχεται δύο γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανυσματικά πεδία Killing[71] (Killing vector fields) τά ὁποῖα ἀντιμετατίθενται κι ἀπ'τά ὁποῖα τό ἕνα ἔχει κλειστές χωροειδεῖς ὁλοκληρωτικές καμπύλες. Ὑποθέτουμε ἐπίσης ὅτι ἕνα τουλάχιστον ἀπό τά διανυσματικά πεδία εἶναι ὀρθογώνιο σέ ὑπερεπιφάνεια (hyper-surface orthogonal) ὁπότε ἀποδεικνύεται, μέ τή βοήθεια καί τῶν ἐξισώσεων Einstein, ὅτι καί κάθε γραμμικός συνδυασμός τῶν δύο διανυσματικῶν πεδίων Killing ἱκανοποιεῖ τήν παραπάνω συνθήκη πού ἐκφράζει ὅτι ἡ μελανή ὀπή δέν περιστρέφεται. Οἱ λύσεις τῶν ἐξισώσεων Einstein πού ἱκανοποιοῦν τίς παραπάνω συνθῆκες ἀναφέρονται στή βιβλιογραφία σάν οἱ στατικές καί ἀξισυμμετρικές (static and axisymmetric) λύσεις τῶν ἐξισώσεων Einstein.

Οἱ στατικές καί ἀξισυμμετρικές ἐξισώσεις Einstein μποροῦν νά ἀναχθοῦν[72,73] σέ μιά ἐξίσωση τοῦ Laplace σέ τρεῖς διαστάσεις καί δύο ἄλλες ἁπλές διαφορικές ἐξισώσεις πρώτης τάξης μέ μερικές παραγώγους. Οἱ λύσεις τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν ἀναφέρονται συνήθως σάν οἱ λύσεις Weyl. Τό βασικό μας πρόβλημα στήν κατασκευή τῶν τοπικῶν μελανῶν ὀπῶν δέν εἶναι ἡ εὕρεση τῆς γενικῆς λύσης Weyl ἀλλά ὁ προσδιορισμός ἐκείνων τῶν λύσεων Weyl πού παριστάνουν τοπικές μελανές ὀπές.

Ὁρισμένες λύσεις Weyl πού παριστάνουν τοπικές μελανές ὀπές ἔχουν βρεθεῖ ἀπό τούς Mysak καί Szekeres[74], Israel καί Khan[75], Israel[76], καί Peters[77]. Οἱ μελανές ὀπές τῶν τριῶν πρώτων ἐργασιῶν ἔχουν ὁρίζοντα πού εἶναι ὁμοιομορφικός μέ τή διδιάστατη σφαίρα, ἐνῶ ἡ λύση πού κατασκευάστηκε ἀπό τόν Peters ἔχει δύο αὐθαίρετες παράμετρες καί ὁρίζοντα ὁμοιομορφικό μέ τή διδιάστατη τοπολογική σαμπρέλα. Σέ μιά πρόσφατη ἐργασία τους, πού δέν ἔχει ἀκόμη δημοσιευτεῖ, οἱ Geroch καί Hartle[78] ἀποδεικνύουν θεωρήματα ὕπαρξης καί μοναδικότητας γιά τίς στατικές καί ἀξισυμμετρικές τοπικές μελανές ὀπές. Γιά τή μοναδικότητα ἀποδεικνύουν τό πολύ σημαντικό συμπέρασμα ὅτι οἱ μόνες δυνατές τοπολογίες τῶν ὁριζόντων τῶν στατικῶν καί ἀξισυμμετρικῶν τοπικῶν μελανῶν ὀπῶν εἶναι οἱ τοπολογίες τῆς σφαίρας S^2 καί τῆς σαμπρέλας $S^1 x S^1$. Γιά τήν ὕπαρξη, οἱ Geroch καί Hartle καταλήγουν στό συμπέρασμα ὅτι ὑπάρχουν στατικές καί ἀξισυμμετρικές τοπικές μελανές ὀπές καί ὅτι οἱ μετρικοί τους τανυστές ἐξαρτῶνται ἀπό μία λύση τῆς ἐξίσωσης τοῦ Laplace, χωρίς ὅμως νά προσδιορίζουν ἀναλυτικά τίς λύσεις αὐτές.

Οἱ πρῶτες ἀναλυτικές ἐκφράσεις γιά τή γενικότερη στατική καί ἀξισυμμετρική τοπική μελανή ὀπή μέ <u>σφαιρικό</u> ὁρίζοντα δόθηκαν ἀπό τόν Chandrasekhar[33] στό ὑπό ἔκδοση βιβλίο του, ἡ μέθοδός του ὅμως δέν μπορεῖ νά ἐφαρμοστεῖ γιά τόν προσδιορισμό καί τῶν στατικῶν ἀξισυμμετρικῶν τοπικῶν μελανῶν ὀπῶν μέ σαμπρελοειδῆ ὁρίζοντα.

Ἡ συνεισφορά τῆς πραγματείας αὐτῆς εἶναι ἡ ἀνάπτυξη μιᾶς καινούργιας γενικῆς μεθόδου γιά τόν προσδιορισμό τῶν στατικῶν καί ἀξισυμμετρικῶν λύσεων τῶν ἐξισώσεων Einstein πού παριστάνουν τοπικές μελανές ὀπές τόσο μέ σφαιρικό ὅσο καί μέ σαμπρελοειδῆ ὁρίζοντα. Ἐπιπλέον, ἐφαρμόζουμε τή μέθοδο αὐτή καί βρίσκουμε γιά μέν τίς σφαιρικές μελανές ὀπές τίς λύσεις τοῦ Chandrasekhar, ἐνῶ γιά τίς σαμπρελοειδεῖς μελανές ὀπές βρίσκουμε τή γενικότερη στατική καί ἀξισυμμετρική τοπική μελανή ὀπή. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα μοναδικότητας τῶν Geroch καί Hartle οἱ λύσεις πού κατασκευάσαμε ἀποτελοῦν τίς γενικότερες στατικές καί ἀξισυμμετρικές τοπικές μελανές ὀπές τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας.

Τό δεύτερο κεφάλαιο πραγματεύεται τήν ἀναλυτική κατασκευή τῶν λύσεων πού παριστάνουν τοπικές μελανές ὀπές μέ σφαιρικό ὁρίζοντα καί τό τρίτο τήν κατασκευή τῶν λύσεων μέ σαμπρελοειδῆ ὁρίζοντα. Τό τέταρτο κεφάλαιο πραγματεύεται τόν προσδιορισμό τῶν φυσικῶν χαρακτηριστικῶν τῶν γενικῶν στατικῶν καί ἀξισυμμετρικῶν τοπικῶν μελανῶν ὀπῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΤΟΠΙΚΕΣ ΜΕΛΑΝΕΣ ΟΠΕΣ ΜΕ ΣΦΑΙΡΙΚΟ ΟΡΙΖΟΝΤΑ

2.1. Στατικές καί ἀξισυμμετρικές ἐξισώσεις Einstein.

Ὁ μετρικός τανυστής πού περιγράφει τή γενικότερη στατική καί ἀξισυμμετρική λύση τῶν ἐξισώσεων Einstein (σέ μονάδες μέ ταχύτητα τοῦ φωτός $c=1$ καί σταθερή παγκόσμιας ἕλξης $G=1$) ἔχει τή μορφή[79,80,33]

$$ds^2=e^{2\nu}(dt)^2-e^{2\psi}(d\varphi)^2-e^{2\mu_2}(dx^2)^2-e^{2\mu_3}(dx^3)^2, \tag{2.1}$$

ὅπου φ εἶναι ἡ ἀζιμουθιακή γωνία πού μετρᾶ στροφή γύρω ἀπό τόν ἄξονα συμμετρίας, t εἶναι ὁ χρόνος καί $x^2=r$ καί $x^3=\vartheta$ εἶναι οἱ δύο ἄλλες χωρικές συντεταγμένες, ἀκτινική καί γωνιακή ἀντίστοιχα. Ἡ ὑπόθεση ὅτι ὁ μετρικός τανυστής (2.1) εἶναι στατικός καί ἀξισυμμετρικός σημαίνει ὅτι οἱ μεταβλητές ν, ψ, μ_2 καί μ_3 τοῦ προβλήματος εἶναι ἀνεξάρτητες τοῦ χρόνου t καί τῆς ἀζιμουθιακῆς γωνίας φ· συνεπῶς οἱ τέσσερις παραπάνω μεταβλητές ἐξαρτῶνται μόνον ἀπό τίς συντεταγμένες x^2 καί x^3. Ἐπιπλέον, συστηματική μελέτη τῶν ἐξισώσεων Einstein γιά τό μετρικό τανυστή (2.1) δείχνει ὅτι μποροῦμε νά ἐπιβάλουμε μία συνθήκη βαθμίδας (gauge condition) μεταξύ τῶν μεταβλητῶν μ_2 καί μ_3. Ἄς εἶναι

$$\beta = \psi+\nu\ . \tag{2.2}$$

Οἱ στατικές ἀξισυμμετρικές ἐξισώσεις Einstein ἀνάγονται στίς τέσσερις ἐξισώσεις[80]

$$\left[e^{\mu_3-\mu_2}(e^{\beta})_2\right]_2 + \left[e^{\mu_2-\mu_3}(e^{\beta})_3\right]_3 = 0, \tag{2.3}$$

$$\left[e^{\beta+\mu_3-\mu_2}(\psi-\nu)_2\right]_2 + \left[e^{\beta+\mu_2-\mu_3}(\psi-\nu)_3\right]_3 = 0, \tag{2.4}$$

$$\beta_{23}-\beta_2\mu_{2,3}-\beta_3\mu_{3,2}+\psi_2\psi_3+\nu_2\nu_3 = 0, \tag{2.5}$$

καί

$$2e^{\beta+\mu_3-\mu_2}(\beta_2\mu_{3,2}+\psi_2\nu_2)-2e^{\beta+\mu_2-\mu_3}(\beta_3\mu_{2,3}+\psi_3\nu_3) =$$

$$= \left[e^{\mu_3-\mu_2}(e^{\beta})_{2}\right]_{2} - \left[e^{\mu_2-\mu_3}(e^{\beta})_{3}\right]_{3} , \tag{2.6}$$

ὅπου ἡ μερική παραγώγιση ὑποδηλώνεται μέ κόμμα στούς δεῖκτες τό ὁποῖο (κόμμα) συνήθως παραλείπεται ὅταν δέν ὑπάρχει κίνδυνος συγχυσης.

'Ενδιαφερόμαστε γιά λύσεις τῶν παραπάνω ἐξισώσεων πού δέχονται μία λεία, διδιάστατη, φωτοειδῆ ἐπιφάνεια γιά ὁρίζοντα. ῎Ας εἶναι

$$N(x^2,x^3) = 0 \tag{2.7}$$

ἡ ἐξίσωση τοῦ ὁρίζοντα. 'Η συνθήκη ὅτι ὁ ὁρίζοντας εἶναι φωτοειδής ἐπιφάνεια εἶναι ἡ

$$g^{ij}N_iN_j = 0 , \tag{2.8}$$

πού γιά τόν μετρικό τανυστή (2.1) γράφεται

$$e^{2(\mu_3-\mu_2)}N_r^{\,2} + N_\vartheta^{\,2} = 0 . \tag{2.9}$$

'Εκμεταλλευόμενοι τήν ἐλευθερία πού ἔχουμε νά ἐπιβάλουμε μιά συνθήκη βαθμίδας μεταξύ τῶν μεταβλητῶν τῆς μετρικῆς (2.1) θέτουμε[80]

$$e^{2(\mu_3-\mu_2)} = \Delta(r) . \tag{2.10}$$

Συνεπῶς, οἱ ρίζες τῆς ἐξίσωσης $\Delta(r) = 0$ προσδιορίζουν τόν ὁρίζοντα γεγονότων. Τέλος, ἀπαιτώντας ὅτι ἡ ἐπιφάνεια $\Delta(r)=0$ συμπίπτει μέ τόν ὁρίζοντα Killing (Killing horizon) τῶν δύο διανυσματικῶν πεδίων Killing $(\partial/_{\partial t})$ καί $(\partial/_{\partial\varphi})$ τοῦ χωρόχρονου καί θεωρώντας ἁπλές λύσεις τῆς ἐξίσωσης (2.3) γιά τίς ὁποῖες οἱ μεταβλητές διαχωρίζονται (separable variables) βρίσκουμε[80] ὅτι

$$e^{\mu_3-\mu_2}=\sqrt{\Delta} \tag{2.11}$$

καί

$$e^{\beta} = \sqrt{\Delta}\,\sin\vartheta, \tag{2.12}$$

ὅπου

$$\Delta = r^2-2mr \ , \tag{2.13}$$

Πρός τό παρόν m εἶναι μία θετική παράμετρος, ἡ φυσική σημασία τῆς ὁποίας θά διαπιστωθεῖ ἀργότερα. Ὁ ὁρίζοντας τοῦ μετρικοῦ τανυστῆ (2.1) προσδιορίζεται ἀπό τή μεγαλύτερη ρίζα $r = 2m$ τῆς συνάρτησης (2.13).

2.2. Στατικές καί ἀξισυμμετρικές λύσεις.

Μέ τήν ἐπιβολή τῆς συνθήκης βαθμίδας (2.11) καί τή λύση (2.12) καί (2.13) τῆς ἐξίσωσης (2.3) οἱ στατικές καί ἀξισυμμετρικές ἐξισώσεις Einstein (2.3)-(2.6) ἁπλοποιοῦνται σημαντικά. Ἤδη οἱ μόνοι ἄγνωστοι τοῦ προβλήματος εἶναι οἱ $\psi-\nu$ καί $\mu_2+\mu_3$.

Οἱ ἐξισώσεις ἁπλοποιοῦνται κι ἄλλο ἄν θεωρήσουμε τή συνάρτηση

$$K=\beta+\nu-\psi \tag{2.14}$$

σάν τό θεμελιώδη ἄγνωστο τοῦ προβλήματος καί συγχρόνως ἀλλάξουμε[33] τίς ἀνεξάρτητες μεταβλητές (τίς συντεταγμένες) r καί ϑ στίς η καί μ πού ὁρίζονται ἀπό τίς

$$\eta = \frac{r-m}{m} \quad \text{καί} \quad \mu = \cos\vartheta \ . \tag{2.15}$$

Μέ τήν ἀλλαγή (2.15) ὁ ὁρίζοντας παριστάνεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια

$$\eta = 1 \tag{2.16}$$

ἐνῶ, ὅπως θά διαπιστωθεῖ ἀμέσως, οἱ ὑπόλοιπες ἐξισώσεις γίνονται συμμετρικές ὡς πρός τίς συντεταγμένες η καί μ. Ἡ δεύτερη ἀπό τίς ἐξισώσεις Einstein, ἡ ἐξίσωση (2.4), ἀνάγεται στήν ἁπλή μορφή

$$\left[(\eta^2-1)K_\eta\right]_\eta + \left[(1-\mu^2)K_\mu\right]_\mu = 0 \ . \tag{2.17}$$

Μέ τήν ἀντικατάσταση (2.14) ἡ ἔρευνα γιά στατικές καί ἀξισυμμετρικές λύσεις τῶν ἐξισώσεων Einstein ἔχει ἀναχθεῖ στή γραμμική ἐξίσωση (2.17) στήν ὁποία μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τήν ἀρχή τῆς ἐπαλληλίας[78] (superposition principle). Τήν κατασκευή τῶν τοπικῶν μελανῶν ὀπῶν λοιπόν μποροῦμε νά τήν πετύχουμε σέ δύο βήματα. Στό πρῶτο βῆμα βρίσκουμε μιά ἁπλή λύση τῆς ἐξίσωσης (2.17) πού δέχεται ἕναν ὁρίζοντα γιά $\eta=1$· ἡ λύση αὐτή θά ἀναφέρεται σάν ἡ βασική λύση τοπικῆς μελανῆς ὀπῆς (ἤ καί ἡ βασική τοπική μελανή ὀπή) καί θά συμβολίζεται μέ K_o. Στό δεύτερο βῆμα βρίσκουμε τή γενικότερη λύση τῆς ἐξίσωσης (2.17) πού δέν καταστρέφει τήν ὕπαρξη τοῦ ὁρίζοντα τῆς προηγούμενης λύσης. Τό ἄθροισμα τῶν λύσεων πού προσδιορίζονται στά δύο παραπάνω βήματα ἀποτελεῖ τή γενικότερη λύση τῶν στατικῶν καί ἀξισυμμετρικῶν ἐξισώσεων Einstein πού περιγράφουν τοπικές μελανές ὀπές. Φυσικά γιά κάθε μία ἀπό τίς λύσεις αὐτές θά πρέπει νά προσδιορίσουμε καί τήν ποσότητα $\mu_2+\mu_3$ ἀπό τίς ἐξισώσεις (2.5) καί (2.6). Οἱ ἐξισώσεις αὐτές δέν εἶναι γραμμικές καί συνεπῶς ἡ ἐπαλληλία δέν μπορεῖ νά ἐφαρμοστεῖ καί γιά τόν προσδιορισμό τῆς μεταβλητῆς $\mu_2+\mu_3$.

Ἡ κατασκευή τῶν τοπικῶν μελανῶν ὀπῶν μέ σφαιρικό ὁρίζοντα εἶναι σχετικά ἁπλῆ γιατί ἡ βασική λύση K_o γι'αὐτές εἶναι γνωστή: Εἶναι ἡ λύση Schwarzschild, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἐκλογή

$$K_o = \log\left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right) \ . \tag{2.18}$$

Στό ἑπόμενο κεφάλαιο θά διαπιστώσουμε ὅτι ὁ προδιορισμός τῆς ἀντίστοιχης πρός τή λύση (2.18) βασικῆς λύσης τοπικῆς μελανῆς ὀπῆς μέ σαμπρελοειδῆ ὁρίζοντα ἀποτελεῖ ἕνα ἀρκετά δύσκολο πρόβλημα.

Ἡ ἐξίσωση (2.17) μπορεῖ εὔκολα νά λυθεῖ μέ τή μέθοδο τοῦ διαχωρισμοῦ τῶν μεταβλητῶν[33]. Θέτοντας

$$S(\eta,\mu) = R(\eta)T(\mu) \qquad (2.19)$$

εὔκολα βλέπουμε ὅτι οἱ R καί T πρέπει καί οἱ δύο νά ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση Legendre. Ἡ γενική λύση λοιπόν τῆς ἐξίσωσης (2.17) εἶναι ἡ

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(\eta)\ P_k(\mu) \ , \qquad (2.20)$$

ὅπου P_k εἶναι τά πολυώνυμα Legendre τάξης k καί R_k εἶναι γραμμικοί συνδυασμοί μέ σταθερούς συντελεστές τῶν πολυώνυμων Legendre καί τῶν συναρτήσεων Legendre δεύτερου εἴδους καί τάξης k. Στούς δεύτερους παράγοντες τῶν προσθετέων τῆς ἐξίσωσης (2.20) συναρτήσεις Legendre δεύτερου εἴδους δέν ἔχουν περιληφθεῖ γιατί αὐτές ἀπειρίζονται γιά $\mu=\pm1$, δηλαδή στόν ἄξονα συμμετρίας τοῦ χωρόχρονου. Θεωροῦμε τή λύση

$$K=K_o+S \qquad (2.21)$$

τῆς ἐξίσωσης (2.17).

Τό ἑπόμενο βῆμα γιά τήν κατασκευή τῶν στατικῶν καί ἀξισυμμετρικῶν τοπικῶν μελανῶν ὀπῶν μέ σφαιροειδῆ ὁρίζοντα εἶναι ὁ προσδιορισμός τῆς μεταβλητῆς $\mu_2+\mu_3$ ἀπό τίς ἐξισώσεις (2.5) καί (2.6)· μέ γνωστή τή λύση K τῆς ἐξίσωσης (2.17) οἱ ἐξισώσεις (2.5) καί 2.6) δίνουν τίς παραγώγους τοῦ $\mu_2+\mu_3$ ὡς πρός η καί μ, ἐνῶ ἡ συνθήκη ὁλοκληρωσιμότητας (integrability condition) τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν εἶναι ἡ ἐξίσωση (2.17). Ἀντί γιά τή μεταβλητή $\mu_2+\mu_3$ χρησιμοποιοῦμε[33], ἰσοδύναμα, τή μεταβλητή σ πού δίνεται ἀπό τή σχέση

$$e^{\sigma}= \left[\frac{(\eta-1)}{(\eta+1)^3}\right]^{1/2} \times e^{\mu_2+\mu_3+S} \ , \qquad (2.22)$$

ἐπειδή αὐτή ἁπλοποιεῖ πολύ τίς ἀντίστοιχες ἐξισώσεις. Μέ τή βοήθεια τῶν μεταβλητῶν σ καί S ὁ μετρικός τανυστής (2.21) γράφεται

$$ds^2 = \frac{\eta-1}{\eta+1} e^{S} (dt)^2 - \frac{m^2(\eta+1)}{\eta-1} e^{\sigma-S} (d\eta)^2 -$$

$$-m^2(\eta+1)^2 e^{-S} \left[(1-\mu^2) d\varphi^2 + \frac{e^{\sigma}}{1-\mu^2} d\mu^2 \right] , \tag{2.23}$$

ὅπου ἡ συνάρτηση σ προσδιορίζεται ἀπό τή συνάρτηση S ἀπό τίς ἐξισώσεις

$$\frac{2(\eta^2-\mu^2)}{(\eta^2-1)(1-\mu^2)} \sigma_\eta = \frac{4\eta}{\eta^2-1} S_\eta - \frac{4\mu}{\eta^2-1} S_\mu - 2\mu S_\eta S_\mu +$$

$$+ \frac{\eta}{\eta^2-1} \left[(\eta^2-1) S_\eta^2 - (1-\mu^2) S_\mu^2 \right] \tag{2.24}$$

καί

$$\frac{2(\eta^2-\mu^2)}{(\eta^2-1)(1-\mu^2)} \sigma_\mu = \frac{4\mu}{1-\mu^2} S_\eta + \frac{4\eta}{\eta^2-1} S_\mu + 2\eta S_\eta S_\mu +$$

$$+ \frac{\mu}{1-\mu^2} \left[(\eta^2-1) S_\eta^2 - (1-\mu^2) S_\mu^2 \right] . \tag{2.25}$$

2.3. Οἱ λύσεις πού δέν καταστρέφουν τόν ὁρίζοντα.

Στήν ἑνότητα αὐτή προσδιορίζουμε ἐκεῖνες ἀπό τίς λύσεις (2.20) πού περιγράφουν, μέ τή βοήθεια τῶν ἐξισώσεων (2.23)-(2.25), στατικές καί ἀξισυμμετρικές τοπικές μελανές ὀπές. Ἀπό τό σημεῖο αὐτό καί πέρα ἡ μεθοδολογία μας εἶναι τελείως διαφορετική ἀπό τή μεθοδολογία πού ἐκτίθεται στό βιβλίο τοῦ Chandrasekhar[33].

Ἐνδιαφερόμαστε γιά τίς λύσεις S γιά τίς ὁποῖες :

(i) ὁ ὁρίζοντας $\eta=1$ εἶναι μία λεία ἐπιφάνεια.

(ii) Ὁ τετραδιάστατος μετρικός τανυστής (2.23) εἶναι λεῖος καί ἀντιστρεπτός στήν ἐπιφάνεια αὐτή.

(iii) Ὁ ἐπαγόμενος ἀπό τόν (2.23) μετρικός τανυστής στόν ὁρίζοντα (the induced metric on the horizon) εἶναι ἐπίσης λεῖος καί ἀντιστρεπτός.

Οἱ συνθῆκες αὐτές ἐξασφαλίζονται μέ τίς συνθῆκες:

(α) Τό ὅριο

$$G = -16m^6 \left[\lim e^{2\sigma - 2S} \right] \tag{2.26}$$

τῆς ὁρίζουσας τοῦ τετραδιάστατου μετρικοῦ τανυστῆ (2.23) εἶναι πεπερασμένο καί διάφορο τοῦ μηδενός στόν ὁρίζοντα $\eta=1$.

(β) Τό ὅριο

$$g = 16m^4 \left[\lim e^{\sigma - 2S} \right] \tag{2.27}$$

τῆς ὁρίζουσας τοῦ διδιάστατου μετρικοῦ τανυστῆ τοῦ ὁρίζοντα (δηλαδή τοῦ μετρικοῦ τανυστῆ τῆς δεύτερης σειρᾶς τῆς σχέσης (2.23)) εἶναι πεπερασμένο καί διάφορο τοῦ μηδενός. (Ὅλα τά ὅρια εἶναι γιά $\eta \to 1$.)

Οἱ συνθῆκες (α) καί (β) ἀπαιτοῦν μεταξύ ἄλλων ὅτι καί τό ὅριο $\lim e^S$ θά πρέπει νά εἶναι πεπερασμένο καί διάφορο τοῦ μηδενός. Συνεπῶς οἱ πρῶτοι ὅροι τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος (2.20) δέν πρέπει νά περιλαμβάνουν συναρτήσεις Legendre δεύτερου εἴδους. Καταλήγουμε λοιπόν στή τελική μορφή τῆς συνάρτησης S:

$$S = S(\eta,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(\eta) P_k(\mu) \quad , \tag{2.28}$$

ὅπου οἱ A_k εἶναι σταθερές καί τά P_k εἶναι τά πολυώνυμα Legendre τάξης k.

Θεωροῦμε κατόπιν τά ὅρια τῶν ἐξισώσεων (2.24) καί (2.25) γιά $\eta \to 1$, δηλαδή στόν ὁρίζοντα. Ἡ ἐξίσωση (2.24) δίνει μία πολύπλοκη σχέση πού περιλαμβάνει καί τά ὅρια τῶν παραγώγων τῶν σ καί S

ἔξω ἀπό τόν ὁρίζοντα ἐνῶ ἡ ἐξίσωση (2.25) δίνει τήν πολύ ἁπλή ἐξίσωση

$$(\sigma-2S)_{\mu} = 0 \ . \tag{2.29}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι στόν ὁρίζοντα

$$\sigma-2S = 2\alpha \ , \tag{2.30}$$

ὅπου α εἶναι μιά αὐθαίρετη σταθερή.

Στό ἑπόμενο βῆμα θεωροῦμε τά ὅρια τῶν ἐξισώσεων (2.24) καί (2.25) γιά $\mu^2 \to 1$, δηλαδή πάνω στόν ἄξονα συμμετρίας τοῦ χωρόχρονου. Ἡ ἐξίσωση (2.24) δίνει

$$\sigma_{\eta} = 0 \ . \tag{2.31}$$

Συνεπῶς ἡ συνάρτηση σ εἶναι σταθερή σέ κάθε συνεκτικό τμῆμα τοῦ ἀζιμουθιακοῦ ἄξονα. Ἡ σταθερή τιμή τοῦ σ πάνω στόν ἄξονα θά μποροῦσε νά ἐκλεγεῖ αὐθαίρετα. Ἐπιπλέον ὅμως ἀπαιτοῦμε ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφέρειας κάθε κύκλου, πού τό ἐπίπεδό του εἶναι κάθετο στόν ἄξονα ἀζιμουθιακῆς συμμετρίας, πρός τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου αὐτοῦ τείνει πρός 2π ὅταν ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου τείνει πρός τό μηδέν. Ἡ ἀπαίτηση αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή συνθήκη ὅτι $\sigma=0$ σέ ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἄξονα. Συνεπῶς θέτουμε

$$\sigma(\mu=1) = \sigma(\mu=-1) = 0 \ . \tag{2.32}$$

Ἐφ'ὅσον ὁ ἀζιμουθιακός ἄξονας καί ὁ ὁρίζοντας τέμνονται, στά σημεῖα τομῆς ἰσχύουν συγχρόνως οἱ ἐξισώσεις (2.30) καί (2.32). Συνεπῶς ἔχουμε

$$\sigma(1)+2S(1,1) = \sigma(-1)+2S(1,-1), \tag{2.33}$$

δηλαδή ὅτι

$$S(1,1) = S(1,-1). \tag{2.34}$$

Ὁ συνδυασμός τῶν σχέσεων (2.28) καί (2.34) δίνει ὅτι οἱ συντελεστές τῆς σειρᾶς (2.28) ἱκανοποιοῦν τήν

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{2k+1} = 0 , \tag{2.35}$$

ὅπου χρησιμοποιήσαμε καί τήν καθιερωμένη κανονικοποίηση

$$P_k(1) = 1 \quad \text{καί} \quad P_k(-1) = (-1)^k \tag{2.36}$$

τῶν πολυώνυμων Legendre.

Συνοψίζουμε: Ἡ γενικότερη στατική καί ἀξισυμμετρική τοπική μελανή ὀπή μέ σφαιροειδῆ ὁρίζοντα περιγράφεται ἀπό τόν μετρικό τανυστή (2.23). Ἡ συνάρτηση S δίνεται ἀπό τή σχέση (2.28) ὅπου τά P_k εἶναι πολυώνυμα Legendre καί οἱ σταθερές A_k ἱκανοποιοῦν τή σχέση (2.35). Ἡ συνάρτηση σ προσδιορίζεται ἀπό τίς ἐξισώσεις (2.24) καί (2.25) τῶν ὁποίων ἡ συνθήκη ὁλοκληρωσιμότητας ἱκανοποιεῖται αὐτόματα. Ὁ ὁρίζοντας τῆς μελανῆς ὀπῆς εἶναι ἡ ἐπιφάνεια $\eta=1$. Ἡ σταθερή m πού ἐμφανίζεται στό μετρικό τανυστή (2.23) εἶναι ἡ ὁλική μάζα τῆς μελανῆς ὀπῆς· τό συμπέρασμα αὐτό θά ἀποδειχθεῖ στό τέταρτο κεφάλαιο.

2.4. Ἡ σφαιρικότητα τοῦ ὁρίζοντα.

Στήν ἑνότητα αὐτή ὑπολογίζουμε τόν ἀριθμό Euler[81] τοῦ ὁρίζοντα μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος τῶν Gauss καί Bonnet.[81] Ὁ ἀριθμός τοῦ Euler εἶναι μιά τοπολογική σταθερή (topological invariant) τοῦ ὁρίζοντα. Συνεπῶς, ὅλοι οἱ διάφοροι μετρικοί τανυστές (2.23) θά πρέπει νά δίνουν τήν ἴδια τιμή $x=2$ γιά τόν ἀριθμό Euler τοῦ ὁρίζοντα, τόν ἀριθμό Euler τῆς τοπολογικῆς σφαίρας S^2. Τό θεώρημα τῶν Gauss-Bonnet λέει ὅτι σέ κάθε συμπαγῆ πολλαπλότητα μέ μετρικό τανυστή, τό ὁλοκλήρωμα ὄγκου τῆς βαθμωτῆς καμπυλότητας σ'ὅλη τή πολλαπλότητα ἰσοῦται μέ τέσσερις φορές π ἐπί τόν ἀριθμό Euler τῆς πολλαπλότητας:

$$4\pi x = \int RdV, \tag{2.37}$$

ὅπου R εἶναι ἡ βαθμωτή καμπυλότητα τῆς πολλαπλότητας. Στίς διδιάστατες πολλαπλότητες, γιά τίς ὁποῖες μόνον ἐνδιαφερόμαστε στήν πραγματεία αὐτή, ἡ βαθμωτή καμπυλότητα ἰσοῦται μέ τό διπλάσιο τῆς καμπυλότητας τοῦ Gauss (Gaussian curvature) τῆς πολλαπλότητας.

Στίς σφαιρικές τοπικές μελανές ὀπές ὁ ὑπολογισμός τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ Euler ἀπό τό θεώρημα τῶν Gauss-Bonnet ἀποτελεῖ ἁπλῶς ἕνα ξεχωριστό ἔλεγχο τῆς σφαιρικότητας τοῦ ὁρίζοντα. Ἡ κατάσταση εἶναι διαφορετική στίς σαμπρελοειδεῖς μελανές ὀπές: Σ'αὐτές ὁ ἄξονας ἀζιμουθιακῆς συμμετρίας εἶναι συνεκτικός (connected) καί γι'αὐτό δέν μποροῦμε εὔκολα νά βροῦμε μιά σχέση μεταξύ τῶν συντελεστῶν B_k σάν τή σχέση (2.35). Ὁ βασικός λόγος λοιπόν γιά τόν ὁποῖο ὑπολογίζουμε τόν ἀριθμό Euler στήν ἑνότητα αὐτή εἶναι γιά νά ἐλέγξουμε τήν ἰδέα (καί νά πειστοῦμε γιά τήν ὀρθότητά της) ὅτι ἡ ἀπαιτούμενη σχέση μεταξύ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων θά μποροῦσε νά βρεθεῖ καί μέ τήν ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τῶν Gauss-Bonnet.

Κάθε διδιάστατη πολλαπλότητα μέ μετρικό τανυστή εἶναι σύμμορφα ἐπίπεδη (conformally flat), πού σημαίνει ὅτι ὁ μετρικός τανυστής της μπορεῖ νά γραφεῖ, σέ κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, στή μορφή

$$d\tau^2 = \Omega^2 (dy^2+dz^2), \tag{2.38}$$

ὅπου y καί z εἶναι οἱ συντεταγμένες τῆς πολλαπλότητας. Εὔκολα τότε ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ βαθμωτή καμπυλότητα δίνεται ἀπό τή σχέση

$$R = -2\Omega^{-2} \left[(\log\Omega)_{yy} + (\log\Omega)_{zz} \right] . \tag{2.39}$$

Ὁ μετρικός τανυστής τοῦ ὁρίζοντα τῶν τοπικῶν μελανῶν ὀπῶν πού κατασκευάσαμε στήν ἑνότητα 2.3 δίνεται ἀπό τή σχέση

$$d\tau^2 = 4m^2 e^{-S} \left[(1-\mu^2)(d\varphi)^2 + \frac{e^{\sigma}}{1-\mu^2}(d\mu)^2 \right] , \tag{2.40}$$

ὅπου τώρα S καί σ εἶναι οἱ ὁριακές τιμές τῶν συναρτήσεων τῆς προηγούμενης ἑνότητας γιά $\eta=1$. Γράφοντας τό μετρικό τανυστή (2.40) στή μορφή (2.38), ἐκτελώντας μερικές πολύπλοκες πράξεις γιά τόν ὑπολογισμό τῆς βαθμωτῆς καμπυλότητας καί ἀντικαθιστώντας στόν τύπο (2.37) βρίσκουμε τή σχέση

$$2x = e^{-\alpha} \int_{-1}^{+1} e^{-S} \left[(1-\mu^2) S_{\mu\mu} - 4\mu S_{\mu} + (\mu^2-1) S_{\mu}^2 + 2 \right] d\mu , \tag{2.41}$$

ὅπου α εἶναι ἡ σταθερή τῆς σχέσης (2.30). Ἐφ'ὅσον $\sigma=0$ στόν ἄξονα, $-\alpha=S(1)$. Τό ὁλοκλήρωμα (2.41) μπορεῖ εὔκολα νά ὑπολογιστεῖ. Δίνει

$$x = 1+e^{S(1)-S(-1)} \quad . \tag{2.42}$$

Συνεπῶς ἡ ἀπαίτηση ὅτι ὁ ἀριθμός τοῦ Euler τοῦ ὁρίζοντα ἰσοῦται μέ 2 εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή σχέση (2.34), δηλαδή ἰσοδύναμη καί μέ τή συνθήκη (2.35) μεταξύ τῶν σταθερῶν συντελεστῶν τῆς συνάρτησης S.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΤΟΠΙΚΕΣ ΜΕΛΑΝΕΣ ΟΠΕΣ ΜΕ ΣΑΜΠΡΕΛΟΕΙΔΗ ΟΡΙΖΟΝΤΑ

3.1. Συνθήκη βαθμίδας γιά σαμπρελοειδεῖς συντεταγμένες.

Γιά νά γράψουμε τίς στατικές καί ἀξισυμμετρικές ἐξισώσεις Einstein σέ σαμπρελοειδεῖς (toroidal) συντεταγμένες ἀρχίζουμε πάλι ἀπό τή μορφή (2.1) τοῦ μετρικοῦ τανυστῆ τοῦ χωρόχρονου. Ἡ βασική διαφορά μέ τή θεωρία τοῦ προηγούμενου κεφάλαιου εἶναι πώς τώρα θά πρέπει νά θεωρήσουμε τίς συντεταγμένες $x^2=\lambda$ καί $x^3=\vartheta$ σάν σαμπρελοειδεῖς συντεταγμένες.[82] Τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν συντεταγμένων αὐτῶν εἶναι $0<\lambda<\infty$ καί $-\pi<\vartheta<\pi$.

Οἱ ἐξισώσεις Einstein εἶναι οἱ ἐξισώσεις (2.3)-(2.6), ἐφ'ὅσον στήν ἑνότητα (2.1) εἶχαν γραφεῖ στό τυχαῖο σύστημα συντεταγμένων x^2, x^3. Ὅπως καί στό προηγούμενο κεφάλαιο θέτουμε

$$e^{2(\mu_3-\mu_2)} = \Delta(\lambda) \quad , \tag{3.1}$$

ἔτσι ὥστε οἱ ρίζες τῆς ἐξίσωσης $\Delta(\lambda)=0$ νά προσδιορίζουν τόν ὁρίζοντα. Ἀπαιτώντας, ὅπως καί στήν ἑνότητα (2.1), ὅτι ὁ ὁρίζοντας συμπίπτει μέ τόν ὁρίζοντα Killing τῶν διανυσματικῶν πεδίων $\partial/\partial t$ καί $\partial/\partial\varphi$ θέτουμε

$$e^{\beta} = \sqrt{\Delta}\, \mathrm{ch}\lambda\, f(\vartheta) \quad , \tag{3.2}$$

ὅπου οἱ συναρτήσεις Δ καί f πρέπει νά προσδιοριστοῦν ἀπό τήν ἐξίσωση (2.3). (Ἐφ'ὅσον ἡ ἐξίσωση $\mathrm{ch}\lambda=0$ δέν ἔχει καμμιά πραγματική ρίζα, ὁ ὁρίζοντας γεγονότων $\Delta=0$ καί ὁ ὁρίζοντας Killing συμπίπτουν). Ἀντικατάσταση τῆς (3.2) στήν ἐξίσωση (2.3) δίνει εὔκολα τή λύση

$$f(\vartheta) = \cos^{\vartheta}/_{2} \tag{3.3}$$

καί

$$\Delta = \frac{s(s-4m)}{4ch^2\lambda} . \tag{3.4}$$

Στή σχέση (3.4) καί στό ὑπόλοιπο μέρος τῆς πραγματείας χρησιμοποιοῦμε γιά συντομία τό συμβολισμό

$$s = sh\,\lambda . \tag{3.5}$$

Ἡ ἐκλογή τῆς τριγωνομετρικῆς λύσης (3.3) ἔγινε ἔτσι ὥστε ὁ μετρικός τανυστής νά εἶναι ἀντιστρεπτός σ'ὅλο τό διάστημα ὁρισμοῦ τῆς συντεταγμένης ϑ. Ἐπιπλέον, ἡ σταθερή τῆς ὁλοκλήρωσης συμβολίστηκε μέ $4m$ ὥστε ἡ ὁλική μάζα τῆς μελανῆς ὀπῆς νά ἰσοῦται μέ m· Ὁ ὑπολογισμός τῆς μάζας τῆς μελανῆς ὀπῆς θά γίνει στό ἑπόμενο κεφάλαιο. Οἱ σχέσεις (3.1)-(3.5) συνεπάγονται ὅτι

$$e^{\mu_3-\mu_2} = \frac{\sqrt{s(s-4m)}}{2ch\,\lambda} \tag{3.6}$$

καί

$$e^{\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{s(s-4m)}\,\cos^{\vartheta}/_{2} . \tag{3.7}$$

Ὁ ὁρίζοντας τῆς μελανῆς ὀπῆς πού προσπαθοῦμε νά κατασκευάσουμε θά εἶναι ἡ ἐπιφάνεια

$$s = 4m . \tag{3.8}$$

3.2. Οἱ ἐξισώσεις Einstein σέ σαμπρελοειδεῖς συντεταγμένες.

Οἱ θεωρήσεις τῆς προηγούμενης ἐνότητας ἔχουν προσδιορίσει μονοσήμαντα τό σύστημα τῶν σαμπρελοειδῶν συντεταγμένων στό ὁποῖο θά δουλέψουμε. Τό ἐπόμενό μας πρόβλημα εἶναι νά μελετήσουμε τίς ὑπόλοιπες ἐξισώσεις Einstein (2.4)-(2.6) στό σύστημα αὐτό.

Θέτουμε

$$\mu = \sin{}^{\vartheta}/_{2} \quad . \tag{3.9}$$

Ἡ ἐξίσωση (2.4) ἀνάγεται στήν πολύ ἁπλή μορφή

$$\left[s(s-4m)(\psi-\nu)_s\right]_s + \left[(1-\mu^2)(\psi-\nu)_\mu\right]_\mu = 0 \quad . \tag{3.10}$$

Οἱ ἐξισώσεις (2.5) καί (2.6) πού προσδιορίζουν τή συνάρτηση $\mu_2+\mu_3$ εἶναι πολύ πιό πολύπλοκες. Οἱ σχέσεις ἁπλουστεύουν λίγο ἄν ἀντί γιά τή συνάρτηση $\mu_2+\mu_3$ χρησιμοποιήσουμε, ἰσοδύναμα, τή συνάρτηση K πού δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\mu_2+\mu_3 = \frac{1}{4}\log\left\{\frac{(1+s^2)^2\left[(s-2m)^2-4m^2\mu^2\right]^4}{s^3(s-4m)^3(1-\mu^2)}\right\} + K \quad . \tag{3.11}$$

Ὁ μετρικός τανυστής (2.1) τότε γράφεται

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - e^{2\psi}(d\varphi)^2 -$$

$$- \frac{2\left[(s-2m)^2-4m^2\mu^2\right]e^K}{\left[s(s-4m)(1-\mu^2)\right]^{1/4}}\left[\frac{(ds)^2}{s(s-4m)} + \frac{(d\mu)^2}{1-\mu^2}\right] \quad . \tag{3.12}$$

Ἡ μεταβλητή K προσδιορίζεται ἀπό τίς ἐξισώσεις (συνέπεια τῶν ἐξισώσεων (2.5) καί (2.6))

$$K_s = \frac{1-\mu^2}{(s-2m)^2-4m^2\mu^2}\left[\frac{1}{2}(s-2m)A-s\mu(s-4m)B\right], \tag{3.13}$$

καί

$$K_\mu = \frac{s(s-4m)(1-\mu^2)}{(s-2m)^2-4m^2\mu^2}\left[(s-2m)B+\frac{\mu}{2(1-\mu^2)}A\right], \tag{3.14}$$

ὅπου

$$A = s(s-4m)(\psi-\nu)_s^2 - (1-\mu^2)(\psi-\nu)_\mu^2 \tag{3.15}$$

καί

$$B = (\psi-\nu)_s(\psi-\nu)_\mu \quad . \tag{3.16}$$

Συνεπῶς, γιά νά προσδιορίσουμε τίς στατικές καί ἀξισυμμετρικές λύσεις τῶν ἐξισώσεων Einstein σέ σαμπρελοειδεῖς συντεταγμένες, γιά τίς ὁποῖες ὁ μετρικός τανυστής εἶναι ὁ (3.12), θά πρέπει πρῶτα νά προσδιορίσουμε τίς λύσεις $\psi-\nu$ τῆς ἐξίσωσης (3.10), κατόπιν νά ὑπολογίσουμε τά A καί B τῶν ἐξισώσεων (3.15) καί (3.16) καί τέλος νά ὑπολογίσουμε τή μεταβλητή K ἀπό τίς ἐξισώσεις (3.13) καί (3.14). Ὁ προσδιορισμός τῶν λύσεων τῆς (3.10) δέν εἶναι δύσκολος· τό δύσκολο εἶναι νά προσδιορίσουμε ποιές ἀπό τίς λύσεις αὐτές παριστάνουν τοπικές μελανές ὀπές μέ σαμπρελοειδῆ ὁρίζοντα.

3.3. Κατασκευή τῆς βασικῆς σαμπρελοειδοῦς μελανῆς ὀπῆς

Ὅπως καί στήν περίπτωση τῶν σφαιρικῶν ἔτσι καί γιά τήν κατασκευή τῶν σαμπρελοειδῶν τοπικῶν μελανῶν ὀπῶν θά χρησιμοποιήσουμε τήν ἀρχή τῆς ἐπαλληλίας. Ὁ πρῶτος στόχος λοιπόν εἶναι ἡ κατασκευή μιᾶς, τῆς βασικῆς, στατικῆς καί ἀξισυμμετρικῆς τοπικῆς μελανῆς ὀπῆς μέ σαμπρελοειδῆ ὀρίζοντα. Κατόπιν, στή λύση αὐτή θά προσθέσουμε τή γενικότερη λύση τῆς ἐξίσωσης (3.10) πού δέν καταστρέφει τόν ὀρίζοντα.

Ὑπολογίζουμε τά ὅρια στόν ὀρίζοντα τῶν ὀριζουσῶν τοῦ τετραδιάστατου μετρικοῦ τανυστῆ (3.12) καί τοῦ διδιάστατου μετρικοῦ τανυστῆ τοῦ ὀρίζοντα πού ἐπάγεται ἀπό τόν τανυστή (3.12). Βρίσκουμε, ἀντίστοιχα,

$$G = -8m^3(1-\mu^2)\left[m(1-\mu^2)\right]^{1/2} \lim \frac{e^{2K}}{(s-4m)^{1/2}} \tag{3.17}$$

καί

$$g = 4m^2\left[4m(1-\mu^2)\right]^{1/4} \lim\left[(s-4m)^{1/4}e^{K+\psi-\nu}\right], \tag{3.18}$$

ὅπου ὅλα τά ὅρια εἶναι στόν ὀρίζοντα, δηλαδή γιά $s\to 4m$. Ἀπαιτοῦμε καί οἱ δύο, ὁ τετραδιάστατος μετρικός τανυστής τοῦ χωρόχρονου καί ὁ διδιάστατος μετρικός τανυστής τοῦ ὀρίζοντα, νά εἶναι λεῖοι καί ἀντιστρεπτοί στόν ὀρίζοντα $s=4m$. Οἱ συνθῆκες αὐτές εἶναι ἰσοδύναμες μέ τίς συνθῆκες ὅτι τά ὅρια (3.17) καί (3.18) εἶναι πεπερασμένα καί διάφορα τοῦ μηδενός. Σύγκριση τῶν σχέσεων (3.17) καί (3.18) δίνει ὅτι καί τό ὅριο

$$\lim \left[(s-4m)^{1/2} \, e^{\psi-\nu} \right] \qquad (3.19)$$

θά πρέπει νά εἶναι πεπερασμένο καί διάφορο τοῦ μηδενός. Συνεπῶς, γιά τήν κατασκευή τῆς βασικῆς τοπικῆς μελανῆς ὀπῆς μέ σαμπρελοειδῆ ὁρίζοντα πρέπει νά προσδιορίσουμε μία λύση τῆς ἐξίσωσης (3.10) πού νά ἔχει κοντά στόν ὁρίζοντα τήν ἀσυμπτωτική συμπεριφορά

$$\psi-\nu \sim -\frac{1}{2}\log(s-4m) \; . \qquad (3.20)$$

Παίρνοντας ὑπ'ὄψη καί τή μορφή τῆς ἐξίσωσης (3.10) ψάχνουμε νά βροῦμε λύσεις της τῆς μορφῆς

$$\psi-\nu = \log b - \frac{1}{2}\log\left[s(s-4m)\right] + f(\mu) \; , \qquad (3.21)$$

ὅπου b εἶναι μιά σταθερή καί f μιά συνάρτηση μιᾶς μεταβλητῆς, ἄγνωστη πρός τό παρόν, πού θά προσδιοριστεῖ ἀπό τήν ἐξίσωση (3.10).

Ἀντικατάσταση τῆς σχέσης (3.21) στήν ἐξίσωση (3.10) δίνει ὅτι ἡ συνάρτηση f πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση

$$\left[(1-\mu^2)\dot{f}\right]^{\cdot} = 1 \quad , \qquad (3.22)$$

ὅπου ἡ τελεία ὑποδηλώνει παραγώγιση ὡς πρός μ. Ἡ ἐξίσωση (3.22) δέχεται τό ὁλοκλήρωμα

$$\dot{f} = \frac{\mu+2\beta}{1-\mu^2} \quad , \qquad (3.23)$$

ὅπου β εἶναι μιά σταθερή. Τή σταθερή β πρέπει νά τήν προσδιορίσουμε κατάλληλα ἔτσι ὥστε ὁ ὁρίζοντας τῆς μελανῆς ὀπῆς (3.21) νά εἶναι σαμπρελοειδής.

Παρατηροῦμε ὅτι μέ τή βοήθεια τῶν σχέσεων (3.21) καί (3.23) μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε ἀναλυτικά τό μετρικό τανυστή (3.12). Ὁ ὑπολογισμός ἐπιτυγχάνεται μέ τά παρακάτω βήματα:

(i) Ἡ ὁλοκλήρωση τῆς (3.23) δίνει

$$f = \log \frac{(1+\mu)^{\frac{2\beta-1}{2}}}{(1-\mu)^{\frac{2\beta+1}{2}}} \; . \tag{3.24}$$

(Ἡ σταθερή τῆς ὁλοκλήρωσης παραλείπεται γιατί εὔκολα ἀπορροφᾶται σέ μιά γραμμική ἀλλαγή τῶν συντεταγμένων).

(ii) Ξέροντας τό ψ-ν ὑπολογίζουμε τά A καί B ἀπό τίς σχέσεις (3.15) καί (3.16). Βρίσκουμε:

$$A = \frac{(s-2m)^2}{s(s-4m)} - \frac{(\mu+2\beta)^2}{1-\mu^2} \tag{3.25}$$

καί

$$B = - \frac{(s-2m)(\mu+2\beta)}{s(s-4m)(1-\mu^2)} \; . \tag{3.26}$$

(iii) Ἀπό τά A καί B ὑπολογίζουμε τά δεξιά μέλη τῶν ἐξισώσεων (3.13) καί (3.14). Ἡ ὁλοκλήρωση τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν δίνει

$$K = \frac{1}{4} \log \left[s(s-4m) \right] + \frac{1}{4} \log \left[(1-\mu)^{(2\beta+1)^2} (1+\mu)^{(2\beta-1)^2} \right] -$$

$$- \beta^2 \log \left[(s-2m)^2 - 4m^2\mu^2 \right] + \log 2c, \tag{3.27}$$

ὅπου c εἶναι ἡ σταθερή τῆς ὁλοκλήρωσης.

(iv) Ἡ σχέση (3.7) προσδιορίζει τό $\beta=\psi+\nu$ ἐνῶ ἡ σχέση (3.21) προσδιορίζει τό $\psi-\nu$. Συνεπῶς, μποροῦμε εὔκολα νά ὑπολογίσουμε τά ψ καί ν.

Ἀντικατάσταση στό μετρικό τανυστή (3.12) δίνει τή λύση τῶν ἐξισώσεων Einstein

$$ds^2 = \frac{s(s-4m)(1-\mu)^{\beta+1}}{2b(1+\mu)^{\beta-1}}(dt)^2 - \frac{b}{2}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\beta}(d\varphi)^2 -$$

$$- 4c\left[(s-2m)^2-4m^2\mu^2\right]^{1-\beta^2}(1-\mu)^{\beta^2+\beta}(1+\mu)^{\beta^2-\beta}\left[\frac{(ds)^2}{s(s-4m)}+\frac{(d\mu)^2}{1-\mu^2}\right] . \qquad (3.28)$$

Θέτοντας $t=$σταθ. καί $s=4m$ στό μετρικό τανυστή (3.28) βρίσκουμε τόν διδιάστατο μετρικό τανυστή τοῦ ὁρίζοντα

$$d\tau^2 = \frac{b}{2}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\beta}(d\varphi)^2 + 4c(4m^2)^{1-\beta^2}\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\beta}(d\mu)^2 . \qquad (3.29)$$

Προφανῶς γιά $\beta=0$ ὁ μετρικός τανυστής (3.29) εἶναι ἐπίπεδος καί συνεπῶς ὁ ὁρίζοντας τῆς μελανῆς ὀπῆς (3.28) γίνεται τοπολογική σαμπρέλα μέ τή ταυτοποίηση τῶν γραμμῶν $\varphi=0$ καί $\varphi=2\pi$ καί $\mu=-1$ καί $\mu=+1$.

Θά τελειώσουμε τήν ἑνότητα μέ τήν ἀπόδειξη τοῦ συμπεράσματος ὅτι ἡ μόνη ἐκλογή τῆς σταθερῆς β πού μπορεῖ νά κάνει τή διδιάστατη πολλαπλότητα μέ μετρικό τανυστή (3.29) μιά τοπολογική σαμπρέλα εἶναι ἡ ἐκλογή $\beta=0$. Γιά τήν ἀπόδειξη ὑπολογίζουμε τή βαθμωτή καμπυλότητα τοῦ μετρικοῦ τανυστῆ (3.29).

Χρησιμοποιώντας τή μέθοδο πού ἐκτέθηκε στήν ἐνότητα (2.4) βρίσκουμε, μετά ἀπό ἕναν ἀρκετά πολύπλοκο ὑπολογισμό, ὅτι ἡ βαθμωτή πολλαπλότητα τοῦ (3.29) ἰσοῦται μέ

$$R = -\frac{\beta(\beta+\mu)}{c}(4m^2)^{\beta^2-1}\frac{(1+\mu)^{\beta-2}}{(1-\mu)^{\beta+2}} . \tag{3.30}$$

Γιά νά μποροῦν νά ταυτοποιηθοῦν οἱ γραμμές $\mu=-1$ καί $\mu=+1$ τοῦ ὁρίζοντα θά πρέπει ἡ βαθμωτή καμπυλότητα (3.30) νά ἔχει πεπερασμένο, καί τό ἴδιο, ὅριο γιά $\mu\to\pm1$. Ἀπό τή σχέση (3.30) εὔκολα βλέπουμε ὅτι αὐτό μπορεῖ νά συμβεῖ μόνον γιά $\beta=0$. Ἐφ'ὅσον $\beta=0$ δίνει $R=0$, γιά τήν τιμή αὐτή ὁ μετρικός τανυστής (3.29) παριστάνει μιά ἐπίπεδη (μετρική) σαμπρέλα.

3.4. Προσδιορισμός τῶν παραμέτρων.

Στήν ἐνότητα 3.3 προσδιορίσαμε τή βασική στατική, ἀξισυμμετρική, τοπική μελανή ὀπή μέ σαμπρελοειδῆ ὁρίζοντα ἀπό τήν ὁποία θά κατασκευαστεῖ, μέ βάση τήν ἀρχή τῆς ἐπαλληλίας, ἡ γενικότερη τοπική μελανή ὀπή μέ σαμπρελοειδῆ ὁρίζοντα. Ὁ μετρικός τανυστής τῆς μελανῆς ὀπῆς δίνεται ἀπό τή σχέση (3.28) μέ $\beta=0$. Στήν ἐνότητα αὐτή θά διαλέξουμε κατάλληλα τίς σταθερές b καί c τοῦ (3.28), πού προέκυψαν σάν σταθερές ὁλοκλήρωσης, ἔτσι ὥστε ὁρισμένα ἐξωτερικά φυσικά χαρακτηριστικά τῆς μελανῆς ὀπῆς νά ἔχουν τίς ἴδιες τιμές πού ἔχουν καί στίς σφαιρικές μελανές ὀπές. Γιά τό σκοπό αὐτό ὑπολογίζουμε τήν ὁλική μάζα, τήν ἐπιφάνεια τοῦ ὁρίζοντα καί τήν ἐπιφανειακή ἔνταση βαρύτητας[83] (surface gravity) τῆς μελανῆς ὀπῆς (3.28) μέ $\beta=0$.

'Η μέθοδος ὑπολογισμοῦ τῶν ποσοτήτων αὐτῶν γιά τίς γενικότερες τοπικές σφαιρικές καί σαμπρελοειδεῖς μελανές ὀπές ἐκτίθεται στό τέταρτο κεφάλαιο. Στήν ἐνότητα αὐτή δίνουμε μόνο τά ἀποτελέσματά τους γιά τήν εἰδική περίπτωση τῆς μελανῆς ὀπῆς μέ μετρικό τανυστή (3.28) μέ $\beta=0$.

(i) Τό ὀλοκλήρωμα Komar[84] (Komar integral) τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου Killing $(\partial/\partial t)$ δίνει

$$M = \frac{1}{16\pi}\iint \varepsilon_{abmn}(\nabla^a \xi^b)\, dA^{mn} = m \quad . \tag{3.31}$$

Συνεπῶς ἡ μάζα τῆς βασικῆς μελανῆς ὀπῆς εἶναι m.

(ii) 'Η ἐπιφάνεια τοῦ ὁρίζοντα εἶναι

$$A = 8\pi m \sqrt{2bc} \quad . \tag{3.32}$$

(iii) 'Η ἐπιφανειακή ἔνταση τῆς βαρύτητας εἶναι

$$k = \lim \left\{\frac{1}{2}\,(\nabla_m \xi_n)(\nabla^m \xi^n)\right\}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{8bc}} \quad . \tag{3.33}$$

Θά ἀπαιτήσουμε τίς σχέσεις

$$\frac{kA}{4\pi} = m \tag{3.34}$$

καί

$$A = 16\pi m^2 \; , \tag{3.35}$$

πού ἰσχύουν γιά τή μελανή ὀπή Schwarzschild. Οἱ σχέσεις αὐτές προσδιορίζουν μόνον τό γινόμενο bc. Δίνουν

$$bc = 2m^2 . \tag{3.36}$$

Γιά εὐκολία, καί χωρίς νά χάνουμε τή γενικότητα τῆς λύσης, διαλέγουμε

$$b = 8m^2 \quad \text{καί} \quad c = 1/4 \tag{3.37}$$

Συνεπῶς ὁ μετρικός τανυστής τῆς βασικῆς στατικῆς καί ἀξισυμμετρικῆς τοπικῆς μελανῆς ὀπῆς μέ σαμπρελοειδῆ ὁρίζοντα εἶναι

$$ds^2 = \frac{s(s-4m)(1-\mu^2)}{16m^2}(dt)^2 - 4m^2(d\varphi)^2 -$$

$$- \left[(s-2m)^2 - 4m^2\mu^2\right] \left[\frac{(ds)^2}{s(s-4m)} + \frac{(d\mu)^2}{1-\mu^2}\right] . \tag{3.38}$$

Ὁ ὁρίζοντας τῆς μελανῆς ὀπῆς εἶναι ἡ ἐπιφάνεια $s = 4m$. Ὁ μετρικός τανυστής (3.38) ἀντιστοιχεῖ στή λύση

$$(\psi-\nu)_o = \log \frac{8m^2}{\left[s(s-4m)(1-\mu^2)\right]^{1/2}} \tag{3.39}$$

τῆς ἐξίσωσης (3.10).

3.5. Ἡ γενικότερη λύση τῶν ἐξισώσεων Einstein.

Ἐνδιαφερόμαστε τώρα νά κατασκευάσουμε τή γενικότερη στατική, ἀξισυμμετρική, τοπική μελανή ὀπή μέ σαμπρελοειδῆ ὀρίζοντα. Ἡ βασική ἰδέα εἶναι νά προσθέσουμε στή λύση (3.39) τή γενικότερη λύση τῆς ἐξίσωσης (3.10), ἡ ὁποία δέν καταστρέφει τήν ὕπαρξη τοῦ ὀρίζοντα.

Πρῶτα κάνουμε μιά ἀλλαγή τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς s. Στίς καινούργιες μεταβλητές ἡ ἐξίσωση (3.10) θά εἶναι συμμετρική ὡς πρός η καί μ ἐνῶ συγχρόνως οἱ λύσεις της θά μποροῦν εὔκολα νά ἐκφραστοῦν μέ τή βοήθεια γνωστῶν εἰδικῶν συναρτήσεων.

Θέτουμε

$$s = 2m(\eta+1) \ . \tag{3.40}$$

Ἡ ἐξίσωση (3.10) γράφεται

$$\left[(\eta^2-1)(\psi-\nu)_\eta\right]_\eta + \left[(1-\mu^2)(\psi-\nu)_\mu\right]_\mu = 0 \ , \tag{3.41}$$

ἐνῶ στίς καινούργιες μεταβλητές ὁ ὀρίζοντας εἶναι ἡ ἐπιφάνεια

$$\eta = 1 \ . \tag{3.42}$$

Προφανῶς, ὅπως εἴδαμε καί στήν ἑνότητα (2.2), ἡ ἐξίσωση (3.41) δέχεται λύσεις μέ διαχωριζόμενες μεταβλητές καί ὅρους συναρτήσεις Legendre. Γράφουμε λοιπόν τή γενική λύση τῆς (3.41) στή μορφή

$$\psi-\nu = (\psi-\nu)_o + S(\eta,\mu) \ , \tag{3.43}$$

ὅπου

$$S(\eta,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[B_k P_k(\eta) + \Gamma_k Q_k(\eta) \right] P_k(\mu) \ . \tag{3.44}$$

Τά P_k εἶναι τά πολυώνυμα Legendre καί οἱ Q_k οἱ συναρτήσεις Legendre δεύτερου εἴδους καί τάξης k, ἐνῶ οἱ B_k καί Γ_k εἶναι αὐθαίρετες σταθερές. Ὅπως καί στήν ἑνότητα (2.2), παραλείπουμε τίς συναρτήσεις Legendre ὡς πρός τή μεταβλητή μ γιατί ἀπειρίζονται γιά $\mu \to \pm 1$.

Ἀπό τίς σχέσεις (3.7) καί (3.43) εὔκολα ὑπολογίζονται τά ψ καί ν. Τό πιό πολύπλοκο βῆμα εἶναι ὁ ὑπολογισμός τῆς συνάρτησης K τῶν ἐκφράσεων (3.11) καί (3.12). Ἰσοδύναμα, ἀντί γιά τή συνάρτηση K, μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τή συνάρτηση $\sigma=\sigma(\eta,\mu)$ πού συνδέεται μέ τήν K μέ τή σχέση

$$K = \frac{1}{4} \log \left[(\eta^2-1)(1-\mu^2) \right] + \sigma - S \ . \tag{3.45}$$

Ἐπιπλέον βρίσκουμε ὅτι οἱ ποσότητες A καί B τῶν σχέσεων (3.15) καί (3.16) παίρνουν γιά τή λύση (3.43) τίς τιμές

$$A = \frac{\eta^2}{\eta^2-1} - \frac{\mu^2}{1-\mu^2} + (\eta^2-1) S_\eta^2 - 2\eta S_\eta - (1-\mu^2) S_\mu^2 - 2\mu S_\mu \tag{3.46}$$

καί

$$B = \frac{1}{2m} \left[\frac{\mu}{1-\mu^2} S_\eta - \frac{\eta}{\eta^2-1} S_\mu + S_\eta S_\mu - \frac{\eta\mu}{(\eta^2-1)(1-\mu^2)} \right] . \tag{3.47}$$

Ἔχουμε λοιπόν ὅλα τά στοιχεῖα πού μᾶς χρειάζονται γιά νά γράψουμε ἀναλυτικά τίς ἐξισώσεις (3.13) καί (3.14). Ἀλλάζοντας τήν ἀνεξάρτητη μεταβλητή ἀπό s σέ η (ἐξίσωση 3.40)), ἀντικαθιστώντας τά A καί B άπό τίς έξισώσεις (3.46) καί (3.47) καί κρατώντας, άντί γιά K, τήν σ (έξίσωση (3.45)) σάν τήν έξαρτημένη μεταβλητή παίρνουμε μετά άπό άρκετά πολύπλοκους ύπολογισμούς τίς σχετικά άπλές έξισώσεις

$$\sigma_\eta = \frac{\eta(1-\mu^2)}{2(\eta^2-\mu^2)}\left[(\eta^2-1)s_\eta^2 - (1-\mu^2)s_\mu^2\right] -$$

$$- \frac{\mu(\eta^2-1)(1-\mu^2)}{\eta^2-\mu^2}s_\eta s_\mu \qquad (3.48)$$

καί

$$\sigma_\mu = \frac{\mu(\eta^2-1)}{2(\eta^2-\mu^2)}\left[(\eta^2-1)s_\eta^2 - (1-\mu^2)s_\mu^2\right] +$$

$$+ \frac{\eta(\eta^2-1)(1-\mu^2)}{\eta^2-\mu^2}s_\eta s_\mu \quad . \qquad (3.49)$$

'Η συνθήκη όλοκληρωσιμότητας τῶν έξισώσεων (3.48) καί (3.49) εἶναι ή έξίσωση (3.41), πράγμα πού μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ καί γιά ἕναν άνεξάρτητο ἔλεγχο τῶν τελικῶν έξισώσεων (3.48) καί (3.49) τοῦ προβλήματος.

'Ο μετρικός τανυστής τῶν σαμπρελοειδῶν μελανῶν όπῶν προσδιορίζεται άπό τή σχέση (3.12) ἄν χρησιμοποιήσουμε τά ν καί ψ πού προσδιορίζουμε άπό τίς έξισώσεις (3.7) καί (3.43) καί άντικαταστήσουμε τό K άπό τή σχέση (3.45). Βρίσκουμε

$$ds^2 = \frac{1}{4}(\eta^2-1)(1-\mu^2)e^{-S}(dt)^2 - 4m^2e^S(d\varphi)^2 -$$

$$- 4m^2(\eta^2-\mu^2)e^{\sigma-S}\left[\frac{(d\eta)^2}{\eta^2-1} + \frac{(d\mu)^2}{1-\mu^2}\right] . \quad (3.50)$$

Τό συμπέρασμα, μέχρι τό σημεῖο αὐτό, εἶναι ὅτι ὁ μετρικός τανυστής (3.50) ἀποτελεῖ λύση τῶν ἐξισώσεων Einstein ὅταν ἡ S δίνεται ἀπό τή σχέση (3.44) καί ἡ σ προσδιορίζεται ἀπό τήν S μέ τή βοήθεια τῶν ἐξισώσεων (3.48) καί 3.49).

3.6. Ἡ γενικότερη σαμπρελοειδής τοπική μελανή ὀπή.

Τό ἐπόμενο βῆμα εἶναι νά προσδιορίσουμε ἐκεῖνες ἀπό τίς λύσεις (3.50) τῶν ἐξισώσεων Einstein πού περιγράφουν στατικές καί ἀξισυμμετρικές τοπικές μελανές ὀπές μέ σαμπρελοειδῆ ὁρίζοντα.

Γιά τίς λύσεις (3.50) ἰσχύουν:

(i) Τό ὅριο τῆς ὁρίζουσας τοῦ τετραδιάστατου μετρικοῦ τανυστῆ στόν ὁρίζοντα εἶναι

$$G = -16m^6(1-\mu^2)^2 \lim e^{2\sigma-2S} . \quad (3.51)$$

(ii) Ὁ διδιάστατος μετρικός τανυστής στόν ὁρίζοντα εἶναι

$$d\tau^2 = 4m^2\left[e^S(d\varphi)^2 + e^{\sigma-S}(d\mu)^2\right] \quad (3.52)$$

ὅπου μέ S καί σ δηλώνουμε τίς ὁριακές τιμές τῶν συναρτήσεων αὐτῶν στόν ὁρίζοντα $(\eta=1)$.

(iii) 'Η ὁρίζουσα τοῦ μετρικοῦ τανυστῆ τοῦ ὁρίζοντα εἶναι

$$g = 16m^4 \lim e^{\sigma} . \tag{3.53}$$

Γιά νά εἶναι λοιπόν οἱ μετρικοί τανυστές (3.50) καί (3.52) λεῖοι καί ἀντιστρεπτοί πρέπει τά ὅρια (3.51) καί (3.53) νά εἶναι πεπερασμένα καί διάφορα τοῦ μηδενός. Συνεπῶς πρέπει νά εἶναι

$$\lim e^{S} = \text{πεπερασμένο, διάφορο τοῦ μηδενός} \tag{3.54}$$

καί

$$\lim e^{\sigma} = \text{πεπερασμένο, διάφορο τοῦ μηδενός} . \tag{3.55}$$

'Η (3.54) ἱκανοποιεῖται ἀκριβῶς τότε ὅταν ἡ ἔκφραση (3.44) δέν περιέχει καθόλου συναρτήσεις Legendre δεύτερου εἴδους. Στήν περίπτωση αὐτή συμπεραίνουμε, ἀπό τίς ἐξισώσεις (3.48) καί (3.49), ὅτι καί ἡ συνθήκη (3.55) ἱκανοποιεῖται. Ὥστε λοιπόν

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} B_k P_k(\eta) P_k(\mu) . \tag{3.56}$$

Θεωροῦμε κατόπιν τά ὅρια τῶν ἐξισώσεων (3.48) καί (3.49):

(α) Γιά $\eta \to 1$, δηλαδή στόν ὁρίζοντα, βρίσκουμε ὅτι

$$\sigma_\mu = 0 . \tag{3.57}$$

Συνεπῶς ἡ σ εἶναι σταθερή πάνω στόν ὁρίζοντα.

(β) Γιά $\eta \to -1$, δηλαδή στόν ἄξονα τῆς ἀζιμουθιακῆς συμμετρίας, βρίσκουμε ὅτι

$$\sigma_\mu = 0 \; . \tag{3.58}$$

Συνεπῶς ἡ σ εἶναι σταθερή πάνω στόν ἄξονα συμμετρίας.

(γ) Γιά $\mu^2 \to 1$, δηλαδή στό ἰσημερινό ἐπίπεδο, βρίσκουμε ὅτι

$$\sigma_\eta = 0 \; . \tag{3.59}$$

Συνεπῶς ἡ σ εἶναι σταθερή πάνω στό ἰσημερινό ἐπίπεδο. Ἐφ᾽ὅσον ὁ ὁρίζοντας, τό ἰσημερινό ἐπίπεδο καί ὁ ἄξονας συμμετρίας ἔχουν κοινά σημεῖα, ἡ σταθερή τιμή τοῦ σ εἶναι ἡ ἴδια καί στά τρία αὐτά σύνολα. Ἄς εἶναι

$$\sigma = 2\alpha \tag{3.60}$$

ἡ σταθερή αὐτή τιμή.

Τό τελευταῖο βῆμα εἶναι ἡ ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τῶν Gauss-Bonnet πού θά δώσει μιά σχέση μεταξύ τῶν συντελεστῶν τῆς σειρᾶς (3.56) ἀνάλογη (ἀλλά ἀρκετά πιό πολύπλοκη) μέ τή σχέση (2.35).

Γιά νά ὑπολογίσουμε τή βαθμωτή καμπυλότητα τοῦ μετρικοῦ τανυστῆ (3.52) τόν γράφουμε στή μορφή

$$d\tau^2 = \Omega^2 \left[(d\varphi)^2 + (dy)^2 \right] \; , \tag{3.61}$$

ὅπου

$$\Omega^2 = 4m^2 e^S \qquad \text{καί} \qquad \frac{d\mu}{dy} = e^{S-\alpha} \; . \tag{3.62}$$

Εὔκολα βρίσκουμε ὅτι

$$(\log\Omega)_{yy} = \frac{1}{2}\, e^{S-2\alpha}(e^S)^{\cdot\cdot} \,, \tag{3.63}$$

ὅπου ἡ τελεία δηλώνει παραγώγιση ὡς πρός τή συντεταγμένη μ. Συνεπῶς ἡ βαθμωτή καμπυλότητα ἰσοῦται μέ

$$R = -\frac{e^{-2\alpha}}{4m^2}\,(e^S)^{\cdot\cdot} \,. \tag{3.64}$$

Τό θεώρημα τῶν Gauss-Bonnet (2.37) μέ ἀριθμό τοῦ Euler $x=0$ δίνει τή σχέση

$$(e^S)^{\cdot}\big|_{(\mu=1)} = (e^S)^{\cdot}\big|_{(\mu=-1)} \,. \tag{3.65}$$

Γιά νά μπορεῖ ἡ πολλαπλότητα μέ μετρικό τανυστή (3.52) νά γίνει μιά τοπολογική σαμπρέλα θά πρέπει νά μποροῦμε νά ταυτοποιήσουμε τίς γραμμές $\mu=+1$ καί $\mu=-1$ τῆς πολλαπλότητας. (Οἱ γραμμές $\varphi=0$ καί $\varphi=2\pi$ δέν παρουσιάζουν καμμιά δυσκολία ἐφ᾽ὅσον ὁ μετρικός τανυστής (3.52) εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς γωνίας φ). Θά πρέπει λοιπόν νά ἀπαιτήσουμε, ἐπιπλέον ἀπό τή συνθήκη πού δίνει τό θεώρημα τῶν Gauss-Bonnet, καί ὅτι ὁ μετρικός τανυστής (3.52) καί ἡ βαθμωτή καμπυλότητα (3.64) ἔχουν τίς ἴδιες τιμές στίς γραμμές $\mu=+1$ καί $\mu=-1$. Ἡ ὁριακή τιμή στόν ὁρίζοντα τῆς συνάρτησης S θά πρέπει λοιπόν νά ἱκανοποιεῖ καί τίς συνθῆκες

$$S(\mu=1) = S(\mu=-1) \tag{3.66}$$

καί

$$(e^S)^{\cdot\cdot}_{|(\mu=1)} = (e^S)^{\cdot\cdot}_{|(\mu=-1)} \quad . \tag{3.67}$$

Οἱ συνθῆκες (3.65)-(3.67) ἱκανοποιοῦνται ἀκριβῶς τότε ὅταν οἱ συντελεστές B_k τῆς σειρᾶς (3.56) ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k}\dot{P}_{2k}(1) = 0, \qquad \text{καί}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}\ddot{P}_{2k+1}(1) = 0 \ . \tag{3.68}$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ὅτι γιά τίς σαμπρελοειδεῖς μελανές ὀπές οἱ συνθῆκες μεταξύ τῶν συντελεστῶν εἶναι πιό πολύπλοκες ἀπ'ὅτι γιά τίς σφαιρικές μελανές ὀπές καί περιλαμβάνουν καί τίς ἀριθμητικές τιμές τῆς πρώτης καί τῆς δεύτερης παραγώγου τῶν πολυώνυμων Legendre γιά $\mu=1$.

Θά τελειώσουμε τό κεφάλαιο μέ συνόψιση τῆς κατασκευῆς τῆς γενικότερης στατικῆς καί ἀξισυμμετρικῆς τοπικῆς μελανῆς ὀπῆς μέ σαμπρελοειδῆ ὁρίζοντα: Ὁ μετρικός τανυστής δίνεται ἀπό τή σχέση (3.50). Ἡ συνάρτηση S δίνεται ἀπό τή σχέση (3.56) ὅπου τά P_k εἶναι πολυώνυμα Legendre καί οἱ συντελεστές B_k περιορίζονται ἀπό τίς σχέσεις (3.68). Ἡ συνάρτηση σ προσδιορίζεται ἀπό τίς ἐξισώσεις (3.48) καί (3.49). Ὁ ὁρίζοντας τῆς μελανῆς ὀπῆς εἶναι ἡ ἐπιφάνεια $\eta=1$ καί ἡ μάζα της (θά ἀποδειχθεῖ στό ἑπόμενο κεφάλαιο) εἶναι m.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΦΥΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΜΕΛΑΝΩΝ ΟΠΩΝ

4.1. Μάζα

Στήν ἑνότητα αὐτή προσδιορίζουμε τή συνολική μάζα τῶν γενικότερων στατικῶν καί ἀξισυμμετρικῶν τοπικῶν μελανῶν ὀπῶν μέ σφαιρικό ἤ σαμπρελοειδῆ ὁρίζοντα, τῶν ὁποίων ὁ μετρικός τανυστής δίνεται ἀντίστοιχα ἀπό τίς σχέσεις (2.23) καί (3.50). Τό κοινό ἀποτέλεσμα καί γιά τά δύο εἴδη τῶν μελανῶν ὀπῶν εἶναι ὅτι ἡ μάζα τους ἰσοῦται μέ τήν παράμετρο m πού ἐμφανίζεται στίς ἀναλυτικές ἐκφράσεις τῶν μετρικῶν τανυστῶν (2.23) καί (3.50).

Ὁ προσδιορισμός τῆς μάζας γίνεται μέ τή βοήθεια τοῦ ὁλοκληρώματος Komar[84] (Komar integral). Τό ὁλοκλήρωμα Komar παίζει στή Σχετικότητα τό ρόλο πού παίζει τό ὁλοκλήρωμα Gauss[85] στόν ἠλεκτρομαγνητισμό: Ὅπως μέ τό ὁλοκλήρωμα Gauss ἐπιτυγχάνεται ὁ ὑπολογισμός τοῦ ὁλικοῦ φορτίου μιᾶς πεπερασμένης κατανομῆς φορτίων χωρίς νά χρειάζεται νά πλησιάσουμε στήν περιοχή τῶν φορτίων (μέ τόν ὑπολογισμό τῆς ροῆς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἀπό μιά κλειστή διδιάστατη ἐπιφάνεια πού περιλαμβάνει ὅλα τά φορτία) ἔτσι καί μέ τό ὁλοκλήρωμα Komar ἐπιτυγχάνεται ὁ προσδιορισμός τῆς ὁλικῆς μάζας τοῦ χωρόχρονου μέ ὑπολογισμούς πού γίνονται στίς περιοχές τοῦ χωρόχρονου στίς ὁποῖες ἰσχύουν οἱ ἐξισώσεις Einstein μέ μηδενικό τανυστή πίεσης-ἐνέργειας.

Ἄς εἶναι

$$\xi^a = (\partial/\partial t)^a \tag{4.1}$$

τό διανυσματικό πεδίο Killing πού εἶναι χρονοειδές (timelike) ἔξω ἀπό τόν ὁρίζοντα, ∇_a ὁ τελεστής παραγώγισης πού εἶναι συμβιβαστός μέ τό μετρικό τανυστή τοῦ χωρόχρονου, καί ε_{abcd} ὁ ὁλικά ἀντισυμμετρικός τανυστής Levi-Civita[70] τοῦ χωρόχρονου. Ἡ μάζα τοῦ χωρόχρονου δίνεται ἀπό τό ὁλοκλήρωμα Komar

$$M = \frac{1}{16\pi} \iint_C \varepsilon_{abmn}(\nabla^a \xi^b)\, dA^{mn} \,, \tag{4.2}$$

ὅπου τό ἐπιφανειακό ὁλοκλήρωμα (4.2) ὑπολογίζεται σέ μία τυχαία συμπαγῆ διδιάστατη ἐπιφάνεια C τῆς ὑπερεπιφάνειας t=σταθ. ἡ ὁποία (διδιάστατη ἐπιφάνεια) περικλείει τίς περιοχές τοῦ χωρόχρονου μέ μή μηδενικό τανυστή πίεσης-ἐνέργειας καί ὅλες τίς ἀνωμαλίες (singularities) τοῦ χωρόχρονου. Στή σχέση (4.2) dA^{mn} εἶναι ἡ στοιχειώδης ἐπιφάνεια (surface element) τῆς ἐπιφάνειας ὁλοκλήρωσης C. Ἡ τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος (4.2) εἶναι ἀνεξάρτητη τῆς ἐκλογῆς τῆς ἐπιφάνειας C καί συνεπῶς χαρακτηρίζει τόν ἴδιο τό χωρόχρονο. Πράγματι, ἐφ'ὅσον τό διανυσματικό πεδίο Killing εἶναι μιά συμμετρία τοῦ χωρόχρονου, τό ὁλοκλήρωμα (4.2) εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τήν ἐκλογή τῆς τριδιάστατης ὑπερεπιφάνειας t=σταθ. Ἡ ἀνεξαρτησία τοῦ ὁλοκληρώματος ἀπό τήν ἐκλογή τῆς ἐπιφάνειας C ἀποδεικνύεται ἄν θεωρήσουμε τή διαφορά τῶν τιμῶν του γιά δύο διαφορετικές ἐπιφάνειες C_1 καί C_2 καί ἐφαρμόσουμε τό θεώρημα τοῦ Stokes καί τίς ἰδιότητες

$$\nabla_m \nabla_n \xi_p = R_{mnp}{}^q \xi_q \tag{4.3}$$

τῶν διανυσματικῶν πεδίων Killing (ὅπου $R_{mnp}{}^q$ εἶναι ὁ τανυστής καμπυλότητας τοῦ Riemann τοῦ χωρόχρονου) καί

$$\varepsilon_a{}^{mnp} R_{mnp}{}^q = 0 \tag{4.4}$$

τοῦ τανυστῆ τοῦ Riemann.

Τήν ἀνεξαρτησία τῆς τιμῆς τοῦ ὁλοκληρώματος (4.2) ἀπό τήν ἐκλογή τῆς ἐπιφάνειας C θά τήν ἐκμεταλλευτοῦμε: Σάν ἐπιφάνεια C θά διαλέξουμε τόν ὁρίζοντα τῶν μελανῶν ὀπῶν. Μέ τόν τρόπο αὐτό ἡ ὁλοκληρωτέα ποσότητα ἁπλοποιεῖται σημαντικά γιατί ἐνδιαφερόμαστε μόνο γιά τό ὅριό της γιά $\eta=1$.

(i) Σφαιρικές μελανές ὀπές: Στό σύστημα συντεταγμένων στό ὁποῖο ἔχει ἐκφραστεῖ ὁ μετρικός τανυστής (2.23) τῆς σφαιρικῆς τοπικῆς μελανῆς ὀπῆς τό ὁλοκλήρωμα Komar γράφεται ἀναλυτικά

$$M = \frac{1}{16\pi} \iint 2\sqrt{-G}\, g^{tt} g^{\eta\eta} (\xi_{\eta,t} - \xi_{t,\eta})\, d\mu d\varphi \quad , \tag{4.5}$$

ὅπου τό G δίνεται ἀπό τή σχέση (2.26), g^{tt} καί $g^{\eta\eta}$ εἶναι οἱ ἀνταλλοίωτες συνιστῶσες τοῦ μετρικοῦ τανυστῆ (2.23) καί ξ_η καί ξ_t οἱ συναλλοίωτες συνιστῶσες τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου Killing (4.1) στό σύστημα αὐτό. Ἀπό τίς συνιστῶσες αὐτές μόνο ἡ

$$\xi_t = g_{tt} = \frac{\eta-1}{\eta+1}\, e^S \tag{4.6}$$

εἶναι διάφορη τοῦ μηδενός. Ἀντικατάσταση στή σχέση (4.5) δίνει

$$M = m \tag{4.7}$$

ὅτι δηλαδή ἡ μάζα τῆς μελανῆς ὀπῆς εἶναι m.

(ii) Σαμπρελοειδεῖς μελανές ὀπές: Στό σύστημα συντεταγμένων στό ὁποῖο ἔχει ἐκφραστεῖ ὁ μετρικός τανυστής (3.50) τό ὁλοκλήρωμα Komar δίνεται πάλι ἀπό τή σχέση (4.5) ὅπου τώρα τό G δίνεται ἀπό τή σχέση (3.51), τά g^{tt} καί $g^{\eta\eta}$ εἶναι οἱ ἀνταλλοίωτες συνιστῶσες τοῦ μετρικοῦ τανυστῆ (3.50) καί ὅπου ἡ μόνη μή μηδενική συνιστώσα τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου Killing εἶναι ἡ

$$\xi_t = \frac{1}{4}(\eta^2-1)(1-\mu^2)e^{-S} \quad . \tag{4.8}$$

Ἀντικατάσταση στήν (4.5) δίνει πάλι ὅτι

$$M = m \quad . \tag{4.9}$$

Τό συμπέρασμα ὅτι ἡ μάζα τῆς γενικότερης στατικῆς καί ἀξισυμμετρικῆς τοπικῆς μελανῆς ὀπῆς μέ σφαιρικό ἤ σαμπρελοειδῆ ὁρίζοντα ἰσοῦται μέ τή μάζα m τῆς ἀντίστοιχης βασικῆς μελανῆς ὀπῆς (τῆς μελανῆς ὀπῆς Schwarzschild ἤ τῆς μελανῆς ὀπῆς μέ μετρικό τανυστή (3.38)) ἐκφράζει κάτι τό πολύ σημαντικό: Οἱ παραμορφώσεις πού ὑφίσταται ἡ βασική μελανή ὀπή μέ τήν πρόσθεση τῆς συνάρτησης $S(\eta,\mu)$ στίς βασικές λύσεις (2.18) καί (3.39) δέν ἀλλάζουν καθόλου τή μάζα τῆς μελανῆς ὀπῆς. Μπορούμε λοιπόν νά θεωρήσουμε ὅτι οἱ συναρτήσεις S (ἐξισώσεις (2.28) καί (3.56)) ἐκφράζουν τίς παραμορφώσεις πού ὑφίστανται οἱ βασικές μελανές ὀπές ἀπό τήν ἐξωτερική κατανομή τῆς μάζας πού τίς περιβάλλει. Ἐφ'ὅσον σέ κάποια περιοχή τοῦ ὁρίζοντα τῆς μελανῆς ὀπῆς ὁ τανυστής πίεσης-ἐνέργειας εἶναι μηδέν, καθόλου μάζα ἀπό τήν ἐξωτερική κατανομή δέν ἔχει πέσει μέσα στή μελανή ὀπή. Συνεπῶς, εἶναι λογικό νά περιμένουμε ὅτι ἡ ὁλική μάζα τῆς παραμορφωμένης μελανῆς ὀπῆς ἰσοῦται μέ τή μάζα τῆς ἀρχικῆς βασικῆς μελανῆς ὀπῆς.

4.2. Ἐπιφάνεια τοῦ ὁρίζοντα

Ἕνα ἄλλο ἐξωτερικό χαρακτηριστικό κάθε μελανῆς ὀπῆς εἶναι ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ ὁρίζοντά της. Ἐκτός ἀπό τή γεωμετρική εἰκόνα πού μᾶς δίνει γιά τό μέγεθος τῆς μελανῆς ὀπῆς, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁρίζοντα σχετίζεται καί μέ τή θερμοδυναμική τῆς μελανῆς ὀπῆς, ὅπως ἀναφέραμε στήν ἑνότητα 1.1. Τό θεώρημα ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁρίζοντα δέν ἐλαττώνεται κατά τή διάρκεια τῶν φυσικῶν μεταβολῶν τῆς μελανῆς ὀπῆς δέν εἶναι γνωστό ἄν ἰσχύει γιά τίς τοπικές μελανές ὀπές γιατί μιά ἀπό τίς βασικές ὑποθέσεις πού χρησιμοποιήθηκε γιά τήν ἀπόδειξή του εἶναι ὅτι ὁ χωρόχρονος τῆς μελανῆς ὀπῆς εἶναι ἀσυμπτωτικά ἐπίπεδος. Στήν ἑνότητα αὐτή ὑπολογίζουμε τήν ἐπιφάνεια τοῦ ὁρίζοντα τῶν γενικῶν τοπικῶν μελανῶν ὀπῶν μέ μετρικούς τανυστές (2.23) καί (3.50).

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁρίζοντα δίνεται ἀπό τή σχέση

$$A = \iint \sqrt{g}\, d\mu d\phi, \tag{4.10}$$

ὅπου g εἶναι ἡ ὁρίζουσα τοῦ μετρικοῦ τανυστῆ τοῦ ὁρίζοντα. Τό g δίνεται ἀπό τίς ἐξισώσεις (2.27) καί (3.53) γιά τίς γενικότερες σφαιρικές καί σαμπρελοειδεῖς μελανές ὀπές ἀντίστοιχα. Ὁ ὑπολογισμός τοῦ ὁλοκληρώματος δίνει ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁρίζοντα καί στίς δύο περιπτώσεις ἰσοῦται μέ

$$A = 16\pi m^2 e^{\alpha}, \tag{4.11}$$

ὅπου α εἶναι οἱ σταθερές πού ὁρίστηκαν στίς σχέσεις (2.30) καί (3.60) γιά τίς σφαιρικές καί τίς σαμπρελοειδεῖς μελανές ὀπές ἀντίστοιχα. Ὑπενθυμίζεται ὅτι οἱ ἀντίστοιχες βασικές μελανές ὀπές ἔχουν ἐπιφάνεια ὁρίζοντα

$$A = 16\pi m^2 \; . \tag{4.12}$$

Τό συμπέρασμα ὅτι ἡ ἐξωτερική κατανομή τῆς μάζας ἀλλάζει τήν ἐπιφάνεια τοῦ ὁρίζοντα δέν προξενεῖ ἔκπληξη. Οἱ ἐξωτερικές παραμορφώσεις, ἄν καί δέν ἀλλάζουν τήν τοπολογική δομή τοῦ ὁρίζοντα, ἀλλάζουν τή μετρική δομή του καί συνεπῶς καί τήν ἐπιφάνειά του.

4.3. Ἐπιφανειακή ἔνταση βαρύτητας

Ἄς εἶναι ξ^a τό διανυσματικό πεδίο Killing (4.1) πού γίνεται φωτοειδές στόν ὁρίζοντα. Συνεπῶς πάνω στόν ὁρίζοντα τῆς μελανῆς ὀπῆς τό ξ^a θά εἶναι γεωδαισιακό (geodesic) καί θά ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση

$$\xi^m \nabla_m \xi^a = k \xi^a \; , \tag{4.13}$$

ὅπου k εἶναι ἕνα βαθμωτό πεδίο στόν ὁρίζοντα. Τό k μετρᾶ[12] τήν ἀπόκλιση τοῦ γεωδαισιακοῦ διανυσματικοῦ πεδίου ξ^a ἀπό τήν ἀφινική παραμετροποίηση (affine parametrization deviation) ἐξ' αἰτίας τοῦ πεδίου βαρύτητας. Τό k λοιπόν εἶναι ἕνα μέτρο τῆς ἔντασης τοῦ πεδίου βαρύτητας πάνω στόν ὁρίζοντα τῆς μελανῆς ὀπῆς. Ἕνα πολύ βασικό θεώρημα τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν μελανῶν ὀπῶν[12] ἀποδεικνύει ὅτι τό k εἶναι σταθερό στόν ὁρίζοντα. Τό k προσδιορίζεται σάν ἡ θετική τετραγωνική ρίζα τῆς ποσότητας

$$k^2 = \frac{1}{2} \lim(\nabla_a \xi_b)(\nabla^a \xi^b) \qquad (4.14)$$

ὅπου τό ὅριο νοεῖται πάνω στόν ὁρίζοντα.

Ἐκτός ἀπό τή γεωμετρική της σημασία, ἡ ἐπιφανειακή ἔνταση τῆς βαρύτητας ἔχει καί φυσική σημασία. Στίς μελέτες τῆς θερμοδυναμικῆς τῶν μεμονωμένων μελανῶν ὀπῶν ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ θερμοκρασία τῆς μελανῆς ὀπῆς (σέ μονάδες ὅπου c=1 καί G=1) δίνεται ἀπό τή σχέση

$$T = \frac{k}{8\pi} \quad . \qquad (4.15)$$

Συνεπῶς καί γιά τίς μελανές ὀπές ἰσχύει ὁ "μηδενικός νόμος" τῆς θερμοδυναμικῆς: Ἡ θερμοκρασία τῆς μελανῆς ὀπῆς εἶναι σταθερή σ'ὅλη τήν ἐπιφάνεια τοῦ ὁρίζοντα.

Ὁ ὑπολογισμός τῆς ἐπιφανειακῆς ἔντασης βαρύτητας ἐπιτυγχάνεται μέ τή βοήθεια τῆς σχέσης (4.14). Γιά τή γενικότερη στατική, ἀξισυμμετρική, σφαιρική, τοπική μελανή ὀπή μέ μετρικό τανυστή (2.23) ἡ σχέση (4.14) δίνει

$$k^2 = - \frac{1}{4}\lim g^{\eta\eta} g^{tt} (\xi_{t,\eta})^2 , \qquad (4.16)$$

ὅπου τά διάφορα σύμβολα ἔχουν ὁριστεῖ στό τμῆμα (i) τῆς ἑνότητας 4.1. Ἀντικατάσταση δίνει

$$k^2 = \frac{1}{16m^2} \lim e^{2S-\sigma} = \frac{e^{-2\alpha}}{16m^2} \qquad (4.17)$$

καί συνεπῶς

$$k = \frac{e^{-\alpha}}{4m} , \qquad (4.18)$$

ὅπου α εἶναι ἡ σταθερή πού ὁρίστηκε στή σχέση (2.30).

Γιά τή γενικότερη στατική, ἀξισυμμετρική, σαμπρελοειδῆ, τοπική μελανή ὀπή μέ μετρικό τανυστή (3.50) τό k προσδιορίζεται πάλι ἀπό τή σχέση (4.16) ὅπου τώρα τά συμβολα ἔχουν ὁριστεῖ στό τμῆμα (ii) τῆς ἑνότητας (4.1). Ἀντικατάσταση δίνει

$$k^2 = \frac{1}{16m^2} \lim e^{-\sigma} \qquad (4.19)$$

καί συνεπῶς ἡ ἐπιφανειακή ἔνταση τῆς βαρύτητας δίνεται πάλι ἀπό τή σχέση (4.18) ὅπου ὅμως α εἶναι ἡ σταθερή πού ὁρίστηκε στή σχέση (3.60).

Γιά ὅλες τίς μελανές ὀπές πού κατασκευάσαμε στήν πραγματεία αὐτή ἰσχύει ἡ γενική σχέση

$$\frac{kA}{m} = 4\pi , \qquad (4.20)$$

πού συνδέει τρία ἐξωτερικά χαρακτηριστικά τῆς μελανῆς ὀπῆς.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στήν πραγματεία αὐτή ἀναπτύξαμε μιά γενική μεθοδο γιά τόν προσδιορισμό τῶν γενικῶν στατικῶν καί ἀξισυμμετρικῶν λύσεων τῶν ἐξισώσεων Einstein πού παριστάνουν τοπικές μελανές ὀπές. Ἡ μέθοδος ἐφαρμόζεται γιά τίς τοπικές μελανές ὀπές μέ τοπολογικά σφαιρικό ἤ σαμπρελοειδῆ ὁρίζοντα, πού ἀποτελοῦν καί τίς μόνες περιπτώσεις στατικῶν, ἀξισυμμετρικῶν, τοπικῶν μελανῶν ὀπῶν. Καί στίς δύο περιπτώσεις ὁ μετρικός τανυστής πού περιγράφει τίς μελανές ὀπές προσδιορίζεται ἀναλυτικά, μέ τή βοήθεια πολυώνυμων Legendre.

Καί στίς δύο κατηγορίες τοπικῶν μελανῶν ὀπῶν, ἡ λύση τῶν ἐξισώσεων Einstein πού τίς περιγράφει προσδιορίζεται σέ δύο βήματα, μέ τή βοήθεια τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαλληλίας. Στό πρῶτο βῆμα προσδιορίζεται μιά ἁπλῆ λύση σφαιρικῆς ἤ σαμπρελοειδοῦς μελανῆς ὀπῆς, ἡ "βασική" μελανή ὀπή, ἐνῶ στό δεύτερο προστίθεται στή βασική λύση ἡ γενικότερη λύση τῶν ἐξισώσεων Einstein πού δέν καταστρέφει τόν ὁρίζοντα τῆς βασικῆς μελανῆς ὀπῆς. Ἡ βασική σφαιρική μελανή ὀπή εἶναι ἡ μελανή ὀπή Schwarzschild ἐνῶ ἡ βασική σαμπρελοειδής μελανή ὀπή εἶναι ἀρκετά πολύπλοκη καί προσδιορίζεται ἀπό τήν ἀπαίτηση ὅτι ὁ μετρικός τανυστής της εἶναι λεῖος καί ἀντιστρεπτός στόν ὁρίζοντα. Τέλος, μέ ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τῶν Gauss-Bonnet, βρίσκονται οἱ ἐπιπλέον συνθῆκες μεταξύ τῶν παραμέτρων τῶν λύσεων ἔτσι ὥστε ὁ ὁρίζοντας νά ἔχει τήν ἐπιθυμητή τοπολογία.

SUMMARY

In this treatise we develop a method for the construction of the most general static and axisymmetric solution of the Einstein equations which describes local black holes. The method is applied for the construction of black holes with a topologically spherical or toroidal horizon, which are the only cases of static, axisymmetric, local black holes. In both cases the metric of the black hole is expressed analytically, in terms of Legendre polynomials.

The solutions of the Einstein equations which describe both categories of local black holes are determined in two steps, by using the superposition principle. In the first step, a simple solution of a spherical or a toroidal black hole is determined, the "basic black hole", while in the second step it is added to the basic solution the most general solution of the Einstein equations which does not destroy the horizon of the basic black hole solution. The basic spherical black hole is the Schwarzschild black hole while the basic toroidal black hole is rather complicated and it is determined from the requirement that the spacetime metric is smooth and invertible on the horizon. Additional conditions among the free parameters of the solutions are determined, so that the horizon has the desired topology, as an application of the Gauss-Bonnet theorem.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber., 799, 1915.
2. A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber. 47, 831, 1915.
3. A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber., 844, 1915.
4. A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber., 778, 1915.
5. K. Schwarzschild, Sitzber, Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math-Phys. Tech. 189, 1916.
6. H. Reissner, Ann. Phys. (Germany) 50, 106, 1916.
7. G. Nordström, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 20, 1238, 1918.
8. R.P. Kerr, Phys. Rev. Lett. 11, 237, 1963.
9. E.T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash καί R. Torrence, J. Math. Phys. 6, 918, 1965.
10. W. Israel, Phys. Rev. 164, 1776, 1968.
11. B. Carter, Phys. Rev. Lett. 26, 331, 1971.
12. B. Carter, στό βιβλίο Black Holes, σελ. 57, C. DeWitt καί B.S. DeWitt eds., Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1973.
13. D.C. Robinson, Phys. Rev. Lett. 34, 905, 1975.
14. R. Penrose, Nuovo Cimento 1, special number, 252, 1969.
15. R. Penrose καί R. M. Floyd, Nature Phys. Sci., 229, 177, 1971.
16. D. Christodoulou, Ph.D διατριβή "Investigations in gravitational collapse and the physics of black holes", Princeton University, 1971.
17. D. Christodoulou, Phys. Rev. Lett. 25, 1596, 1970.
18. J. M. Bardeen, W.H. Press καί S.A Teukolsky, Astrophys. J. 178, 347, 1972.
19. R.M. Wald, Astrophys. J. 191, 231, 1974.
20. R.M. Wald, Ann. Phys. 82, 548, 1974.
21. S.W. Hawking, Phys. Rev. Lett. 26, 1344, 1971.
22. S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. 25, 152, 1972.

23. S.W. Hawking καί G.F.R Ellis στό βιβλίο The large scale structure of spacetime, 1973, Cambridge University Press.

24. J. Bekenstein, Phys. Rev. D5, 1239, 1972.

25. J.D. Bekenstein, Phys. Rev. D12, 3077, 1975.

26. S.W. Hawking, Phys. Rev. D13, 191, 1976.

27. S.W. Hawking, Nature, 248, 30, 1974.

28. S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. 43, 199, 1975.

29. S.W. Hawking, Phys. Rev. D14, 2460, 1976.

30. D.N. Page, Phys. Rev. D13, 198, 1976.

31. R.M. Wald, Commun. Math. Phys. 45, 9, 1975.

32. R.M. Wald, Phys. Rev. D13, 3176, 1976.

33. S. Chandrasekhar στό βιβλίο The mathematical theory of black holes, 1982 (ὑπό ἔκδοση), Oxford at the Clarendon Press.

34. T. Regge καί J.A. Wheeler, Phys. Rev. 108, 1063, 1957.

35. F.J. Zerilli, Phys. Rev. Lett. 24, 737, 1970.

36. F.J. Zerilli, Phys. Rev. D2, 2141, 1970.

37. C.V. Vishveshwara, Phys. Rev. D1, 2870, 1970.

38. J.M. Bardeen καί W.H. Press, J. Math. Phys. 14, 7, 1972.

39. J.L. Friedman, Proc. R. Soc. Lond. A335, 163, 1973.

40. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A343, 289, 1975.

41. S. Chandrasekhar καί S. Detweiler, Proc. R. Soc. Lond. A344, 441, 1975.

42. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A354, 145, 1975.

43. F.J. Zerilli, Phys. Rev. D9, 860, 1974.

44. V. Moncrief, Phys. Rev. D9, 2707, 1974.

45. V. Moncrief, Phys. Rev. D10, 1057, 1974.

46. V. Moncrief, Phys. Rev. D12, 1526, 1975.

47. D.M. Chitre, Phys. Rev. D13, 2713, 1976.

48. R.M. Wald, Proc. R. Soc. Lond. A369, 67, 1979.

49. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A365, 453, 1979.

50. S. Chandrasekhar καί B.C. Xanthopoulos, Proc. R. Soc. Lond. A367, 1, 1979.

51. B.C. Xanthopoulos, Phys. Lett. 77A, 7, 1980.

52. B.C. Xanthopoulos, Proc. R. Soc. Lond. A378, 61, 1981.

53. B.C. Xanthopoulos, Proc. R. Soc. Lond. A378, 73, 1981.

54. S.A. Teukolsky, Phys. Rev. Lett. 29, 1114, 1972.

55. S.A. Teukolsky, Astrophys. J. 185, 635, 1973.

56. A.A. Starobinsky καί S.M. Churilov, Zh. Exp. i. Teoret. Fiz. 65, 3, 1973, Μετάφραση στά άγγλικά στό Soviet Phys. JETP, 38, 1, 1973.

57. W.H. Press καί S.A. Teukolsky, Astrophys. J. 185, 649, 1973.

58. J.D. Bekenstein, Phys. Rev. D7, 949, 1973.

59. J.M. Cohen καί L.S. Kegeles, Phys. Rev. D10, 1070, 1974.

60. P.L. Chrzanowski, Phys. Rev. D11, 2042, 1975.

61. P.L. Chrzanowski, Phys. Rev. D13, 806, 1976.

62. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond, A348, 39, 1976.

63. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A349, 1, 1976.

64. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A358, 421, 1978.

65. S. Chandrasekhar καί S. Detweiler, Proc. R. Soc. Lond. A352, 325, 1977.

66. S. Detweiler, Proc. R. Soc. Lond. A352, 381, 1977.

67. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A365, 425, 1979.

68. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A372, 475, 1980.

69. J.M. Stewart, Proc. R. Soc. Lond. A367, 527, 1979.

70. G.W. Misner, K.S. Thorne καί J.A. Wheeler, στό βιβλίο Gravitation, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.

71. L.P. Eisenhart, στό βιβλίο Riemannian Geometry, Princeton University Press, 1966.

72. H. Weyl, Ann. Physik 54, 117, 1917.

73. J.L. Synge στό βιβλίο Relativity: The General Theory, North Holland, Amsterdam, 1960.

74. L.A. Mysak καί G. Szekeres, Can. J. Phys. 44, 617, 1966.

75. W. Israel καί K.A. Khan, Nuovo Cimento 33, 331, 1964.

76. W. Israel, Lett. Nuovo Cimento, 6, 267, 1973.

77. P.C. Peters, J. Math. Phys. 20, 1481, 1979.

78. R. Geroch καί J.B. Hartle, Enrico Fermi Institute, University of Chicago preprint, 1981.

79. S. Chandrasekhar καί J.L. Friedman, Astrophys. J. 175, 379, 1972.

80. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A358, 405, 1978.

81. N.J. Hicks στό βιβλίο Notes on Differential Geometry, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1971.

82. P.M. Morse καί H. Feshback στό βιβλίο Methods of Theoretical Physics, Mc Graw-Hill, New York, 1953.

83. B. Carter στό βιβλίο General Relativity, An Einstein centenary survey, S.W. Hawking καί W. Israel eds., Cambridge University Press, σελ. 294, 1979.

84. A. Komar, Phys. Rev. 113, 934, 1959.

85. J.D. Jackson στό βιβλίο Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1975.